GRUNDZÜGE

DER

ASTRONOMISCHEN

ZEIT- UND ORTSBESTIMMUNG

VON

DR. W. JORDAN,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BERLIN,

VERLAG VON JULIUS SPRINGER.

1885.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Vorwort.

Das vorliegende Werk ist theils aus praktischen Ortsbestimmungsarbeiten, theils aus Uebungsmessungen und Vorträgen an den technischen Hochschulen zu Karlsruhe und Hannover entstanden.

Es handelt sich dabei um eine gewisse Mittelstufe von astronomischen Messungen und Berechnungen, bei welchen über die Beobachtungs-Genauigkeit von 1 Zeitsecunde nicht hinausgegangen wird.

Im Vergleich mit den Werken über Nautik berücksichtigt unsere Darstellung der praktischen Astronomie mehr die Verhältnisse zu Lande und die mathematischen Anschauungen unserer technischen Hochschulen, sowie die Uebungsmessungen, welche ohne eine „Sternwarte" im Anschluss an den geodätischen Unterricht ausgeführt werden können.

Alle mitgetheilten Methoden habe ich durch eigene Messungen und Berechnungen namentlich in Bezug auf Genauigkeit erprobt. Die am Schluss beigefügten Hülfstafeln sind neu berechnet worden.

Die Messungsbeispiele sind zum Theil meinen Aufnahmen auf der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste im Winter 1873—1874 entnommen, welche in dem Werke „Physische Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste von Dr. W. Jordan, Cassel 1876" veröffentlicht sind. Die Längenberechnungen sind Weiterführungen der damals angewendeten Methode.

Fast alle in diesem Buche abgebildeten Instrumente befinden sich in der dem Verfasser unterstellten hannover'schen geodätischen Sammlung, welche in den letzten Jahren neu eingerichtet und erheblich vervollständigt worden ist. In wenigen Fällen (S. 40, 42, 164, 166,

259) habe ich mir erlaubt, Zeichnungen meines Amtsvorgängers (Hunäus, „Die geometrischen Instrumente, Hannover 1864") zu benützen. Mit Ausnahme einiger solcher unwesentlicher Entlehnungen sind die Instrumenten-Zeichnungen für unseren Zweck neu angefertigt worden.

Während unsere Sammlung schon früher eine ziemliche Zahl von Reflexionsinstrumenten besass, die schon von Hunäus abgebildet sind, ist durch Neuanschaffungen (S. 161, 222, 230, 273) diese Gattung von Instrumenten nun so vollständig vertreten wie wohl selten in einer anderen Sammlung oder in einem anderen Werke.

Wir haben für die Reflexions-Instrumente eine zusammenhängende und vollständige Fehlertheorie entwickelt, an welcher es bisher gefehlt hat.

Im Zusammenhang damit steht die Praxis und Theorie der Messung und Reduction von Monddistanzen, welche in einzelnen Theilen ebenfalls von uns weiter entwickelt worden ist. Eine Studie über den relativen Werth der Monddistanzen bildet das Haupt-Resultat dieses Abschnittes.

Hannover, Juni 1885.

Jordan.

Inhalts-Uebersicht.

Capitel I.

Allgemeine Vorbereitung der Zeit- und Ortsbestimmungs-Aufgaben.

Capitel II.

Astronomische Zeit- und Ortsbestimmung.

Anhang.

Hülfstafeln.

Druckfehler.

S. 17. In Fig. 2. lies mittl. Zeit $= t'$ statt t.
S. 20. 19. Linie lies $T = 6^h\ 47^m\ 10{,}6^s$ statt $18^h\ 47^m\ 10{,}6^s$.
S. 129. In Fig. 5. soll $a = E'EW$ sein statt $B'EW$.
S. 153. Bei Fig. 6. soll stehen zu Fig. 7. statt zu Fig. 6.
S. 252. Zwischen (3) und (4) lies zweimal D statt E.
S. 275. 3. Linie von unten lies S. 262 statt S. 272.
S. 279. 3. Linie lies [2] statt (2).

Capitel I.

Allgemeine Vorbereitung der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmungs-Aufgaben.

§ 1. Einleitung.

Die astronomische Zeit- und Ortsbestimmung ist ein Theil der praktischen Astronomie; sie beschäftigt sich mit der Lage der Himmelskörper gegen die Erde, und im besonderen gegen einen einzelnen Punkt der Erde, den Beobachtungspunkt.

Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Richtungen der Sehstrahlen von dem Beobachtungspunkt nach den Himmelskörpern, d. h. um die Winkel, welche diese Sehstrahlen mit festen Geraden auf der Erde oder unter sich selbst bilden. Die Entfernungen der Himmelskörper von dem Erdorte kommen dabei in der Regel nicht in Betracht, sondern werden nur ausnahmsweise zu Hülfsberechnungen gebraucht.

Zur Veranschaulichung der Winkel, welche die verschiedenen durch den Beobachtungspunkt gehenden Geraden und Ebenen bilden, bedient man sich, wie in der sphärischen Trigonometrie, einer fingirten Kugel, welche man sich mit beliebigem Halbmesser um den Beobachtungspunkt beschrieben denkt, diese Kugel heisst das Himmelsgewölbe. Jede von dem Beobachtungspunkt ausgehende Richtung wird veranschaulicht durch einen Punkt des Himmelsgewölbes; der Winkel, welchen zwei Visirrichtungen unter sich bilden, wird dargestellt durch einen grössten Kreisbogen des Himmelsgewölbes etc.

Wenn das Himmelsgewölbe mit allen für unsere Zwecke in Betracht kommenden Punkten feststehend wäre, so würden die astronomischen Beobachtungen sich nicht wesentlich von den geodätischen Winkelmessungen unterscheiden. Die Punkte des Himmels stehen aber nicht fest, sondern sind in stetiger Bewegung begriffen, welche als Maass der Zeit dient; und deswegen kommen zu den reinen Winkelmessungen, welche mit ähnlichen Instrumenten wie in der Geodäsie ausgeführt werden, in der Astronomie noch die Zeitmessungen mit Hülfe der Uhren, und die Gesammtaufgabe der astronomischen Ortsbestimmung besteht in folgenden Theilaufgaben:

1) Bestimmung der Zeit.
2) Bestimmung der Himmelsrichtungen (Azimut).
3) Bestimmung der geographischen Breite.
4) Bestimmung der geographischen Länge.

Von diesen vier Theilaufgaben sind 1) und 4) sehr nahe verwandt; diese Aufgaben greifen überhaupt mehrfach in einander über.

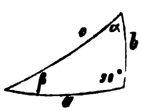
Die Auflösung dieser praktischen Aufgaben setzt verschiedene Hülfsmittel als gegeben voraus, welche in den astronomischen Jahrbüchern niedergelegt sind, und durch die theorctische Astronomie gewonnen worden sind.

Wegen häufigen Gebrauchs stellen wir hier die wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie zusammen, um dieselben nach Bedarf citiren zu können.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck. Fig. 1.

Hypotenuse $= c$
Kathete $= a$ Gegenwinkel $= \alpha$
Kathete $= b$ Gegenwinkel $= \beta$

Fig. 1.
Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.



$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \cos c &= \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \qquad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c} \quad (3)$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \qquad \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \qquad \cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (5)$$

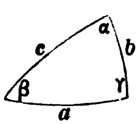
In dieser Gestalt prägen sich diese Formeln leicht dem Gedächtniss ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der ebenen Trigonometrie im Auge behält.

II. Allgemeines sphärisches Dreieck. Fig. 2.

Seiten $a\ b\ c$
Gegenwinkel $\alpha\ \beta\ \gamma$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Fig. 2.
Sphärisches Dreieck.



$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \gamma \\ \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen (6) (7) (8) (9) genügen immer zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken. Wenn von einer Unbekannten *sin* und *cos* in einer Gleichung vorkommen, z. B. $A \sin \alpha + B \cos \alpha + C = 0$, so erfolgt die

Auflösung durch eine Substitution von der Form $\frac{A}{B} = tang\ \lambda$, wobei λ gewöhnlich eine einfache geometrische Bedeutung hat.

Gauss'sche Gleichungen.

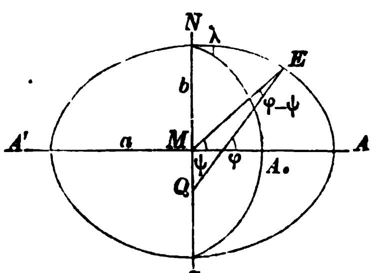
$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Durch Division findet man $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$, sowie $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ und damit β und γ sowie b und c.

§ 2. Feste Punkte und feste Richtungen auf der Erde.

Lage eines Punktes auf der Erdoberfläche. Die Erdoberfläche ist ein Umdrehungsellipsoid von geringer Abplattung (Fig. 1.), dessen Quadrant AN etwa = 10 000 000 m, und dessen Abplattung $\frac{a-b}{a}$ etwa $= \frac{1}{299}$ ist. Für viele Zwecke ist es hinreichend genau, die Erde als eine Kugel vom Halbmesser 6 370 000 m zu betrachten.

Fig. 1. Das Erdellipsoid.



Auf einem Meridian NEA der Erde wird ein Punkt E bestimmt durch seine geographische Breite φ, d. h. durch den Winkel, welchen die Normale EQ mit der grossen Achse MA macht; eine andere Punktbestimmung im Meridian erhält man durch die geocentrische Breite ψ, d. h. den Winkel, welchen die Linie EM von E nach dem Erdmittelpunkt M, mit der grossen Achse MA bildet. Die Differenz der Winkel φ und ψ ist durchaus nicht unbedeutend, sie hat in runden Zahlen etwa folgende Werthe:

$\varphi = 0°$	$\varphi - \psi = 0'$	$\varphi = 45°$	$\varphi - \psi = 12'$
$\varphi = 15°$	$\varphi - \psi = 6'$	$\varphi = 60°$	$\varphi - \psi = 10'$
$\varphi = 30°$	$\varphi - \psi = 10'$	$\varphi = 75°$	$\varphi - \psi = 6'$
$\varphi = 45°$	$\varphi - \psi = 12'$	$\varphi = 90°$	$\varphi - \psi = 0'$

(vgl. J. Handb. d. Verm. II S. 31 und 51).

Die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird bestimmt durch den Längenunterschied λ, welcher entweder als Winkel A_0NA am Pol N, oder als Bogen A_0A auf dem Aequator zur Anschauung kommt.

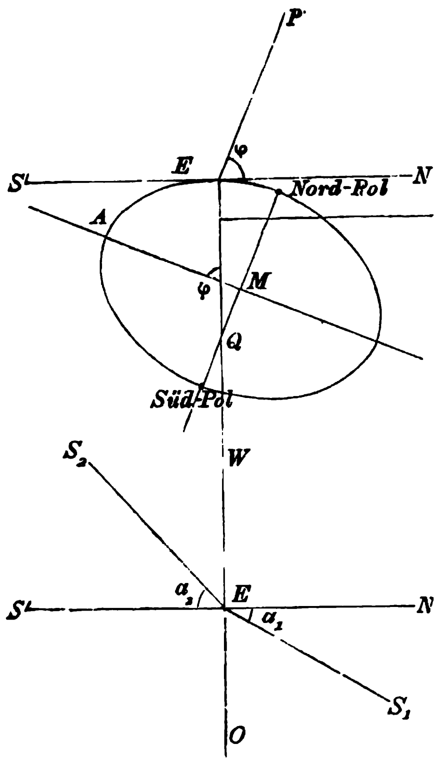
Unter Voraussetzung eines festen Anfangsmeridians NA_0 (z. B. Meridian von Greenwich) ist somit ein Punkt auf der Erdoberfläche vollständig

bestimmt durch seine geographische Breite φ und durch seine geographische Länge λ.

Feste Richtungen in einem Punkte der Erdoberfläche (Fig. 2.).

Die erste Hauptrichtung ist die Normale EQ, welche durch die Schwerkraft bestimmt wird, jede in E rechtwinklig zu EQ gelegte Richtung heisst eine Horizontale (durch die Libelle bestimmt). Der Inbegriff aller Horizontalen, d. h. die Berührungsebene in E, heisst der Horizont.

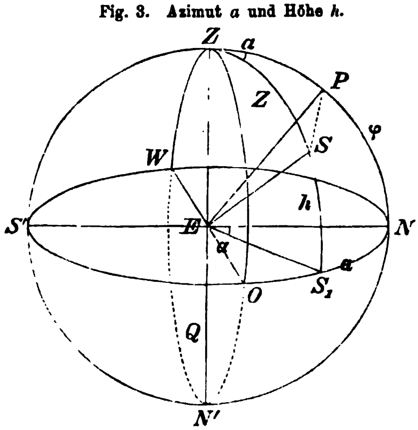
Fig. 2. Hauptrichtungen.



In der Horizontebene, welche im unteren Theile von Fig. 2. besonders gezeichnet ist, erhält man durch die Beziehung zum Meridian zwei weitere Hauptrichtungen, die Nord-Südlinie NS', in übertragenem Sinne selbst wieder Meridian genannt, und die West-Ostlinie WO. In der Horizontebene wird ein Strahl ES_1 oder ES_2 festgelegt durch sein Azimut, welches vom Meridian, entweder von Nord nach Ost $= a_1$, oder von Süd nach West $= a_2$ gezählt wird.

Ein von E ausgehender Strahl ES, welcher nicht in der Horizontebene liegt, wird bestimmt durch das Azimut seiner Projection ES_1 auf die Horizontebene und durch den Höhenwinkel S_1ES, welchen der Strahl ES mit seiner Horizontalprojektion ES_1 bildet.

Fig. 3. Azimut a und Höhe h.



Mit der in § 1. S. 1 erwähnten Himmelskugel als Anschauungshülfsmittel haben wir alle bisher behandelten Richtungen in der perspectivisch gezeichneten Fig. 3. zusammengestellt.

E ist ein Beobachtungspunkt der Erdoberfläche, EQ ist die Normale, entsprechend Fig. 1. und Fig. 2., $N\ O\ S'\ W$ und S, sind dieselben wie in Fig. 2. Die Normale EQ gibt nach oben verlängert

am Himmel das Zenit Z und unten das Nadir N'. Durch einen Punkt S des Himmels wird der Verticalkreis ZSS_1 gelegt, wodurch das Azimut a von S in dreierlei Form sich zeigt, nämlich als Winkel NES_1 im Horizont, oder als Bogen NS_1 des Horizontkreises $NOS'W$, endlich als Winkel NZS am Zenit. $S_1ES = h$ ist die Höhe von S, deren Complement $ZES = z$ Zenitdistanz genannt wird.

Von den verschiedenen durch EZ gehenden Verticalkreisen, deren einer, ZSS_1 bereits erwähnt wurde, und zu welchen auch der Meridian NZS' gehört, führt der von West nach Ost gerichtete, WZO noch einen besonderen Namen, derselbe heisst der „erste Vertical".

Zieht man von E aus eine Parallele mit der Erdachse, d. h. mit der Geraden MN in Fig. 1., so erhält man in Fig. 3. die Richtung EP, und damit den Himmelspol P, woraus in Verbindung mit Fig. 2. folgt, dass die Polhöhe NEP gleich der geographischen Breite φ ist. Zieht man noch die Verbindung PS, so erhält man in Fig. 3. das wichtige Dreieck ZPS, welches später besonders behandelt werden wird. (§ 4.)

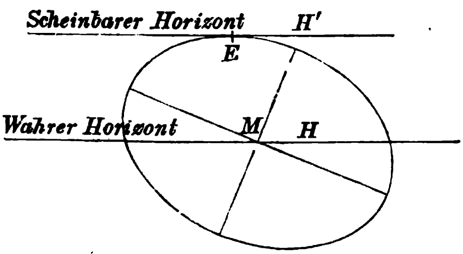
Verschiebung des Horizontes. (Fig. 4.)

Nach der bisherigen Erklärung versteht man unter dem Horizont eines Punktes E die in diesem Punkte an die Erdoberfläche gelegte Berührungsebene EH'. Da jedoch der Erdhalbmesser sehr klein ist im Vergleich mit den Entfernungen der Himmelskörper, so empfiehlt es sich für viele Zwecke, die Horizontebene mit sich selbst parallel in den Erdmittelpunkt zu verschieben, so dass sie die Lage MH annimmt, und man nennt dann

EH' den scheinbaren Horizont,

MH den wahren Horizont,

Fig. 4. Scheinbarer Horizont und Wahrer Horizont.



und sofern man nicht die Verschiebung geradezu vernachlässigen kann, hat man für gegenseitige Reduktion vom scheinbaren auf den wahren Horizont und umgekehrt Sorge zu tragen.

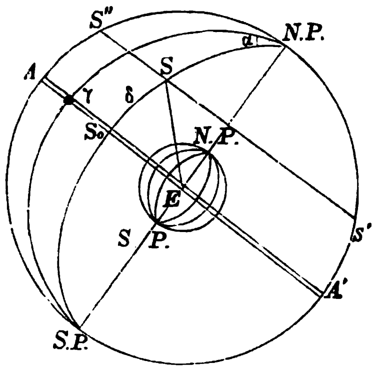
Die Benennungen „scheinbar" und „wahr" (englisch *apparent* und *true*), welche in ähnlichem Sinne auch sonst in der Astronomie vorkommen, sind nach unserer vorstehenden Entwicklung eigentlich nicht gerechtfertigt, man wäre eher versucht, EH' den wahren Horizont und MH einen fingirten Horizont zu nennen; die Benennungen sind jedoch dadurch entstanden, dass man in den Hauptrechnungsformeln alles auf den „wahren" Horizont MH beziehen muss, während der „scheinbare" Horizont nur vorübergehend bei den Beobachtungen gebraucht wird.

Eine mehr treffende Bezeichnung statt „wahr" ist „geocentrisch", z. B. eine geocentrische Monddistanz ist eine solche, wie sie ein im Mittelpunkt der Erde befindlicher Beobachter sehen würde.

§ 3. Eintheilung und Drehung des Himmels.

Indem wir nun den Beobachtungspunkt E sammt seinem Horizont von der Erdoberfläche in den Erdmittelpunkt verschoben denken, und auch die fingirte Himmelskugel um den Erdmittelpunkt als Beobachtungspunkt gelegt denken, erhalten wir die nebenstehende Fig. 1., wobei auch die Erde als kugelförmig angenommen ist.

Fig. 1. Rectascension α und Declination δ.



Denkt man sich nun die Erdachse über den Nordpol $N.P.$ und über den Südpol $S.P.$ hinaus bis zum Himmel verlängert, so erhält man eine entsprechende Himmelsachse $N.P.$ — $S.P.$, um welche sich der Himmel dreht (wovon nachher besonders die Rede sein wird); ebenso gibt die Erweiterung der Ebene des Erdäquators einen Himmelsäquator AA', und ebenso, wie man auf der Erde einen Punkt durch Länge und Breite bestimmt, bestimmt man nun am Himmel einen Punkt S durch die Rectascension und Declination.

R e c t a s c e n s i o n am Himmel ist analog der geogr. L ä n g e auf der Erde
D e c l i n a t i o n „ „ „ „ „ „ B r e i t e „ „ „

In Fig. 1. ist der Punkt S bestimmt durch die Rectascension, welche sich entweder als Bogen ♈ S_0 auf dem Aequator oder als Winkel α am Pol darstellt, und ferner durch die Declination $S_0 E S = \delta$. Die Declinationen werden, wie die Breiten auf der Erde, vom Aequator nach Norden positiv, nach Süden negativ gezählt. Ein Kreis $S_0 S$, welcher durch die Erdachse geht, heisst Declinationskreis, ein Kreis $S'' S S'$ rechtwinklig zur Erdachse heisst Parallelkreis.

D e c l i n a t i o n s k r e i s am Himmel ist analog dem M e r i d i a n auf der Erde,
P a r a l l e l k r e i s am Himmel ist analog dem P a r a l l e l k r e i s auf der Erde.

Die Rectascension am Himmel und die geographische Länge auf der Erde sind auch insofern verwandt, als beide willkürlichen Zählungsanfang haben. In Fig. 1. ist der Anfangspunkt der Rectascensionen auf dem Aequator mit ♈ (Widder) bezeichnet, was vorerst ein willkürlicher fester Punkt (ebenso wie z. B. Greenwich auf der Erde) sein soll.

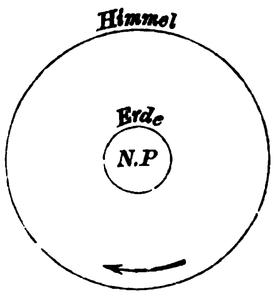
Die Benennung R e c t a s c e n s i o n (*Ascensio Recta*, abgekürzt *A.R.*), g e r a d e A u f s t e i g u n g, deutet darauf hin, dass die Erdachse nahezu horizontal, also die Parallelkreise, in welchen die Gestirne sich bewegen (aufsteigen), nahezu vertical gerichtet gedacht wurden, was in niederen Breiten, woselbst die Wiege der Astro-

nomie zu suchen ist, in der That der Fall ist. In unseren höheren Breiten, wo die Gestirne durchaus nicht gerade, sondern unter sehr schiefen Winkeln vom Horizont aufsteigen, würde jene Benennung kaum entstanden sein.

Drehung des Himmels.

Der Anblick des Himmels zeigt, dass die Himmelskugel sich täglich von Ost nach West um ihre Achse gleichförmig dreht. Thatsächlich dreht sich allerdings nicht der Himmel, sondern umgekehrt die Erde von West nach Ost um ihre mit der Himmelsachse identische Achse; da es sich aber für unsere Zwecke nur um die relative Bewegung der Himmelskörper gegen den Beobachtungspunkt handelt, behalten wir die dem Augenschein entsprechende Vorstellung der Himmelsdrehung von Ost nach West bei, wie in Fig. 2. angedeutet ist.

Fig. 2. Drehung des Himmels.



Diese gleichförmige Drehung der Erde um ihre Achse oder die entsprechende Drehung des Himmels ist das Grundmaass aller Zeitzählung; die zu einer vollen Umdrehung erforderliche Zeit heisst ein Sterntag (verschieden von dem gewöhnlichen, später zu betrachtenden Sonnentag).

Die Drehung des Himmels wird dem Beobachter wahrnehmbar durch die Verschiebung der Gestirne gegen die feste Erde, insbesondere durch die Bewegung gegen den Meridian, welchen man sich als verticale Wand materiell aufgerichtet oder als verticale Kippungsebene eines Theodolits zur Beobachtung eingerichtet denken kann.

Wenn ein Stern oder irgend ein Punkt des Himmels durch den Meridian eines Ortes geht, so sagt man, der Stern culminirt, oder der Durchgangsmoment heisst Culmination. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen desselben Himmelspunktes ist der bereits erwähnte Sterntag.

In der Culmination eines Sternes fällt sein Declinationskreis mit dem Meridian zusammen, oder der Winkel beider ist = Null; der Winkel, welchen in irgend einem anderen Momente der Declinationskreis des Sternes mit dem Ortsmeridian von Ost nach West bildet, heisst der Stundenwinkel des Sternes für den betreffenden Ort.

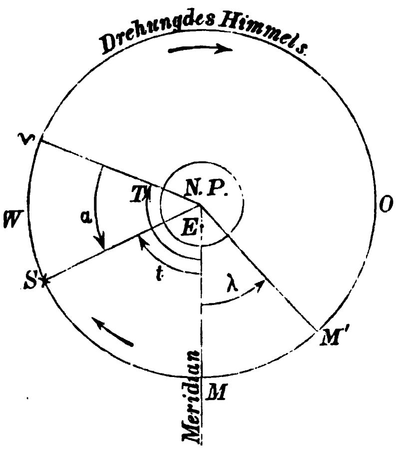
Wenn man die soeben gegebenen Erklärungen von Sternzeit und Stundenwinkel mit der vorher gegebenen Erklärung der Rectascension verbindet, wie in Fig. 3. geschehen ist, so findet man die wichtige Grundgleichung:

$$\left.\begin{array}{ccccc}\text{Sternzeit} & = & \text{Stundenwinkel} & + & \text{Rectascension.} \\ T & = & t & + & \alpha\end{array}\right\} \quad (1)$$

Es ist nämlich in Fig. 3. (S. 8) NP der Nordpol der Erde, E ein Erdpunkt und EM der Meridian dieses Punktes, ♈ der Widderpunkt, von

dessen Declinationskreis $N.P.\Upsilon$ aus die Rectascensionen α von West nach Ost gezählt werden, $N.P.S$ ist der Declinationskreis eines Sternes S. Die Grundgleichung (1) gestattet besondere Anwendungen:

Fig. 3.
Sternzeit T, Stundenwinkel t, Rectascension α.



1) $\alpha = 0$ gibt $T = t$, d. h. die Sternzeit ist gleich dem Stundenwinkel des Widderpunktes.

2) $t = 0$ gibt $T = \alpha$, d. h. wenn ein Stern culminirt, so ist die Sternzeit gleich der Rectascension dieses Sternes.

In Fig. 3. ist ausser dem Meridian M noch ein zweiter Meridian M' gezeichnet, für einen um die Länge λ weiter östlich gelegenen Ort; wenn für diesen die Sternzeit und der Stundenwinkel T' und t' sind, so bestehen die Gleichungen

$$T' = T + \lambda, \quad t' = t + \lambda \quad (2)$$

d. h. der Längenunterschied λ zweier Orte ist gleich der Differenz ihrer Sternzeiten, oder allgemeiner gleich der Differenz der Stundenwinkel irgend eines Himmelspunktes.

Man zählt die Zeiten und Längen zum Theil nach verschiedenem Maass, nämlich eine volle Umdrehung entweder = 24 Stunden = 144 Minuten = 8640 Secunden oder = 360° = $2160'$ = $129\,600''$, $1^{h} = 15^{\circ}$, $1^{m} = 15'$, $1^{s} = 15''$ etc.

Zur gegenseitigen Verwandlung dieser beiden Maasse dienen die Tafeln auf Seite [2] und [3] im Anhang, deren Anwendung ein Beispiel zeigen mag:

Der Längenunterschied zwischen Greenwich und Berlin $\lambda = 0^{h}\,53^{m}\,34{,}9^{s}$ soll in Bogenmaass verwandelt werden.

Seite [3] gibt	$0^{h}\,52^{m}$	=	13°
	$1^{m}\,34^{s}$	=	$23'\,30''$
	$0{,}9^{s}$	=	$13{,}5''$
	$0^{h}\,53^{m}\,34{,}9^{s}$	=	$13^{\circ}\,23'\,43{,}5''$

Rückverwandlung:

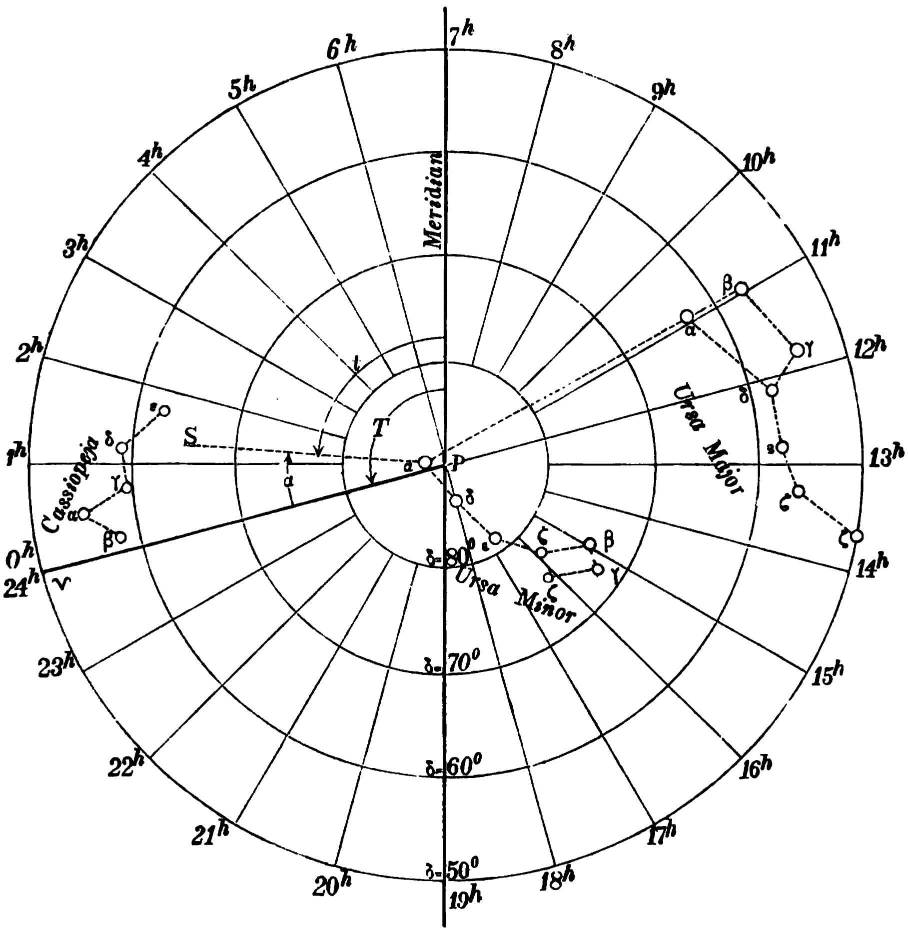
Seite [2] gibt	13°	=	$0^{h}\,52^{m}$
	$23'$	=	$1^{m}\,32^{s}$
	$43''$	=	$2{,}87^{s}$
	$0{,}5''$	=	$0{,}03^{s}$
	$13^{\circ}\,23'\,43{,}5''$	=	$0^{h}\,53^{m}\,34{,}90^{s}$

Sternkarten, Sternbilder und Sternbezeichnungen. Durch seine Rectascension α und Declination δ ist jeder Stern (für eine gewisse Zeit) mathematisch bestimmt. Durch graphische Darstellung dieser Coordinaten entstehen die Sternkarten, auf welchen sich die Sterne ebenso

gruppirt zeigen, wie am wirklichen Himmel. Die Fixsterne werden bekanntlich von Alters her in Gruppen — sog. „Sternbilder" — eingetheilt, und innerhalb der Gruppen mit Buchstaben und Nummern (bei den grösseren Sternen mit α β γ . . . anfangend) bezeichnet.

Die astronomischen Jahrbücher (vgl. § 6.) geben von einer grossen Zahl von Sternen die Coordinaten von Jahr zu Jahr, z. B. gibt das Berliner Jahrbuch für 1885 auf S. 172 u. ff. die Oerter für 622 Fixsterne und der Nautical Almanac für 1885 auf S. 289 u. ff. für 202 Sterne.

Fig. 4. Orientirung einer Sternkarte.



Trägt man diese Rectascensionen und Declinationen in irgend welcher, z. B. stereographischer Projection, auf, und füllt die Bilder etwa nach Argelander's Uranometria mit den noch fehlenden Sternen aus, so erhält

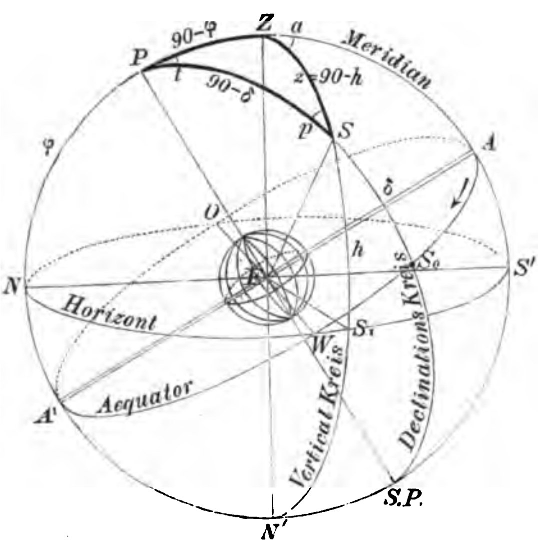
man eine richtige Sternkarte für die fragliche Zeit. (Verfasser hat so eine Sternkarte grossen Maassstabes hergestellt.)

Von gedruckten Sternkarten ist zu empfehlen: „Eckhardt's Sternkarte, 6. Auflage, Giessen, Verlag von Emil Roth", 48 cm Durchmesser mit Horizont zum Orientiren. Nach dieser Karte ist unsere Fig. 4. (S. 9) mit Darstellung der drei nördlichen Hauptsternbilder des Grossen und Kleinen Bären (Ursa Major und Ursa Minor) und der Cassiopeja, gezeichnet und zwar in solcher Orientirung, wie sie im Frühling Abends dem Himmelsanblick entspricht. *PS* ist der Declinationskreis des Polarsternes, α Ursae Minoris, welcher zu der angegebenen Zeit links vom Pol, etwas höher als der Pol steht. Der Stundenwinkel t, die Rectascension α*) des Polarsterns und die Sternzeit T sind ebenso eingeschrieben wie in Fig. 3., es ist jedoch zu beachten, dass in Fig. 3. der Himmel von oben, in Fig. 4. dagegen von unten (von der Erde aus) betrachtet angenommen ist.

§ 4. Das astronomische Dreieck.

Wir haben in § 2. und § 3. zwei sphärische Coordinatensysteme kennen gelernt, von denen das eine mit Azimut und Höhe sich auf die Erde, das zweite mit Rectascension und Declination sich auf den Himmel bezieht. Durch Vermittlung der Fundamentalgleichung (1) § 3. S. 7, Sternzeit = Stundenwinkel + Rectascension, werden die auf den Meridian bezogenen Elemente, und damit beide Systeme überhaupt, in Verbindung gebracht. Diese Verbindung ist in Fig. 1. veranschaulicht, welche insbesondere das wichtige astronomische Dreieck *ZPS* enthält, dessen Seiten und Winkel folgende sind:

Fig. 1. Beziehungen zwischen den irdischen und den himmlischen Coordinaten.



1) Seite $ZP = 90^0 - \varphi$, weil $NEP = \varphi$ die Breite des Beobachtungspunktes ist.

*) In Fig. 4 sind zweierlei Zeichen α angewendet, erstens das Zeichen für den Stern, α Ursae Minoris, zweitens die Rectascension α.

2) Seite $PS = 90^0 - \delta$, weil SS_0 die Declination δ des Sternes S ist.

3) Seite $ZS = z = 90^0 - h$ = Zenitdistanz oder Complement der Höhe, denn es ist $S_1ES = h$, die früher difinirte Höhe.

4) Winkel ZPS = Stundenwinkel t, als Winkel zwischen dem Meridian und dem Declinationskreis des Sternes.

5) Winkel $PZS = 180^0 - a$, wo a das Azimut oder der Winkel zwischen dem Meridian und dem Verticalkreis ist, hiebei ist das Azimut a von Süden über Westen gezählt.

6) Winkel $PSZ = p$ der sogenannte parallaktische Winkel, welcher bis jetzt noch nicht betrachtet worden ist und auch selten gebraucht wird.

Von den verschiedenen Aufgaben, zu deren Lösung das astronomische Dreieck gebraucht wird, behandeln wir hier die Bestimmung von Azimut und Höhe aus Stundenwinkel und Declination bei gegebener Breite. Zu diesem Zweck ist in Fig. 3. das astronomische Dreieck von Fig. 1. besonders herausgezeichnet, und zur Anbindung an die der Formelsammlung von S. 2—3 zu entnehmenden Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ist Fig. 2. daneben gestellt.

Fig. 2. Hülfsdreieck.

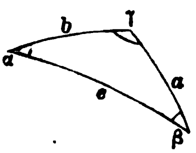
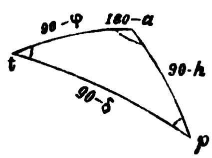


Fig. 3. Astronomisches Dreieck.



$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ gibt

$$\cos (90^0 - h) = \cos (90^0 - \varphi) \cos (90^0 - \delta) + \sin (90^0 - \varphi) \sin (90^0 - \delta) \cos t$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \qquad (1)$$

$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma$ gibt

$$\operatorname{tang} \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \sin t \operatorname{cotg} a$$

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} t \sin \varphi - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin t} \cos \varphi \qquad (2)$$

Durch diese zwei Gleichungen (1) und (2) werden h und a einzeln aus gegebenen φ, δ und t berechnet.

Zu (2) nehmen wir ein einfaches Zahlenbeispiel:
Gegeben $\varphi = 55^0$, $\delta = +20^0$, $t = 1^h = 15^0$

log cotg t	0.57 195	*Erg. log sin t*	0.58 700
log sin φ	9.91 336	*log cos φ*	9.75 859
log cotg t sin φ	0.48 531	*log tang δ*	9.56 107
			9.90 666

$$cotg\ t\ sin\ \varphi = 3{,}0571$$
$$\frac{tang\ \delta}{sin\ t}\ cos\ \varphi = 0{,}8066$$
$$cotg\ a = 2{,}2505 \qquad log\ cotg\ a\ 0{,}35\,228$$
$$a = 23^0\ 57' \qquad a = 23^0\ 57'$$

Ebenso kann man auch direct nach der Höhenformel (1) rechnen.

Die Formeln (1) und (2), und ähnliche, werden zuweilen durch Einführung von Hülfswinkeln deswegen umgeformt, weil die Ausrechnung den wiederholten Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt verlangt. Wir finden jedoch diesen Umstand unwesentlich. Ueberdies kann Jeder, welcher in diesem Uebergang ein Hinderniss findet, zur Vermeidung desselben sich der Additions- und Subtractionslogarithmen bedienen.

Dagegen ist es in dem Falle, dass nicht nur h oder a, sondern diese beiden Grössen zusammen verlangt werden, angezeigt, statt der Formeln (1) und (2) die Gauss'schen Formeln von S. 3 anzuwenden, dieselben lauten mit Anwendung auf Fig. 2.:

$$sin\ \frac{a}{2}\ cos\ \frac{\beta - \gamma}{2} = sin\ \frac{b + c}{2}\ sin\ \frac{\alpha}{2}$$
$$sin\ \frac{a}{2}\ sin\ \frac{\beta - \gamma}{2} = sin\ \frac{b - c}{2}\ cos\ \frac{\alpha}{2}$$
$$cos\ \frac{a}{2}\ cos\ \frac{\beta + \gamma}{2} = cos\ \frac{b + c}{2}\ sin\ \frac{\alpha}{2}$$
$$cos\ \frac{a}{2}\ sin\ \frac{\beta + \gamma}{2} = cos\ \frac{b - c}{2}\ cos\ \frac{\alpha}{2}$$

Zum Uebergang auf Fig. 3. hat man:

$$\beta = p,\ \gamma = 180^0 - a \qquad b = 90^0 - \varphi,\ c = 90^0 - \delta$$
$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{a - p}{2} \qquad \frac{b + c}{2} = 90^0 - \frac{\varphi + \delta}{2}$$
$$\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{a + p}{2} - 90^0 \qquad \frac{b - c}{2} = -\frac{\varphi - \delta}{2}$$
$$\frac{a}{2} = \frac{z}{2} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2}$$

$$sin\ \frac{z}{2}\ sin\ \frac{a + p}{2} = cos\ \frac{\varphi + \delta}{2}\ sin\ \frac{t}{2}$$
$$sin\ \frac{z}{2}\ cos\ \frac{a + p}{2} = sin\ \frac{\varphi - \delta}{2}\ cos\ \frac{t}{2}$$
$$cos\ \frac{z}{2}\ sin\ \frac{a - p}{2} = sin\ \frac{\varphi + \delta}{2}\ sin\ \frac{t}{2}$$
$$cos\ \frac{z}{2}\ cos\ \frac{a - p}{2} = cos\ \frac{\varphi - \delta}{2}\ cos\ \frac{t}{2}$$

Indem man nun bei der Division die Zähler und Nenner $Z\ N\ Z'\ N'$ besonders heraushebt, hat man:

$$\left.\begin{aligned}
tang\,\frac{a+p}{2} &= \frac{\cos\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{Z}{N}\\
\sin\frac{z}{2} &= \frac{Z}{\sin\frac{a+p}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{a+p}{2}}\\
tang\,\frac{a-p}{2} &= \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{Z'}{N'}\\
\cos\frac{z}{2} &= \frac{Z'}{\sin\frac{a-p}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{a-p}{2}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Beispiel $\varphi = 55^0,\ \delta = +20^0,\ t = 1^h = 15^0.$

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2} &= 7^0\ 30'\\
\varphi+\delta &= 75^0\ 0'\\
\varphi-\delta &= 35^0\ 0'\\
\frac{\varphi+\delta}{2} &= 37^0\ 30'\\
\frac{\varphi-\delta}{2} &= 17^0\ 30'
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\log\cos\frac{\varphi+\delta}{2} & 9.89\,947 & \multirow{2}{*}{$9.01\,517 = \log Z$}\\
\log\sin\frac{t}{2} & 9.11\,570 & \\
\log\sin\frac{\varphi+\delta}{2} & 9.78\,445 & 8.90\,015 = \log Z'\\
 & & \\
\log\cos\frac{\varphi-\delta}{2} & 9.97\,942 & 9.97\,569 = \log N'\\
\log\cos\frac{t}{2} & 9.99\,627 & \\
\log\sin\frac{\varphi-\delta}{2} & 9.47\,814 & 9.47\,441 = \log N
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll|l}
\log Z & 9.01\,517 & \log Z' & 8.90\,015 & \frac{a+p}{2} = 19^0\ 9{,}3'\\
Erg.\log\sin \text{ od. } \cos & 0.02\,473 & Erg.\log\sin \text{ od. } \cos & 0.00\,153 & \frac{a-p}{2} = 4^0\,48{,}2'\\
\log N & 9.47\,441 & \log N' & 9.97\,569 & \\
\hline
\log tang\,\frac{a+p}{2} & 9.54\,076 & \log tang\,\frac{a-p}{2} & 8.92\,446 & a = 23^0\,57{,}5'\\
\log\sin\frac{z}{2} & 9.49\,914 & \log\cos\frac{z}{2} & 9.97\,722 & p = 14^0\,21{,}1'
\end{array}$$

$$\frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8' \qquad \frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8'$$

$$\begin{aligned}
z &= 36^0\ 47{,}6'\\
h &= 53^0\ 12{,}4'
\end{aligned}$$

Die Auswahl, ob *Erg. log sin* oder *cos* zu nehmen ist, dann die Entscheidung über den Quadranten nach Maassgabe der Vorzeichen von Zähler und Nenner, wird genau ebenso wie bei den elementaren Formeln der Polygonometrie getroffen (vgl. J. Handb. d. Verm. I S. 281).

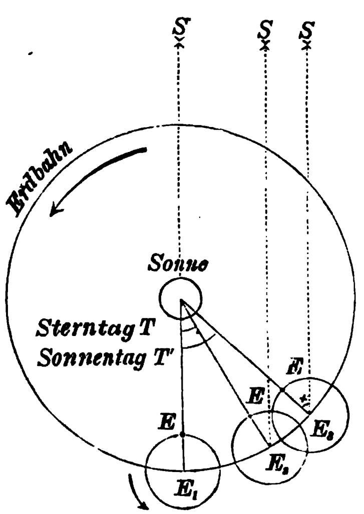
Nach diesen Formeln (1) (2) (3) ist die Tabelle der Azimute und Höhen für die Breiten 45° 50° 55° auf S. [15] des Anhangs berechnet worden, unter Annahme runder Werthe von δ und t. Auf die praktische Bedeutung dieser Resultate werden wir später zurückkommen.

§ 5. Sonnenzeit, Zeitgleichung.

Nach § 3. S. 8 kann der Stundenwinkel t eines beliebigen Himmelspunktes als Zeitmaass dienen, denn nach der Grundgleichung $T = t + \alpha$ sind T und t nur um ein constantes Stück α verschieden; vorausgesetzt ist aber hiebei, dass der fragliche Punkt S am Himmel fest, oder seine Rectascension α constant sei.

Aus diesem Grunde eignet sich die Sonne, welche eine eigene Bewegung am Himmel hat, nicht unmittelbar zur Zeitbestimmung, aus zwei Gründen: erstens ist ihre Rectascension α veränderlich, und zweitens ist diese Veränderung nicht gleichförmig, und zwar rührt diese Ungleichförmigkeit hauptsächlich davon her, dass die Bahn der Erde um die Sonne nicht ein Kreis, sondern eine Ellipse ist, und dass die Erdachse nicht rechtwinklig, sondern schief auf der Erdbahn steht. Man nimmt nun aber wegen der durch die Sonnenbewegung geregelten Tageszeiten diese Bewegung dennoch als Zeitmaass, indem man die Veränderung in Rechnung bringt.

Fig. 1. Sternzeit und Sonnenzeit.



Man versteht zunächst unter Sonnenzeit den Stundenwinkel der Sonne, und unter Sonnentag die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen der Sonne. Da aber aus den angegebenen Gründen die verschiedenen Sonnentage nicht gleich sind, also ein Sonnentag schlechtweg, ohne Datum, gar kein bestimmtes Zeitmaass ist, so hat man das Mittel aller Sonnentage eines Jahres als mittleren Sonnentag in die Zeitrechnung eingeführt, und dieser mittlere Sonnentag hat ein sehr einfaches Verhältniss zu dem Sterntag, welcher als erstes Zeitmaass in § 3. S. 7 erwähnt worden ist.

Um dieses Verhältniss zwischen mittlerem Sonnentag und Sterntag zu finden, betrachten wir in Fig. 1. die Bewegung der Erde um die Sonne unter der Vor-

aussetzung kreisförmiger Erdbahn, und rechtwinkliger Stellung der Erdachse auf der Erdbahn.

E_1 E_2 E_3 sind drei aufeinanderfolgende Lagen des Erdmittelpunktes auf seiner Bahn, wobei E jedesmal denselben Punkt der Erdoberfläche, also $E_1 E$, $E_2 E$, $E_3 E$ jedesmal denselben Meridian vorstellt.

Zwischen E_1 und E_2 sei ein Sterntag T verflossen, d. h. die Erde hat sich einmal vollständig um ihre Achse gedreht, so dass ein unendlich ferner Stern S, welcher in $E_1 E$ culminirt hat, auch in $E_2 E$ wieder culminirt. Nehmen wir nun an, in E_1 habe der Stern S gleichzeitig mit der Sonne culminirt, so wird dieses in E_2 nicht wieder der Fall sein, weil die Sonne nicht ebenfalls unendlich entfernt ist; vielmehr muss die Erde von E_2 noch eine Strecke nach E_3 laufen, bis auch die Sonne zur Culmination kommt, und der Sonnentag T' ist in demselben Verhältniss grösser als der Sterntag T, als die von E_1 bis E_3 abgelaufene Erdrotation eine volle Umdrehung überschreitet.

Also jedenfalls ist der Sonnentag T' grösser als der Sterntag T, und die Differenz sei:

$$T' - T = x \tag{1}$$

Das (siderische) Jahr J habe n Sterntage und n' Sonnentage, d. h.

$$J = nT = n'T' \tag{2}$$

Da sowohl die Drehung der Erde um ihre Achse als auch die Bewegung um die Sonne gleichförmig angenommen sind, besteht die Proportion

$$\frac{x}{T'} = \frac{T'}{J} \tag{3}$$

Diese 3 Gleichungen (1) (2) (3) sagen alles aus, was wir über die fraglichen Zeitverhältnisse wissen, und man berechnet nun aus (1) und (3)

$$T' - T = \frac{T\,T'}{J}$$

Dann wegen (2):

$$T' - T = \frac{T'}{n} = \frac{T}{n'} \tag{4}$$

Um aus diesen in (4) enthaltenen 2 Gleichungen T und T' zu eliminiren, bildet man:

$$T'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = T \text{ und } T\left(1 + \frac{1}{n'}\right) = T'$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

$$n = n' + 1 \tag{5}$$

d. h. die Anzahl n der Sterntage eines Jahres ist um 1 grösser als die Anzahl n' der mittleren Sonnentage.

Die Zahlenwerthe sind (nach den Tafeln des Nautical Almanac):

$$n' = 365{,}2422 \qquad n = 366{,}2422$$

$$T' - T = \frac{T}{n'} = \frac{24 \times 60 \times 60}{365{,}2422} = 236{,}5554^s = 3^m\ 56{,}5554^s$$

Sternzeit

$$T' - T = \frac{T'}{n} = \frac{24 \times 60 \times 60}{366,2422} = 235,9094^s = 3^m\ 55,9094^s$$

mittlere Sonnenzeit.

Zur gegenseitigen Verwandlung von mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit dienen unsere Hülfstafeln auf Seite [4] des Anhangs, wobei die Verwandlung in Form von Zuschlag oder Abzug ausgeführt wird. Hienach hat man z. B.

$7^h\ 19^m\ 0^s$ Sonnenzeit $= 7^h\ 19^m\ 0^s + 1^m\ 12,0^s + 0,2^s = 7^h\ 20^m\ 12,2^s$ Sternzeit

und umgekehrt

$7^h\ 20^m\ 12,2^s$ Sternzeit $= 7^h\ 20^m\ 12,2^s - 1^m\ 11,8^s - 0,3^s = 7^h\ 19^m\ 0,1^s$ Sonnenzeit.

Der Widerspruch $0,1^s$ in der Rückverwandlung rührt von Abrundungen her. Unsere Tafel Seite [4] soll in den Fällen gebraucht werden, in welchen 1^s die letzte Beobachtungseinheit ist und $0,1^s$ nur als letzte Rechnungsdecimale dient. Für genauere Zwecke hat man zahlreiche Tafeln, z. B. jeder Jahrgang des Nautical Almanac (vgl. § 6.) gibt etwa auf Seite 470 — 480 eine Reductionstafel für Sonnenzeit und Sternzeit auf $0,0001^s$ genau, ähnlich das Nautische Jahrbuch z. B. 1885 S. 202—203 auf $0,01^s$ genau und das Berliner astr. Jahrbuch für 1885 S. 366—367 in anderer Anordnung.

Bürgerliche und astronomische Zeitzählung.

Der bürgerliche Tag beginnt um Mitternacht und endigt in der folgenden Mitternacht. Die Zeit wird zweimal von 0^h bis 12^h gezählt. Die Zeit von Mitternacht bis Mittag heisst Vormittag (V), die Zeit von Mittag bis Mitternacht heisst Nachmittag (N). Der astronomische Tag beginnt um Mittag und endigt im folgenden Mittag. Die Zeit wird einmal von 0^h bis 24^h gezählt. Das Datum des astronomischen Tages entspricht dem Nachmittag des auf ihn fallenden bürgerlichen Tages. Z. B. ist 1885 März 1. $4^h\ 27^m\ 16^s$ N. bürgerliche Zeit = 1885 März 1. $4^h\ 27^m\ 16^s$ astronomische Zeit; dagegen 1885 März 1. $7^h\ 16^m\ 38^s$ V. bürgerliche Zeit = 1885 Februar 28. $19^h\ 16^m\ 38^s$ astronomische Zeit.

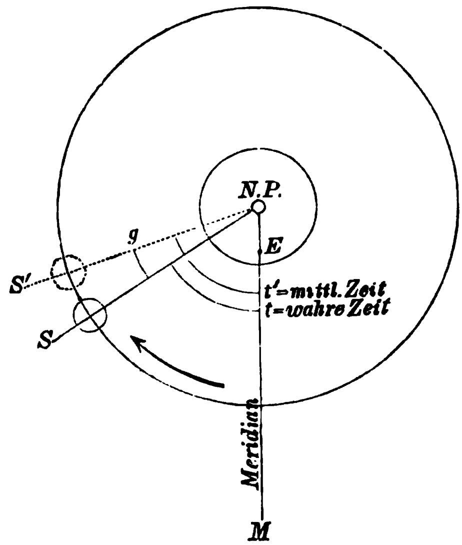
Im Folgenden ist nach Umständen die eine oder andere Zeitzählung gewählt.

Die Originalbeobachtungen schreiben wir immer in bürgerlicher Zeit, zumal auch die astronomischen Uhren keine Bezifferung über 12^h hinaus haben.

Zeitgleichung. Die soeben behandelte mittlere Sonnenzeit ist ein willkürlich eingeführtes, fingirtes, aber gleichförmiges Zeitmaass; es entspricht der gleichförmigen, von der gesammten Himmelsbewegung verschiedenen Bewegung einer fingirten Sonne S' im Himmelsäquator (Fig. 2.),

welche jedoch von der wahren Sonne S im Sinne des Stundenwinkels sich nicht weit entfernt. Indem wir nun von der Betrachtung der Bewegung der Erde um die Sonne, welche in Fig. 1. behandelt wurde, wieder zu der scheinbaren Bewegung der Sonne um die Erde zurückkehren, haben wir in Fig. 2.:

Fig. 2. Zeitgleichung g.



t' = mittlere Sonnenzeit = Stundenwinkel der fingirten Sonne.

t = wahre Sonnenzeit = Stundenwinkel der wahren Sonne.

Die Differenz $t' - t$ heisst die Zeitgleichung g, welche algebraisch aufgefasst, bald positiv, bald negativ ist, und in Bezug auf das Vorzeichen (nach dem Berliner astr. Jahrbuch) so angenommen wird:

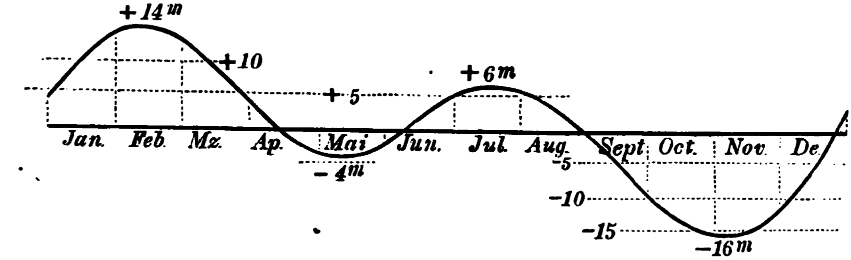
$$\text{Zeitgleichung} = \text{Mittlere Zeit} - \text{Wahre Zeit}$$

$$g = t' - t \qquad (6)$$

$$\text{oder } t' = t + g \qquad (7)$$

Hiernach erscheint die Zeitgleichung als Correction der wahren Zeit, um daraus die mittlere Zeit abzuleiten. Die extremen Werthe der Zeitgleichung sind $+ 14^m$ im Februar und $- 16^m$ im October. Den weiteren Verlauf zeigt die in Fig. 3. gegebene Zeitgleichungs-Curve, welche auf 1 Minute genau für die folgenden Jahre constant bleibt (vergl. S. [14]).

Fig. 3. Curve der Zeitgleichung.



Die in den Winter fallenden grossen Beträge $- 16^m$ und $+ 14^m$ der Zeitgleichung machen sich in der bürgerlichen Zeitrechnung wohl bemerklich, z. B. am 15. Februar ist in Berlin die halbe Tageslänge $= 4^h\,56^m$, es ist also:

Sonnenaufgang = $7^h\ 4^m$ Vormittags Wahre Zeit,
Mittag = $12^h\ 0^m$ Wahre Zeit,
Sonnenuntergang = $4^h\ 56^m$ Nachmittags Wahre Zeit.

Dagegen in mittlerer Zeit wegen der Zeitgleichung $+ 14^m$:

Sonnenaufgang = $7^h\ 18^m$ Vormittags Mittlere Zeit,
Mittag = $12^h\ 14^m$ Nachmittags Mittlere Zeit,
Sonnenuntergang = $5^h\ 10^m$ Nachmittags Mittlere Zeit.

Da die Uhren nach mittlerer Zeit gehen, ist am 15. Februar der nominelle Vormittag um 28 Minuten, nämlich um den doppelten Zeitgleichungsbetrag kürzer als der nominelle Nachmittag.

Für alle Beobachtungen, welche sich auf die Sonnenculmination beziehen, merke man sich:

$$\text{Culmination} = 12^h + g, \text{ mittlere Zeit,} \tag{8}$$

wo g die Zeitgleichung mit dem algebraischen Vorzeichen des Berliner Jahrbuchs nach (7) bedeutet.

§ 6. Die Angaben des astronomischen Jahrbuchs. Zeitverwandlung.

Zur weiteren Verfolgung unserer Aufgaben bedürfen wir der Angaben eines astronomischen Jahrbuchs, welches für den praktischen Astronomen eine ähnliche Rolle spielt, wie z. B. für den praktischen Trigonometer eine logarithmisch-trigonometrische Tafel, indem deren Zahlenangaben schlechthin als gegeben betrachtet werden, ohne dass der Praktiker im Stande wäre, sie sich selbst zu verschaffen.

Die für uns wichtigsten, zum Theil schon auf S. 2 und S. 16 erwähnten, Werke dieser Art sind:

1) Berliner Astronomisches Jahrbuch, herausgegeben von der königlichen Sternwarte zu Berlin, unter Redaction von W. Förster und F. Tietjen. Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung, Harrwitz und Gossmann (Preis 12 Mark). Erscheint jeweils 2—3 Jahre zum Voraus.

2) The Nautical Almanac and astronomical ephemeris for the meridian of the royal observatory at Greenwich. Published by order of the Lords Commissioners of the admirality. London. Price two shillings and sixpence. (Im deutschen Buchhandel Preis 3 Mk. 75 Pf.) Erscheint jeweils 4 Jahre zum Voraus.

3) Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen, herausgegeben vom Reichsamt des Innern, unter Redaction von Prof. Dr. Tietjen. Berlin, Carl Heymann's Verlag. (Preis 1 Mk. 50 Pf.) Erscheint jeweils 3 Jahre zum Voraus.

Das „Nautische Jahrbuch“ ist im Wesentlichen ein deutscher Auszug aus dem englischen „Nautical Almanac“.

Wir nennen noch die „Connaissance des temps“ und die „American Ephemeris“, welche jedoch für uns weniger Interesse haben.

Jeder, der sich praktisch mit astronomischen Messungen und Berech-

nungen beschäftigen will, muss ein astronomisches Jahrbuch unbedingt haben, wozu dem Anfänger das sehr billige Nautische Jahrbuch und für weiteren Gebrauch der reichhaltigere Nautical Almanac zu empfehlen ist. Das Berliner Astronomische Jahrbuch dient mehr theoretischen Zwecken, enthält aber auch alles für unsere Zwecke wesentlich Erforderliche, dazu für populären Gebrauch die Aufgänge und Untergänge von Sonne und Mond für Berlin (B. J. 1885 S. 74—79). Die Rectascension und Declination der Sonne, und die Zeitgleichung gibt das Berliner Jahrbuch nur für den wahren Mittag, der Nautical Almanac für den. wahren und für den mittleren Mittag.

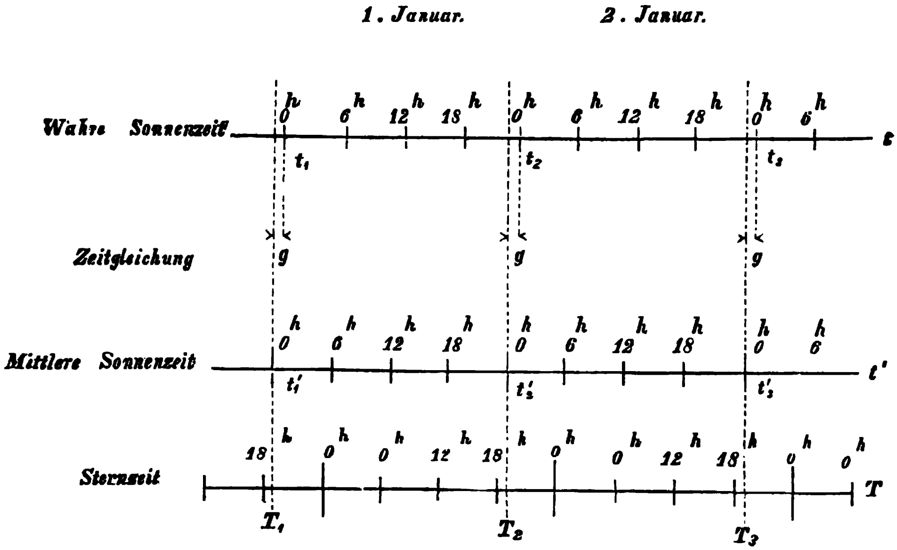
Die Angaben der Jahrbücher beziehen sich auf den Meridian ihrer Sternwarte (Berlin, Greenwich etc.); für jeden anderen Ort ist Zeitverwandlung erforderlich.

Wir haben dreierlei Zeiten kennen gelernt: Sternzeit, mittlere Sonnenzeit, wahre Sonnenzeit, welche ausserdem noch für jeden Meridian wieder verschieden sind. Die Aufgaben der Zeitverwandlung sind zweierlei:

1) Verwandlung von Zeitintervallen,
2) Verwandlung von Zeitpunkten.

Die Verwandlung von Zeitintervallen kann nur Sternzeit und mittlere Sonnenzeit betreffen, weil wahre Sonnenzeit ohne Angabe eines Zeitpunktes gar kein bestimmtes Zeitmaass ist. Die Verwandlung von Intervallen mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit ist bereits auf S. 8 mit den Hülfstafeln S. [4] erledigt. Wir gehen daher zur Verwandlung der Zeitpunkte über.

Fig. 1. Gegenseitige Verwandlung der Zeiten.



In Fig. 1. sind die drei Zeiten durch geradlinige Theilungen veranschaulicht. Die Theilungen für mittlere Sonnenzeit und für Sternzeit sind

$$\begin{aligned} \cotg t \sin \varphi &= 3{,}0571 \\ \frac{\tang \delta}{\sin t} \cos \varphi &= 0{,}8066 \\ \cotg a &= 2{,}2505 \qquad \log \cotg a \; 0{,}35\,228 \\ a &= 23^0\ 57' \qquad a = 23^0\ 57' \end{aligned}$$

Ebenso kann man auch direct nach der Höhenformel (1) rechnen.

Die Formeln (1) und (2), und ähnliche, werden zuweilen durch Einführung von Hülfswinkeln deswegen umgeformt, weil die Ausrechnung den wiederholten Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt verlangt. Wir finden jedoch diesen Umstand unwesentlich. Ueberdies kann Jeder, welcher in diesem Uebergang ein Hinderniss findet, zur Vermeidung desselben sich der Additions- und Subtractionslogarithmen bedienen.

Dagegen ist es in dem Falle, dass nicht nur h oder a, sondern diese beiden Grössen zusammen verlangt werden, angezeigt, statt der Formeln (1) und (2) die Gauss'schen Formeln von S. 3 anzuwenden, dieselben lauten mit Anwendung auf Fig. 2.:

$$\begin{aligned} \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} &= \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} &= \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Zum Uebergang auf Fig. 3. hat man:

$$\beta = p,\quad \gamma = 180^0 - a \qquad b = 90^0 - \varphi,\quad c = 90^0 - \delta$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{a-p}{2} \qquad \frac{b+c}{2} = 90^0 - \frac{\varphi+\delta}{2}$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a+p}{2} - 90^0 \qquad \frac{b-c}{2} = -\frac{\varphi-\delta}{2}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{z}{2} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin\frac{z}{2}\sin\frac{a+p}{2} &= \cos\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{z}{2}\cos\frac{a+p}{2} &= \sin\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2} \\ \cos\frac{z}{2}\sin\frac{a-p}{2} &= \sin\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{z}{2}\cos\frac{a-p}{2} &= \cos\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2} \end{aligned}$$

Indem man nun bei der Division die Zähler und Nenner $Z\,N\,Z'\,N'$ besonders heraushebt, hat man:

$$\left.\begin{aligned}
tang\,\frac{a+p}{2} &= \frac{\cos\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{Z}{N} \\
\sin\frac{z}{2} &= \frac{Z}{\sin\frac{a+p}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{a+p}{2}} \\
tang\,\frac{a-p}{2} &= \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\
\cos\frac{z}{2} &= \frac{Z'}{\sin\frac{a-p}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{a-p}{2}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Beispiel $\varphi = 55^0$, $\delta = +\,20^0$, $t = 1^h = 15^0$.

$\frac{t}{2} = 7^0\ 30'$

$\varphi + \delta = 75^0\ 0'$

$\varphi - \delta = 35^0\ 0'$

$\frac{\varphi+\delta}{2} = 37^0\ 30'$

$\frac{\varphi-\delta}{2} = 17^0\ 30'$

$\log\cos\frac{\varphi+\delta}{2}$	9.89 947	9.01 517 = $\log Z$
$\log\sin\frac{t}{2}$	9.11 570	
$\log\sin\frac{\varphi+\delta}{2}$	9.78 445	8.90 015 = $\log Z'$
$\log\cos\frac{\varphi-\delta}{2}$	9.97 942	9.97 569 = $\log N'$
$\log\cos\frac{t}{2}$	9.99 627	
$\log\sin\frac{\varphi-\delta}{2}$	9.47 814	9.47 441 = $\log N$

$\log Z$	9.01 517	$\log Z'$	8.90 015
Erg. $\log\sin$ od. $\cos$	0.02 473	Erg. $\log\sin$ od. $\cos$	0.00 153
$\log N$	9.47 441	$\log N'$	9.97 569
$\log tang\frac{a+p}{2}$	9.54 076	$\log tang\frac{a-p}{2}$	8.92 446
$\log\sin\frac{z}{2}$	9.49 914	$\log\cos\frac{z}{2}$	9.97 722

$\frac{a+p}{2} = 19^0\ 9{,}3'$

$\frac{a-p}{2} = 4^0\ 48{,}2'$

$a = 23^0\ 57{,}5'$

$p = 14^0\ 21{,}1'$

$\frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8'$ $\qquad$ $\frac{z}{2} = 18^0\ 23{,}8'$

$z = 36^0\ 47{,}6'$

$h = 53^0\ 12{,}4'$

Beispiel. Für 2. Januar 1885, Vormittags $7^h\ 19^m\ 52^s$ mittlere Hannoveraner Ortszeit soll die Hannoveraner Sternzeit bestimmt werden.

Zuerst verschafft man sich die Länge λ (wenn andere Mittel fehlen, durch Abstechen aus einer Karte), in unserem Falle ist:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hannover, technische Hochschule, } \lambda = +\ 0^h\ 38^m\ 52{,}5^s \text{ östlich} \\ \text{von Greenwich}\end{array}\right\} \quad (4)$$

hiezu nimmt man aus der Tafel I S. [4] $5{,}9^s + 0{,}5^s = 6{,}4^s$ und zwar nach (3) betreffs des Vorzeichens

$$(\varDelta\,\lambda) = -\ 6{,}4^s. \quad (5)$$

(Die zwei Werthe λ und $(\varDelta\lambda)$ notire man sich ein für alle Mal in seinem Jahrbuch.)

Nun gibt der Nautical Almanac für 1. Januar 1885

T	$=$	18^h	45^m	$12{,}4^s$	
hiezu $(\varDelta\lambda)$	$=$		$-$	$6{,}4^s$	
$T + (\varDelta\lambda)$	$=$	18^h	45^m	$6{,}0^s$	
$7^h\ 19^m\ 52^s$ Vormittag gibt t'	$=$	19^h	19^m	$52{,}0^s$	
Die Tafel I. S. [4] gibt für $19^h\ 18^m$	$=$		3^m	$10{,}2^s$	
„ $1^m\ 52^s$ oder rund 2^m	$=$			$0{,}3^s$	
Hannoveraner Sternzeit S	$=$	38^h	8^m	$8{,}5^s$	(6)
oder nach der bei (1) gemachten Bemerkung, Weglassung von		24^h			
S	$=$	14^h	8^m	$8{,}5^s$	(7)

Die vorstehende Aufgabe, Bestimmung der Sternzeit, wird hauptsächlich gebraucht, um mittelst der Grundgleichung (1) § 3. S. 7 den Stundenwinkel eines Gestirns von bekannter Rectascension zu bestimmen, nämlich

$$\text{Stundenwinkel} = \text{Sternzeit} - \text{Rectascension} \quad (8)$$

Die umgekehrte Aufgabe, nämlich Bestimmung der mittleren Orts-(Sonnen-)Zeit aus bekannter Ortssternzeit, löst man ebenfalls mittelst der Gleichung (3), nämlich zunächst:

$$t' + \varDelta\,t' = S - (T + (\varDelta\,\lambda)),$$

wo $t' + \varDelta\,t'$ der gesuchte Werth in Einheiten von Sternzeit ist, weshalb man auf Sonnenzeit überzugehen hat durch Abzug von $\varDelta\,t'$ nach der Tafel II. von S. [4], also

$$t' = S - (T + (\varDelta\,\lambda)) - \varDelta\,t'. \quad (9)$$

Umkehrung des ersten Beispiels: Gegeben Hannover, 1. Januar 1885, $14^h\ 8^m\ 8{,}5^s$ Sternzeit. Gesucht die entsprechende mittlere Hannoveraner Sonnenzeit.

Der Nautical Almanac gibt zuerst (wie beim ersten Beispiel) Sternzeit im mittleren Greenw. Mittag $T = 18^h\ 45^m\ 12{,}4^s$

östlich von Greenwich $(\varDelta\,\lambda) = -\qquad 6{,}4^s$

$$T' = T + (\varDelta\,\lambda) = 18^h\ 45^m\ 6{,}0^s$$

Dieses ist von dem gegebenen $S = 14^h\ 8^m\ 8{,}5^s$ abzuziehen, welches wir jedoch, um negative Zeitwerthe zu vermeiden, zuvor um 24^h vergrössern, also:

$$S = 38^h\ 8^m\ 8{,}5^s$$

$$t' + \Delta t' = S - T' = 19^h\ 28^m\ 2{,}5^s$$

Die Tafel II. S. [4] gibt für $19^h\ 18^m$: $3^m\ 9{,}7^s$
für 5^m: $0{,}8^s$ } $-\ 3^m\ 10{,}5^s$

$$t' = 19^h\ 19^m\ 52{,}0^s$$

d. h. wieder der Ausgangswerth des ersten Beispiels.

Bei all' diesen Rechnungen braucht man den Werth $(\Delta\lambda)$, welchen man deshalb, wie schon bei (5) bemerkt wurde, für seinen Beobachtungsort und das benützte Jahrbuch, ein für alle Mal notirt. Das Sternwartenverzeichniss des Berliner Astronomischen Jahrbuchs (etwa S. 368—371) gibt die von uns mit $(\Delta\lambda)$ bezeichneten Werthe unter der Benennung: „Sternzeit im mittleren Mittag weniger Sternzeit im mittleren Berliner Mittag“. Als Beispiel diene:

Hannover, techn. Hochschule

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = 0^h\ 38^m\ 52{,}5^s \text{ östl. v. Greenwich} & (\Delta\lambda) = -\ 6{,}4^s \\ \lambda = 0^h\ 14^m\ 42{,}4^s \text{ westl. v. Berlin} & (\Delta\lambda) = +\ 2{,}4^s \end{array}\right\} \quad (10)$$

Das Berliner Jahrbuch 1885, S. 369 gibt unmittelbar

Greenwich $\lambda = 0^h\ 53^m\ 34{,}9^s$ westlich von Berlin $(\Delta\lambda) = +\ 8{,}8^s$,

was als Controlle von (10) dient.

Die Benutzung verschiedener Jahrbücher muss natürlich dasselbe Resultat geben, und nur der erste Theil der Rechnung $T + (\Delta\lambda)$ ist verschieden. Rechnet man das vorstehende Beispiel mit dem Berliner Jahrbuch, so hat man

$$\begin{array}{rl} \text{Sternzeit im mittleren Berliner Mittag } T = & 18^h\ 45^m\ 3{,}6^s \\ (\Delta\lambda) = & +\ 2{,}4^s \\ \hline T + (\Delta\lambda) = & 18^h\ 45^m\ 6{,}0^s \end{array}$$

d. h. dasselbe wie oben; die übrige Rechnung ändert sich nicht.

Bei der Ermittelung irgend eines anderen Werthes aus dem Jahrbuch hat man stets die betreffende Greenwicher Zeit als Argument zu nehmen. Es soll z. B. am 1. März 1885, $6^h\ 42^m$ Nachmittags mittlere Hannoveraner Zeit die Declination der Sonne gefunden werden. Man hat

$$\begin{array}{ll} \text{Mittlere Hannoveraner Zeit} & = 6^h\ 42^m \\ \text{Länge gegen Greenwich} & -\ 0^h\ 39^m \\ \hline \text{Mittlere Greenwicher Zeit} & \ 6^h\ \ 3^m = 6{,}05^h \end{array}$$

Nautical Almanac für 1885, S. 39 gibt für 1. März $\delta = -\ 7^0\ 24'\ 12''$
stündliche Aenderung (S. 38) $+ 57{,}1'' \times 6{,}05 = + 345'' = \quad + 5'\ 45''$

für $6^h\ 42^m$ Hannoveraner Zeit $\delta = -\ 7^0\ 18'\ 27''$

Wie genau man die Greenwicher Zeit zur Entnahme irgend eines Werthes haben muss, hängt von der Aenderung ab. Z. B. die Sonnendeclination ändert sich höchstens in einer Stunde um 1′, wenn man also 1″ noch sicher haben will, muss die Zeit auf eine Minute genau bekannt sein.

Interpolation. In den meisten Fällen genügt einfache Proportional-Interpolation; in seltenen Fällen müssen zweite Differenzen berücksichtigt werden. Die Interpolationsformel hiefür heisst:

$$y = y_n + z\,\Delta\,y_n - \frac{z\,(1 - z)}{2}\,\Delta^2\,y_n \qquad (11)$$

wo y_n der nächstvorhergehende Funktionswerth ist, $\Delta\,y_n$ die zugehörige erste Differenz und $\Delta^2\,y_n$ die zweite Differenz. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Interpolation in die Mitte und in beide Drittel.

$$\text{Ist } z = \frac{1}{2}, \text{ so wird } \frac{z\,(1 - z)}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\text{Ist } z = \frac{1}{3} \text{ oder } = \frac{2}{3}, \text{ so wird } \frac{z\,(1 - z)}{2} = \frac{1}{9} = 0{,}111$$

Als Beispiel für letzteren Fall diene Folgendes: Nautical Almanac für 1883, S. 122 gibt die Sonnen-Monddistanz am 13. Juli:

		Differenzen	
III^h	104° 6′ 45″		
		+ 1° 21′ 45″	
VI^h	105° 28′ 30″		+ 4″
		+ 1° 21′ 49″	
IX^h	106° 50′ 19″		+ 6″
		+ 1° 21′ 55″	
Mitternacht	108° 12′ 14″		

für 7^h und 8^h findet man zunächst durch Dritttheilung der ersten Differenz 1° 21′ 49″:

	6^h	105° 28′ 30″	6^h	105° 28′ 30″
		+ 27′ 16,3″		+ 54′ 32,7″
		105° 55′ 46,3″		106° 23′ 2,7″
hiezu $-\frac{1}{9}$ 5″		− 0,6″		− 0,6″
	7^h	105° 55′ 45,7″	8^h	106° 23′ 2,1″

die Zusammenstellung mit den begrenzenden Werthen für 6^h bis 9^h gibt jetzt:

		Differenzen	
6^h	105° 28′ 30,0″		
		27′ 15,7″	
7^h	105° 55′ 45,7″		+ 0,7″
		27′ 16,4″	
8^h	106° 23′ 2,1″		+ 0,5″
		27′ 16,9″	
9^h	106° 50′ 19,0″		

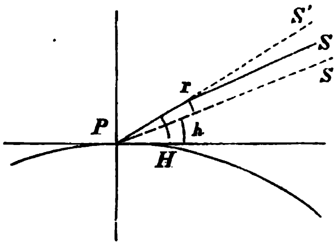
Die zweite Differenz beträgt jetzt nur noch 0,6″, also ihr Maximaleinfluss bei der Interpolation 0,1″, man kann also von hier an schlechthin mit ersten Differenzen weiter interpoliren.

Was weiter über die Benutzung des Jahrbuchs, Interpolation etc. zu sagen ist, werden wir am betreffenden Ort besonders behandeln.

§ 7. Refraction.

Wegen der ungleichen Dichte der Schichten der Atmosphäre kommen die Lichtstrahlen von den Himmelskörpern zu einem Erdpunkte nicht in geraden Linien, sondern in nach unten concaven Curven, so dass ein Beobachter in P (Fig. 1.) ein Gestirn S in der Tangentenrichtung S' zu sehen glaubt. Hiebei heisst:

Fig. 1. Refraction.



H die scheinbare Höhe,
h die wahre Höhe,
$H - h = r$ die Refraction.

Die beiden in der Figur mit S bezeichneten Punkte sind als unendlich entfernt angenommen, und sind daher für den Beobachtungspunkt T als zusammenfallend zu betrachten. Ohne auf die Refractionstheorie einzugehen, betrachten wir hier nur deren praktische Anwendung und namentlich die dazu nöthigen Refractionstafeln.

Um zuerst einen Ueberblick über die Verhältnisse zu gewinnen, betrachten wir einige Hauptwerthe in runden Zahlen.

Scheinbare Höhe H	Refraction r	Scheinbare Höhe H	Refraction r
0°	35'	20°	3'
2°	18'	30°	2'
5°	10'	45°	1'
10°	5'	60°	0,5'
20°	3'	90°	0'

Die Refraction ist nicht von der Höhe allein abhängig, sondern auch von der Temperatur der Luft und von dem Druck der Luft (und von der Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, wovon jedoch hier nicht die Rede ist). Diejenige Refraction, welche bei einer Lufttemperatur von 9,3° C. und bei einem (auf 0° reducirten) Barometerstand von 751,5 ^{mm} stattfindet, nennt man nach Bessel's Annahme, die m i t t l e r e R e f r a c t i o n. Die Bessel'schen Refractionstafeln sind enthalten in dem Werke „Tabulae regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae, auctore Friderico Wilhelmo Bessel, Regiomontani Prussorum, 1830“, S. 538 — 542 und S. LIX — LXIII. Diese Tafeln sind von da in eine Menge Bücher übergegangen.

Wir haben nun zunächst nach den Bessel'schen Original-Tafeln unsere ausführliche Tafel der mittleren Refraction auf S. [5] bis [7] berechnet, und da für grössere Höhen die Refraction nahezu der Cotangente der scheinbaren Höhe proportional ist, nämlich

$$r_m = \alpha \operatorname{cotg} H, \tag{1}$$

gibt S. [12] als Auszug aus Bessel's Originaltafel die Werthe $\log \alpha$ als Function von H, von 10° an.

Wir haben also für die Bestimmung der mittleren Refraction r_m zwei Hülfsmittel, wie ein Beispiel zeigen mag:

Scheinbare Höhe $H = 19^0\ 30'$ gibt

1) nach S. [7] $r_m = 2'\ 42''$

2) nach S. [12] $\log\ \alpha = 1.7575$

hiezu $\log\ cotg\ 19^0\ 30' = 0.4509$

$\log\ r_m = 2.2084 \quad r_m = 161{,}6''$

$= 2'\ 41{,}6''$ wie bei 1).

Es handelt sich nun um die Refraction bei einer anderen Temperatur t als der Normaltemperatur $9{,}3^0$ und bei anderem Barometerstand als 751,5 mm, und hiezu dient bei grösseren Höhen der Satz, dass die Refraction der Dichte der Luft proportional ist, d. h. nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz ist:

$$r = r_m \frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + t\ \varepsilon} \frac{Q_0}{751{,}5} \tag{2}$$

wo $\varepsilon = 0{,}003665$ der Ausdehnungs-Coefficient der Luft für 1^0 C., und Q_0 der auf 0^0 reducirte Quecksilberbarometerstand ist. Zur Ausrechnung von (2) könnte man sich der barometrischen Hülfstafeln bedienen (Handb. der Verm. Band I S. 516), weil auch bei der barometrischen Höhenmessung solche Ausdrücke vorkommen, bequemer aber ist es, für die beiden Quotienten in (2) besondere Hülfstafeln anzulegen. Wir setzen nach Bessel's Bezeichnung

$$\frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + \varepsilon\ t} = \gamma \text{ und } \frac{Q_0}{751{,}5} = B \tag{3}$$

stellen die Werthe $\log\ \gamma$ und $\log\ B$ in der Tafel S. [12] zusammen, und haben nun:

$$r = r_m \times \gamma \times B \tag{4}$$

oder wegen (1)

$$r = \alpha\ cotg\ H \times \gamma \times B \tag{5}$$

z. B. $H = 30^0$, $t = 28^0$, $Q_0 = 702$ mm gibt nach der Tafel S. [12] folgende logarithmische Rechnung:

$H = 30^0$ gibt $\log\ \alpha = 1.7600$

$\log\ cotg\ H = 0.2386$

$t = 28^0$ gibt $\log\ \gamma = -\ 0{,}0277 = 9.9723 - 10$

$Q_0 = 702$ mm gibt $\log B = -\ 0{,}0296 = 9.9704 - 10$

$\log r = 1.9413 \qquad r = 87{,}4'' = 1'\ 27{,}4''$ (6)

Die Formel (2) gilt aber nur für grössere Höhen, etwa über 25^0 oder 30^0; für kleinere Höhen kommen noch Exponenten λ und A zu den Quotienten von (2), so dass dann die Gesammtformel heisst:

$$r = r_m \left(\frac{1 + 9{,}3\ \varepsilon}{1 + \varepsilon\ t}\right)^{\lambda} \left(\frac{Q_0}{751{,}5}\right)^{A} \tag{7}$$

oder logarithmisch, mit Einführung von (3)

$$log\ r = log\ r_m + \lambda\ log\ \gamma + A\ log\ B \qquad (8)$$

oder auch mit Einsetzung von (1)

$$log\ r = log\ (\alpha\ cotg\ H) + \lambda\ log\ \gamma + A\ log\ B \qquad (9)$$

Die Bessel'sche Originalformel hat statt des letzten Gliedes $A\ log\ B$ das folgende

$$A\ (log\ B + log\ T),$$

wo T ein Correctionsfactor für Reduction des Quecksilberbarometers auf 0° ist; da wir jedoch angenommen haben, dass der in die Rechnung eingehende Barometerstand Q_0 bereits auf 0° reducirt sei, so fällt in unserer Formel (8) oder (9) das Bessel'sche $log\ T$ fort. Es ist formell und sachlich besser, die Reduction auf 0° des Quecksilbers nicht in die Refractionsformel aufzunehmen, denn es bestehen anderweitige bequeme Reductionstafeln hiefür (z. B. Handbuch der Verm. I. Band S. 508—510), welche zudem noch die Ausdehnung des Maasstabes mit berücksichtigen; ferner kommt es häufig vor, dass man den Barometerstand gar nicht direct am Quecksilberbarometer abliest, sondern an einem Aneroidbarometer, welches seine besonderen Correctionen hat.

Wir nehmen ein Beispiel zu (8) mit kleinerer Höhe

$$H = 2^0\ 30',\ t = 28^0,\ Q_0 = 702\ \text{mm}$$

S. [5] und S. [12] geben:

$$r_m = 16'\ 1'' = 961'',\ log\ r_m = 2.9827$$
$$log\ \gamma = -0.0277,\ \lambda = 1{,}26,\ \lambda\ log\ \gamma = -\ 0.0849 = 9.9651 - 10$$
$$log\ B = -\ 0.0296\ A = 1{,}03,\ A\ log\ B = -\ 0.0305 = 9.9695 - 10$$
$$log\ r = 2.9173$$
$$r = 827'' = 13'\ 47'' \qquad (10)$$

Diese logarithmische Rechnung ist aber immer noch etwas umständlich, weshalb wir, mit einem kleinen Opfer an Genauigkeit, auf S. [8] bis [11] directe Correctionen der mittleren Refraction für Temperatur und Barometerstand berechnet haben. Diese Correctionen entsprechen der Formel (7), welche man sich auf die Form gebracht denken kann:

$$r = r_m\ (1 + x)\ (1 + y) = r_m + r_m\ x + r_m\ y + r_m\ xy \qquad (11)$$

Nun gibt die Tafel S. [8] und [9] die Correction $r_m\ x$, die Tafel S. [10] und [11] gibt $r_m\ y$ und das kleine Glied $r_m\ xy$ wird vernachlässigt, wenn man es nicht etwa besonders berechnen will.

Wir behandeln das Beispiel (6) nach den Tafeln S. [5] bis [11]

$$H = 30^0,\ t = 28^0,\ Q_0 = 702\ \text{mm}$$
$$\text{S. [7] gibt } r_m = 1'\ 40''$$
$$\text{S. [9] für } H = 30^0\ t = 28^0\ Corr = -\ 6''$$
$$\text{S. [11] für } H = 30^0\ Q_0 = 702\ Corr = -\ 7''$$
$$r = 1'\ 27'' \text{ wie bei (6).} \qquad (12)$$

Das zweite Beispiel (10) ist

$$H = 2^0\ 30',\ t = 28^0,\ Q_0 = 702.\text{mm}$$

$$\begin{aligned} \text{S. [5] gibt für } 2^0\ 30'\ r_m &= \quad 16'\ 1'' \\ \text{S. [8] mit } H = 2^0\ 30' \text{ und } t = 28^0 \text{ gibt } Corr. &= -1'\ 14'' \\ \text{S. [10] mit } H = 2^0\ 30^0 \text{ mm und } Q_0 = 702 \text{ mm gibt } Corr. &= -1'\ \ 5'' \\ \hline r &= \quad 13'\ 42'' \end{aligned} \qquad (13)$$

Die Differenz 5″ gegen (10) rührt von dem in (13) vernachlässigten letzten Gliede der Formel (11) her, dasselbe würde nämlich geben:

$$r_m\ x\ y = \frac{r_m\ x\ r_m\ y}{r_m} = \frac{(-74) \times (-5)}{961} = +4'' \qquad (14)$$

fügt man dieses zu (13), so fehlt nur noch 1″ gegen (10), was sich durch Abrundungshäufung erklärt.

Nach der Entstehungsweise unserer Tafeln und nach den vorgelegten Zahlenbeispielen kann man nun rasch beurtheilen, welche Art der Refractionsberechnung in jedem Falle zu wählen ist. Die Tafeln [5] [6] [7] nebst [12] geben bei Höhen unter 10° die Refraction auf etwa 1″ genau, und bei grösseren Höhen auf 0,1″ genau. Die bequemeren Correctionstafeln [8] bis [11] geben nur bei grösseren Höhen eine Genauigkeit von etwa 1″, bei sehr kleinen Höhen treten wegen der Vernachlässigung des letzten Gliedes in der Gleichung (11) und wegen der Unsicherheit der Interpolation, wohl Fehler von 5—10″ ein. Hieran schliesst sich die Frage an, wie genau überhaupt die Refraction bestimmt werden kann. Bessel äussert sich hierüber auf S. LXII — LXIII des oben citirten Werkes „Tabulae Regiomontanae“ folgendermaassen:

„Es ist bekannt, dass die Luftschichten ungleich erwärmt sind, und dass deswegen ihr Gleichgewicht gestört ist. Da nun jede Theorie das Gegentheil annehmen muss, so ist klar, dass die Theorie nicht immer mit den Beobachtungen stimmen kann, sondern sich nur den mittleren Refractionswerthen anschliesst. Deshalb ist es nöthig, den wahrscheinlichen Fehler jeder berechneten Refraction abzuleiten aus den Ungleichheiten, welche in einer langen Reihe gefunden wurden, damit man beurtheilen kann, welches Vertrauen die Tafel in jedem Falle verdient. Die Untersuchung dieses Umstandes, welche sich auf die Königsberger Beobachtungen stützte, hat uns Folgendes geliefert:

Wahrscheinlicher Fehler einer mit Hülfe der Tafel berechneten Refraction.

Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
45° 0′	± 0,27″	10° 0′	± 0,92″
30° 0′	0,34″	9° 0′	1,00″
25° 0′	0,37″	8° 0′	1,11″
20° 0′	0,46″	7° 0′	1,25″
15° 0′	0,66″	6° 0′	1,43″

Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler	Scheinbare Höhe	Wahrsch. Fehler
5° 0′	± 1,71″	2° 30′	± 5,30″
4° 30′	2,00″	2° 0′	7,74″
4° 0′	2,40″	1° 30′	10,58″
3° 30′	2,63″	1° 0′	16,84″
3° 0′	3,87″	0° 30′	20,01″

Hieraus ist ersichtlich, dass die aus den genannten Ursachen entspringenden Unregelmässigkeiten, sofern Temperatur und Barometerstand nach Angabe meiner Tafel berücksichtigt sind, nur in den ersten Graden der Höhen erheblich sind.“

Uebrigens dürfte diese Genauigkeit vielleicht noch überschätzt sein. Man weiss ja, dass die terrestrische Refraction, welche auf 100 Kilometer Entfernung etwa 4′ beträgt, tägliche Schwankungen von nahezu 50 % ihres Werthes macht, um wie viel mehr muss ein Lichtstrahl, der einen 10fach längeren Weg durch die Atmosphäre zurücklegt, bei kleinem Höhenwinkel, infolge der Aenderung der Wärmevertheilung, auf- und niederschwanken.

Zu dem kommt noch, dass man (wie aus der barometrischen Höhenmessung bekannt ist), die Lufttemperatur t gar nie genau messen kann, auch der Barometerstand Q_0 ist oft unsicher bestimmt. Nimmt man hiefür Fehler von bezw. $\Delta t = + 1^0$ und $\Delta Q_0 = + 1$ mm an, so erhält man folgende Vergleichung:

Höhe	Refractionsfehler	
	für $\Delta t = \pm 1^0$	für $\Delta Q_0 = \pm 1$ mm
0°	13″	3″
1°	8″	2″
2°	5″	2″
5°	2″	1″
10°	1″	0,4″
20°	0,6″	0,2″
45°	0,2″	0,0″

Eine genauere Refractionsbestimmung müsste nicht blos Temperatur und Barometerstand, sondern auch die Tages- bezw. Nacht**zeit** in Rechnung nehmen.

Es kann noch ein Wort über die **Form** unserer Refractionstafeln gesagt werden. Das letzte Glied $r_m\, xy$ in (11) könnte man dadurch berücksichtigen, dass man in den Tafeln [8] bis [11] als zweites Argument nicht die scheinbare Höhe, sondern die mittlere Refraction, bezw. die mittlere Refraction + erste Correction, nähme, d. h. eine Anordnung, welche die Refractionstafel in dem Nautischen Jahrbuch oder die Refractionstafel im Anhang von Bremiker's siebenstelliger Logarithmentafel hat, indessen hat die Höhe als zweites Argument den Vorzug der Anschaulichkeit und der besseren Genauigkeitsabstufung.

Die eben erwähnten Refractionstafeln des nautischen Jahrbuchs gehen

nur bis 2° Höhe, indem vorausgesetzt wird, dass unter 2° wegen Refractions-Unsicherheit überhaupt nicht gemessen werde. Wenn dieses auch im Allgemeinen der Fall ist, so kommt man doch nicht selten in die Lage, auch für kleine Höhen Refractionen zu berechnen, und für Monddistanzen, bei welchen die Refraction eine wichtige Rolle spielt, werden wir die Verhältnisse am Horizont besonders zu untersuchen haben, weshalb die Tafel S. [5] und [6], entgegen der sonst üblichen kurzen Behandlung, mit Vermeidung aller grösseren Differenzen angelegt ist.

Zum Schluss haben wir auf S. [13] noch eine Refractionstafel mit der wahren Höhe als Argument beigegeben, welche zur Anwendung kommt, wenn nicht beobachtete, sondern berechnete Höhen vorliegen, für welche die Refractionen zu bestimmen sind. (Dieser Fall tritt z. B. bei der Reduction von Monddistanzen ein.)

Man findet die Tafelwerthe S. [13] durch Rückwärtsinterpoliren aus der Tafel S. [5]—[7], oder, zur Vermeidung der Abrundungsfehler, aus einer auf 0,1″ genauen Refractionstafel mit der scheinbaren Höhe als Argument. Bezeichnet man die Refraction als Funktion der scheinbaren Höhe H mit r, dagegen mit r' die Refraction als Funktion der wahren Höhe h (wobei r und r' zu gleichen Werthen H und h gehören), wenn ferner ΔH und Δr zusammengehörige Differenzen von H und r sind, so wird

$$r' = r \frac{\Delta H}{\Delta H + \Delta r} \text{ oder genähert } = r - \frac{\Delta r}{\Delta H} r.$$

Die letztere Formel gibt

H	$r - r'$
$= 5^0$	$= 14{,}9''$
10	2,6
15	0,8
20	0,4
25	0,2
30	0,1

Da unsere Tafel S. [13] überhaupt auf 1″ abgerundet ist, war es nicht nothwendig, sie weiter fortzusetzen als bis $r - r'$ auf etwa 0,1″ sinkt, sie geht daher nur bis zur Höhe 31°.

Näherungsformel für die Refraction. Für manche Zwecke ist es erwünscht, die Refraction nicht blos tabellarisch numerisch, sondern auch in einer Formal zu besitzen. Für Höhen über 10° ist die Refraction nahezu proportional der Cotangente des Höhenwinkels, und man kann hier setzen:

$$r = 57'' \operatorname{cotg} h. \tag{15}$$

Die Refractionconstante für 9,31° C. und 751,5 mm Barometer ist 57,7269″, die Annahme 57″ in (15) statt 57,7″ gibt jedoch einen besseren Anschluss an die wirklichen Refractionen auch bei kleineren Höhen von 15°, wie folgende Vergleichung zeigt:

Höhe	Refraction	57″ *cotg h*	Fehler
0°	34′ 54″	∞	∞
1°	24′ 25″	54′ 25″	+ 30′ 0″
2°	18′ 9″	27′ 12″	+ 8′ 3″
5°	9′ 46″	10′ 52″	+ 1′ 6″
7°	7′ 20″	7′ 44″	+ 24″
10°	5′ 16″	5′ 23″	+ 7″
12°	4′ 25″	4′ 28″	+ 3″
15°	3′ 32″	3′ 32″	0″
20°	2′ 37″	2′ 37″	0″
30°	1′ 40″	1′ 40″	0″
40°	1′ 9″	1′ 9″	0″
50°	0′ 48″	0′ 48″	0″
60°	0′ 33″	0′ 33″	0″
70°	0′ 21″	0′ 21″	0″
80°	0′ 10″	0′ 10″	0″

Wie man sieht, ist die Näherungsformel (15) von 0° bis 5° ganz unbrauchbar, sie kann bei kleinen Höhen schon ihrer Form nach nicht anwendbar sein, weil sie für $h = 0$ den Werth ∞ annimmt. Dagegen ist sie von 10° an aufwärts sehr gut brauchbar, ja es kann hier auch die Correction für Temperatur und Barometerstand bequem mit berücksichtigt werden durch die beiden Correctionsfactoren γ und B der Tafel S. [12].

Eine von 1° bis 5° ziemlich anschliessende Interpolationsformel ist:

$$r = 57'' \, cotg \, h - \frac{0{,}55'' \, cos \, h}{sin^2 \, h}.$$

§ 8. Parallaxe und scheinbarer Halbmesser.

Schon bei der Unterscheidung des scheinbaren und wahren Horizonts in § 2. wurde erwähnt, dass in vielen Fällen im Vergleich mit den Entfernungen der beobachteten Himmelskörper der Halbmesser der Erde als verschwindend klein, oder die Erde als Punkt betrachtet werden darf; und dieses Verhältniss hat eben Veranlassung zur Annahme des sogenannten „wahren“ Horizonts u. s. w. gegeben. Völlige Vernachlässigung des Erdhalbmessers findet statt bei Beobachtung des Polarsternes und aller Fixsterne, während bei der Sonne und den Planeten kleine, und beim Mond sogar bedeutende Reductionsrechnungen auszuführen sind.

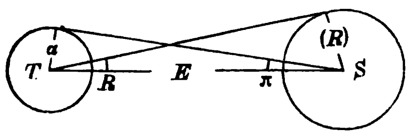
Die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde werden in der praktischen Astronomie gewöhnlich nicht in linearem Maasse, Meilen oder Kilometern etc. angegeben, sondern zum Erdhalbmesser als Maasseinheit durch eine Winkelgrösse in Beziehung gesetzt. Dieses ist die Parallaxe, d. h. der Winkel, unter welchem, von der Mitte des entfernten Gestirns aus gesehen, der Aequatorhalbmesser der Erde erscheint, d. h. wenn z. B.

in Fig. 1. von der Sonnenmitte S aus der Erdhalbmesser a unter dem Winkel $\pi = 8{,}9''$ erscheint, so ist $\pi = 8{,}9''$ die Parallaxe der Sonne, aus welcher man die Entfernung E berechnen kann:

$$E = \frac{a}{\sin \pi} = \frac{a}{\pi}\,\varrho. \tag{1}$$

Da die Erde keine Kugel, sondern ein Ellipsoid ist, also verschiedene Halbmesser a hat, so gilt zur Vermeidung jeder Unsicherheit in der Gleichung (1) als a der Aequatorhalbmesser der Erde, und die zugehörige Parallaxe π heisst die Aequatorial-Parallaxe oder auch, zur Unterscheidung von der nachher zu betrachtenden Höhenparallaxe, heisst π nach Fig. 1. die Horizontal-Aequatorial-Parallaxe.

Fig. 1. Horizontal-Parallaxe.



Die Fig. 1. enthält auch den scheinbaren Halbmesser R eingezeichnet, unter welchem der wahre Halbmesser (R) des Himmelskörpers, vom Mittelpunkt der Erde gesehen, erscheint.

Aus den Gleichungen

$$E = \frac{a}{\pi}\,\varrho = \frac{(R)}{R}\,\varrho \tag{2}$$

folgt, dass zwischen der Parallelaxe π und dem scheinbaren Halbmesser R eines Himmelskörpers bei veränderlicher Entfernung immer eine Beziehung besteht

$$\frac{\pi}{R} = \frac{a}{(R)} = \text{constant.} \tag{3}$$

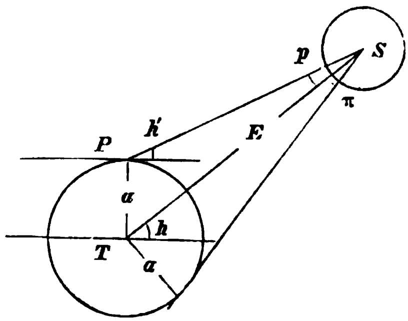
Die wichtigsten Parallaxen- und Halbmesserwerthe sind im Folgenden zusammengestellt:

Gestirn	Parallaxe π			Scheinbarer Halbmesser R			Wahrer Halbmesser (R)	Mittlere Entfernung von der Sonne
	Maximum	Mittel	Minimum	Maximum	Mittel	Minimum	Meilen	
Mond	1° 1′ 24″	57′ 40″	53′ 56″	16′ 46″	15′ 44″	14′ 43″	234	1,00
Sonne	9,0″	8,85″	8,7″	16′ 18″	16′ 2″	15′ 45″	93330	0,00
Merkur	16,9″	11,4″	5,9″	6,3″	4,2″	2,2″	320	0,39
Venus	33,1″	18,9″	4,8″	32,0″	18,3″	4,6″	831	0,72
Mars	23,0″	13,2″	3,3″	11,8″	6,8″	1,7″	441	1,53
Jupiter	2,0″	1,7″	1,4″	22,2″	18,6″	15,0″	9250	5,20
Saturn	1,0″	0,9″	0,8″	8,9″	8,1″	7,2″	7538	9,54
Uranus	0,5″	0,45″	0,4″	2,2″	2,0″	1,8″	3736	19,18
Neptun	0,3″	0,3″	0,3″	1,3″	1,3″	1,3″	3600	30,03
Erde							a=859	1,00

(4)

Indem wir die Parallaxenrechnungen für den Mond, wobei die Abplattung der Erde berücksichtigt werden muss, zur besonderen Behandlung bei den Monddistanzen vorbehalten, stellen wir hier nur die einfachsten Parallaxenformeln für die Annahme einer kugelförmigen Erde zusammen.

Fig. 2. Höhenparallaxe.



In Fig. 2. ist h' die scheinbare, aus der Beobachtung erhaltene, jedoch von Refraction befreite Höhe und h die wahre Höhe eines Gestirns, dessen Horizontalparallaxe $= \pi$ ist. Die Differenz

$$h - h' = p \tag{5}$$

heisst die Höhenparallaxe, zu deren Bestimmung man aus Fig. 2. die Beziehungen findet:

$$E = \frac{a}{\sin \pi} = \frac{a}{\sin p} \sin (90^0 + h')$$

$$\sin p = \sin \pi \cos h' \tag{6}$$

oder bei kleinen Werthen:

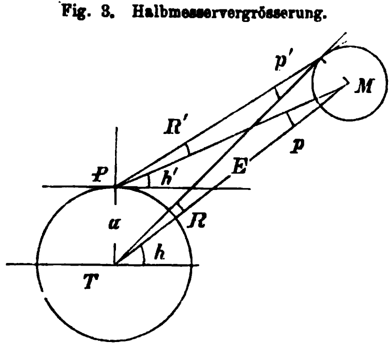
$$p = \pi \cos h' \tag{7}$$

Wenn man die Reductionen einer Höhe für Refraction und Parallaxe nach § 7. und § 8. zusammen nimmt, so erhält man:

Wahre Höhe = Scheinbare Höhe — Refraction + Höhenparallaxe.

Wir haben deswegen die Höhenparallaxe der Sonne auf der Refractionstafel S. [7] unten beigefügt.

Fig. 3. Halbmesservergrösserung.



Die Parallaxe erzeugt auch eine Vergrösserung des scheinbaren Halbmessers der Gestirne. Wenn in Fig. 3. R' der scheinbare Halbmesser des Mondes, von einem Erdpunkte P aus gesehen, ist, und R der Halbmesser wie er vom Erdmittelpunkt T aus gesehen würde, so hat man nach Fig. 3.

$$R + p = R' + p'$$
$$R' - R = p - p' \tag{8}$$

d. h. die Halbmesservergrösserung ist gleich der Parallaxendifferenz für Mitte und Oberrand, oder ebenso genau auch für Unterrand und Mitte.

Man hat also jetzt aus (7) und (8) nach Fig. 3.:

$$R' - R = \pi \cos h' - \pi \cos (h' + R')$$

$$R' - R = \pi \cos h' - \pi (\cos h' - R' \sin h') = \pi R' \sin h' \qquad (9)$$

Die Parallaxe π kann mittelst (3) eliminirt werden, und indem man zugleich R' mit R, sowie h' mit h vertauscht, hat man aus (9):

$$R' - R = \frac{R^2}{\varrho} \frac{a}{(R)} \sin h \qquad (10)$$

Der Nenner ϱ wurde zur Gewinnung gleichen Maasses (Bogensekunden) zugesetzt, und indem man nun $a = 859$ und $(R) = 234$ aus (4) einsetzt, erhält man

$$R' - R = 0{,}0000178\, R^2 \sin h \quad (log\ Coeff. = 5.25\,034 - 10) \qquad (11)$$

wo der scheinbare Mondhalbmesser R in Sekunden zu setzen ist.

Für $h = 90^0$ und für einige Hauptwerthe von R erhält man hiernach folgende Reductionsgrössen:

Mondhalbmesser $R =$	14' 30"	15' 0"	15' 30"	16' 0"	16' 30"
$\frac{R^2}{\varrho} \frac{a}{(R)} =$	13,48"	14,41"	15,39"	16,40"	17,44"

Indem man diese Werthe noch mit $\sin h$ multiplicirt, erhält man die Halbmesservergrösserungen für verschiedene Höhen, von welchen wir bei der Reduction von Monddistanzen später Gebrauch machen werden.

Bei der Sonne beträgt die Halbmesservergrösserung durch Parallaxe höchstens 0,04", und auch bei den Planeten bleibt sie unmerklich.

§ 9. Kimmtiefe.

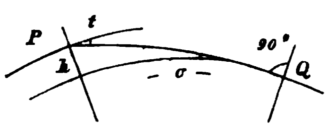
Zur See braucht man ausser der Refraction und der Parallaxe noch die Kimmtiefe, um gemessene Höhen auf wahre Höhen zu reduciren. Der Seemann misst nämlich z. B. eine Sonnenhöhe mit dem Sextanten als kürzesten Abstand des Sonnen-Ober- oder -Unterrandes von der Kimm, d. h. von der Begrenzungslinie zwischen Wasser und Luft.

Indem wir die Grundformel der trigonometrischen Höhenmessung als bekannt voraussetzen, nämlich

$$h = a \tan g\, \alpha + \frac{1 - k}{2\, r} a^2 \qquad (1)$$

(vgl. z. B. Jordan, Handb. der Verm. I S. 542), finden wir daraus die Kimmtiefenformel in folgender Weise:

Fig. 1. Kimmtiefe t.



In (1) bedeutet a eine Horizontaldistanz, α einen Höhenwinkel, h den Höhenunterschied, r den Erdhalbmesser, $k = 0{,}13$ den Refractionscoefficienten.

In Fig. 1. betrachten wir die Visur von einem Punkte P, welcher die Höhe h über

dem Meere hat, nach der Kimm Q, d. h. eine das Meer in Q berührende Visur. Wendet man hierauf die Grundgleichung (1) zweifach an, nämlich zuerst für die Visur von P nach Q und dann für eine fingirte Visur von Q nach P, so erhält man zwei Gleichungen:

$$\text{von } P \text{ nach } Q \qquad -h = a \, tang \, (-t) + \frac{1-k}{2\,r} a^2 \qquad (2)$$

$$\text{von } Q \text{ nach } P \qquad +h = a \, tang \, 0 + \frac{1-k}{2\,r} a^2 \qquad (3)$$

Die letzte Gleichung gibt die Sehweite

$$a = \sqrt{\frac{2\,r}{1-k}\,h} \qquad (4)$$

(2) und (3) subtrahirt geben:

$$2\,h = a \, tang \, t$$

und dieses mit (4) zusammen genommen, zugleich mit $tang \, t = \frac{t}{\varrho}$, gibt:

$$t = 2\,\varrho \sqrt{\frac{-k}{2\,r}}\,\sqrt{h} \qquad (5)$$

für die Erde im Allgemeinen kann man $r = 6\,370\,000$ m setzen und k ist im Mittel etwa $= 0{,}13$; damit wird (5)

$$t = 107{,}8'' \sqrt{h} \qquad (6)$$

Hiernach ist Folgendes berechnet:

Höhe h	Kimmtiefe t	Differenz	Höhe h	Kimmtiefe t	Differenz
0 m	0′ 0″		5 m	4′ 1″	
		1′ 48″			23″
1 m	1′ 48″		6 m	4′ 24″	
		44″			21″
2 m	2′ 32″		7 m	4′ 45″	
		35″			20″
3 m	3′ 7″		8 m	5′ 5″	
		29″			18″
4 m	3′ 36″		9 m	5′ 23″	
		25″			18″
5 m	4′ 1″		10 m	5′ 41″	

Ausführlichere Tafeln dieser Art enthalten die nautischen Werke, z. B. Domke, nautische Tafeln S. 73.

Man bemerkt aus der vorstehenden Zahlenübersicht, dass die Differenzen für 1 m Höhe bei wachsender Höhe abnehmen, und dieses hat eine praktische Bedeutung insofern, als ein Fehler in der Höhe bei grosser Höhe weniger schädlich ist als bei kleiner Höhe, wozu noch der Umstand kommt, dass bei sehr kleinen Höhen die Kimm durch Wellenbewegung gestört wird. Man soll also, wenn man die Wahl hat, seinen Augpunkt möglichst hoch über der Wasserfläche wählen.

Das Vorstehende gilt nur für die freie Kimm. Die Kimm vor einem Strande erscheint tiefer, sofern nicht etwa der Strand hinter der Kimm auftaucht, d. h. selbst schon weiter als die Sehweite für freies Meer entfernt ist.

Ist man genöthigt, eine Kimm zu benutzen, welche sich nicht gegen den Himmel, sondern gegen Land abhebt, so wird man zuerst überlegen, ob man die Strandlinie wirklich sieht oder ob sie sich hinter der Kimm befindet.

Hierzu dient die Formel (4), welche mit $r = 6\,370\,000$ m und $k = 0{,}13$ gibt:

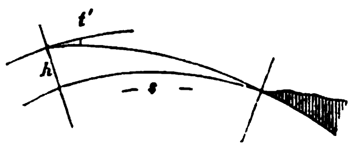
$$a = 3826{,}7 \sqrt{h} \qquad (7)$$

womit berechnet wurde:

Höhe *h*	Sehweite *a*	Differenz	Höhe *h*	Sehweite *a*	Differenz
0 m	0,0 km		5 m	8,6 km	
		3,8 km			0,8 km
1 m	3,8 km		6 m	9,4 km	
		1,6 km			0,7 km
2 m	5,4 km		7 m	10,1 km	
		1,2 km			0,7 km
3 m	6,6 km		8 m	10,8 km	
		1,1 km			0,7 km
4 m	7,7 km		9 m	11,5 km	
		0,9 km			0,6 km
5 m	8,6 km		10 m	12,1 km	

Man wird sich in solchem Falle möglichst nieder aufstellen, um nicht die Strandlinie selbst, sondern eine oben freie Kimm zu erhalten. Ist dieses nicht möglich, so hat man den Tiefenwinkel der Strandlinie in Rechnung zu bringen. Hiezu haben wir mit Anwendung der Grundgleichung (1) auf Fig. 2.:

Fig. 2. Strandtiefe.



$$-h = s \, tang\,(-t') + \frac{1-k}{2r} s^2$$

$tang\,(-t') = -\frac{t'}{\varrho}$ gesetzt, gibt die Auflösung nach t':

$$t' = \frac{h}{s}\varrho + \frac{1-k}{2r}\varrho s \qquad \left(\log \frac{1-k}{2r}\varrho = 8.14\,878\right) \qquad (8)$$

Beispielshalber berechnen wir hiernach für $h = 4$ m:

s	t
$s =$ 1 km	$t =$ 13′ 59″
2 km	7′ 21″
3 km	5′ 17″
4 km	4′ 23″
5 km	3′ 55″
6 km	3′ 42″
7 km	3′ 36″
7,7 km	3′ 36″ freie Kimm.

Für verschiedene Höhen *h* und Entfernungen *s* wird diese Strandtiefe *t'* in Domke's nautischen Tafeln S. 73 (VIII) gegeben, wobei die Entfernungen in Seemeilen gezählt sind. (1 Seemeile = 1 Aequatorminute = 1,855 Kilometer.)

Die Kimmtiefe ist stets von der beobachteten Höhe abzuziehen.

Alle drei bis jetzt von uns betrachteten Höhenreductionen setzen sich so zusammen:

Wahre Höhe = Scheinbare Höhe — Kimmtiefe
— Refraction
+ Höhenparallaxe.

Capitel II.

Astronomische Zeit- und Ortsbestimmung.

§ 10. Der astronomische Theodolit.

Im Vergleich mit dem geodätischen oder Feldmesstheodolit, den wir hier als bekannt voraussetzen, bestehen beim astronomischen Theodolit folgende Unterschiede:

1) Für Sonnenbeobachtungen muss vor das Ocular ein Blendglas vorgesteckt werden, weil die Sonne, ausser etwa unmittelbar vor dem Untergang oder nach dem Aufgang, nicht ohne solchen Augenschutz beobachtet werden kann. Andererseits ist für Sternbeobachtungen bei Nacht die Anordnung einer Fadenkreuz-Beleuchtung erforderlich. Mit starken Fernröhren (etwa von 30—40facher Vergrösserung an und 5—6 cm Objectivöffnung) kann man zwar Sterne auch bei Tage beobachten, und mit schwächeren Fernröhren wenigstens in der Dämmerung, ohne irgend welche von der Feldmessconstruction abweichende Vorrichtung; ein astronomischer Theodolit muss jedoch auf alle Tag- und Nachtbeobachtungen eingerichtet sein.

2) Während bei Feldmessungen im Allgemeinen nur schwache Visur-Neigungen vorkommen, weshalb die Fernröhre von geodätischen Instrumenten selten über 45^0 erhoben werden können, müssen astronomische Theodolite auf alle möglichen Höhenwinkel eingerichtet sein, z. B. für Polarsternbeobachtungen bei uns auf etwa 55^0, und für Sonnenmittagshöhen auf etwa 60^0. Dieses führt zu besonderen Constructionen, wie excentrisches Fernrohr oder gebrochenes Fernrohr etc.

3) Die Anordnung der Libellen ist bei geodätischen und astronomischen Instrumenten nach verschiedenen Rücksichten zu treffen. Eine Reiterlibelle auf der horizontalen Achse ist z. B. für astronomische Azimutmessung unbedingt nöthig, während sie geodätisch entbehrt werden kann.

Mit Beachtung dieser Umstände kann man wohl einen geodätischen Theodolit auch zu astronomischem Gebrauche herrichten, z. B. durch Erhöhung der Fernrohrachsenlager etc.

Man unterscheidet häufig die Benennungen astronomischer „Theodolit“ oder „Universal-Instrument“, je nachdem der Horizontalkreis grösser und ausgezeichneter behandelt ist, als der Verticalkreis, oder beide Kreise gleich

berücksichtigt sind. Tritt andererseits der Horizontalkreis zurück, oder fehlt er gänzlich, so kommt man zu besonders benannten Constructionen, „Meridiankreis“ etc.

Nach diesen allgemeinen Erklärungen betrachten wir einige Instrumente näher und zwar solche, mit welchen Verfasser zahlreiche Messungen angestellt hat.

Fig. 1. Theodolit der libyschen Expedition, Kreisdurchmesser 15 cm.



I. Fig. 1. zeigt das Instrument, mit welchem Verfasser im Winter 1873—1874 auf der libyschen Expedition Zeithöhen, Breiten und Azimute gemessen hat. Dasselbe wurde für diesen Zweck vom Mechaniker Sickler in Karlsruhe vor der Expedition mit Benützung gewöhnlicher Feldmesstheodolit-Bestandtheile construirt. Beide Kreise haben 15 cm Durchmesser, und sind auf 20′ kräftig getheilt. Die Nonien geben wegen der Dicke der Striche nur 1′ zuverlässig, lassen sich aber auf einen Blick bequem auch in der Dämmerung ablesen. Das Fernrohr ist des Durchschlagens wegen, und um in grössere Höhen visiren zu können, excentrisch angebracht.

Das Instrument Fig. 1. ist in allen Theilen stark construirt, es erlitt in seinem Kasten am 16. Januar 1874 einen Sturz vom Kameel, ohne Schaden zu leiden. Das Instrument an sich wiegt 6 Kilogramm und sammt dem Kasten 13 Kilogramm. Die Dimensionen und das Gewicht dürften jedoch wohl geringer genommen werden. Auf die horizontale Achse kann eine Reiterlibelle von 7″ Empfindlichkeit aufgesetzt werden. In unserer Zeichnung Fig. 1. ist jedoch diese Libelle L abgesetzt gezeichnet, weil an ihrer Stelle eine Bussole B von 13,5 cm Theilungsdurchmesser gesetzt ist.

Es kann nämlich nach Umständen entweder die Libelle L oder die für topographische Zwecke sehr nützliche Bussole B aufgesetzt werden. Wegen dieser Bussole sind alle Eisentheile am Instrument und am Stativ vermieden. In der Mitte der Alhidade des Horizontalkreises (in unserer Figur nicht sichtbar), liegt für allgemeine grobe Einstellung eine Dosenlibelle von geringer Empfindlichkeit; über ihr, parallel der Fernrohrvisur ist eine Röhrenlibelle L' von 7″ Empfindlichkeit auf 1 Strich angebracht. Wenn die Bussole B aufgesetzt ist, was nicht blos der Bussole selbst wegen, sondern auch zum Schutz der darunter befindlichen Libelle L' gegen die Sonnenstrahlen meist der Fall war, so lässt sich die Libelle L' nur sehr schief beobachten, worauf wir bei den Breitenmessungen, welche mit diesem Instrument gemacht sind, zurückkommen werden.

Das Fernrohr hat 32 mm Brennweite, 28 mm Objectivöffnung, und gibt mit einem Huyghens'schen Ocular 15fache Vergrösserung.

Für Sonnenbeobachtungen ist am Ocular ein rothes Sonnen-Blendglas angebracht, und zum Einstellen des Fernrohres auf die Sonne dienen die zwei Platten P und P', von denen die vordere P ein kleines Loch, und die hintere P' einen Punkt trägt, auf welchem das durch das Loch in P erzeugte Sonnenbild einstehen muss, wenn die Fernrohrachse nach der Sonne gerichtet ist. Diese Orientirungsvorrichtung, welche wir an allen unseren Sonnenbeobachtungs-Theodoliten angebracht haben, erleichtert das Auffinden der Sonne in dem stark nach oben geneigten Fernrohr sehr, und schützt das Auge vor dem Anschauen der Sonne. Sobald nämlich das von P erzeugte Sonnenbildchen auf dem Punkte von P' einspielt, kann man mit Sicherheit erwarten, beim Blick ins Fernrohr die Sonne im Gesichtsfelde zu finden, ohne dass man zu diesem Zweck ein einziges Mal direct nach der Sonne hätte sehen müssen. Der Punkt auf P' wird durch einen Versuch ein für allemal markirt.

Fig. 2. Fadenkreuzbeleuchtung.

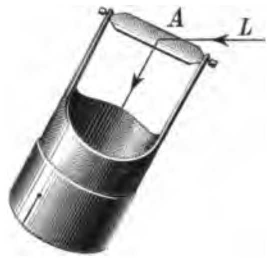


Für Nachtbeobachtungen ist eine einfache Fadenkreuzbeleuchtungs-Vorrichtung vorhanden, welche vor das Objectiv des Fernrohrs aufgesteckt werden kann. Nach Fig. 2. besteht diese Vorrichtung aus einem elliptischen Ring AA', welcher, um eine Achse BB' drehbar, mittelst der Hülse C auf das vordere Ende des Fernrohrs F aufgesteckt wird, und deshalb auch um die Fernrohrachse drehbar ist. Der Ring AA' verdeckt den äusseren Theil des Objectivs, und lässt nur noch durch das Loch in der Mitte Lichtstrahlen in das Fernrohr dringen. Andererseits schickt die Ringfläche selbst, welche mit weissem Papier bezogen ist, durch Reflexion das Licht einer passend gehaltenen Lampe L durch das Objectiv nach dem Fadenkreuz und beleuchtet so dasselbe.

Statt des Ringes von Fig. 2. kann man auch ein schmales Plättchen

A Fig. 2*a*. anwenden, welches reflectirtes Licht *L* in die Mitte des Objectivs schickt und für die Beobachtungsvisuren die Nebenflächen des Objectivs frei lässt.

Fig. 2*a*. Fadenkreuzbeleuchtung.



Ja man kann sogar mittelst eines breitgeschlagenen Drahtes, welcher vor dem Objectiv angebracht ist, und in geeignete Lage gegen die Lichtquelle gedreht und gebogen wird, das Fadenkreuz beleuchten.

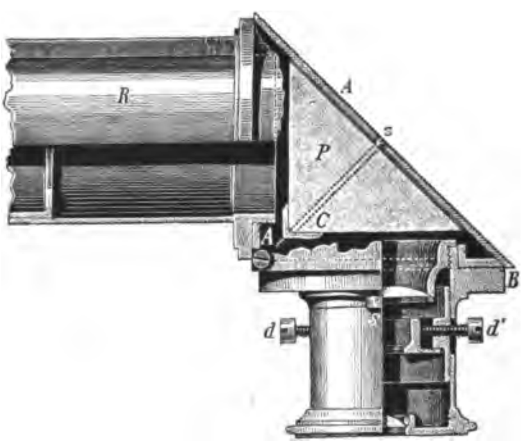
Auch das Licht braucht nicht sehr stark zu sein, ich fand z. B. zufällig, mit einem Theodolit bei Nacht auf einer Fensterbrüstung messend, das Licht einer benachbarten Strassen-Gaslaterne zur Fadenbeleuchtung mittelst des reflectirenden Ringes von Fig. 2. hinreichend.

Im Allgemeinen wird eine gewöhnliche Hand-Laterne, auf passendem Gestell, oder von einem Gehülfen gehalten, den Dienst thun. Dieselbe Laterne kann zum Ablesen der Theilungen leuchten; in dem Fall des Instruments Fig. 1. musste diese Lampe eisenfrei sein, um auch die Ablesung der Bussolen-Nadel bei Nacht-Polarsternbeobachtungen zu erlauben.

Die Bussole, welche auf dem Instrument Fig. 1. aufgesetzt ist, ist für Messungen auf Reisen ein fast unentbehrliches Hülfsmittel. Man kann damit die magnetische Declination unmittelbar auf etwa $0{,}1^0$ genau bestimmen, und hat dann für die Topographie jederzeit orientirte Visuren.

Ocular-Prisma. Mit dem excentrischen Fernrohr Fig. 1. kann man wohl bis zu 60^0 in die Höhe visiren, doch ist von 45^0 an die Kopfstellung und Körperhaltung des Beobachters schon ziemlich unbequem, und wird über 60^0 geradezu störend. Für solche Fälle ist ein prismatisches Ocular nützlich, welches seitliches Hineinschauen erlaubt, so dass man beim excentrischen Fernrohr nur noch die kleine Unbequemlichkeit verschiedener Höhenlagen zu überwinden hat. Ein solches Ocular der hannöverischen Sammlung hat Hunäus auf S. 62 seiner „geometrischen Instrumente" abgebildet und beschrieben, wie wir in Fig. 3. wiedergeben.

Fig. 3. Ocular-Prisma.

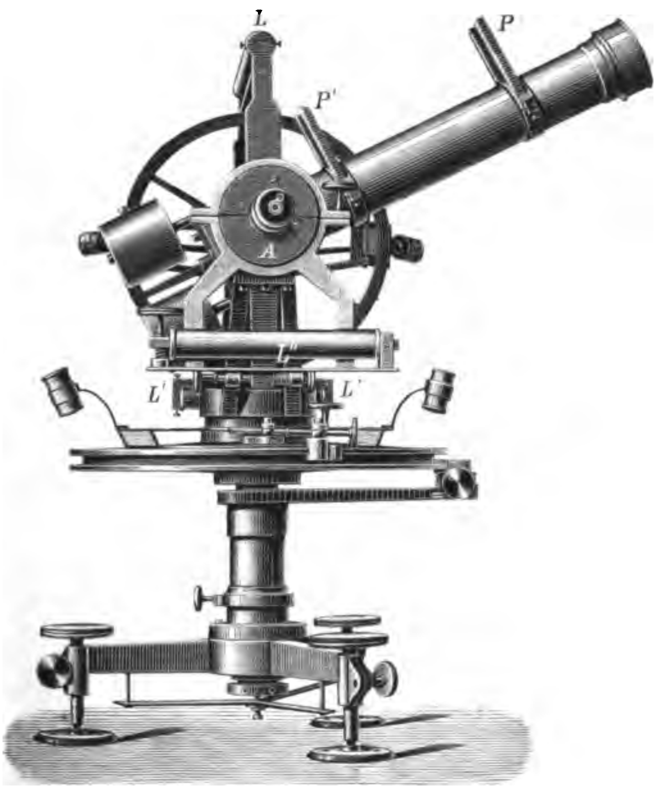


Das Prisma *P* ruht auf dem Stuhl *A* (am

rechten Winkel) und ist von der Deckplatte A' (an der Hypotenuse) umgeben, gegen welche es in dem Dach C mittelst der Zugschrauben z befestigt ist. Das Ganze kann an das Ocularrohr R angeschraubt werden. Das Ocular selbst ist ein Huyghens'sches mit den seitlichen Correctionsschrauben für das Fadennetz. Die Ocularröhre wird mittelst zweier diametral gegenüberliegender Schrauben s (von denen nur die vordere sichtbar ist) mit der Fassung des Prismas verbunden, zugleich aber kann der Ocularkopf um seine Röhrenachse etwas gedreht werden, indem die Durchgangslöcher für die Schrauben s in der Platte B den hiezu nöthigen Spielraum haben. Diese Drehung ist nöthig zur Verticalstellung der Fäden.

II. In Fig. 4. haben wir die (photographisch-perspectivische) Ansicht eines Universalinstruments mit Nonien-Ablesung, von Meyerstein in Göttingen. Dasselbe gehört der geodätischen Sammlung der technischen Hochschule in Hannover und findet sich bereits in zwei geometrischen Projectionen abgebildet in Hunäus „Die geometrischen Instrumente“ S. 254—257. Unsere Fig. 4. zeigt gegen jene Darstellung einige Abänderungen, in der Aufsatz-

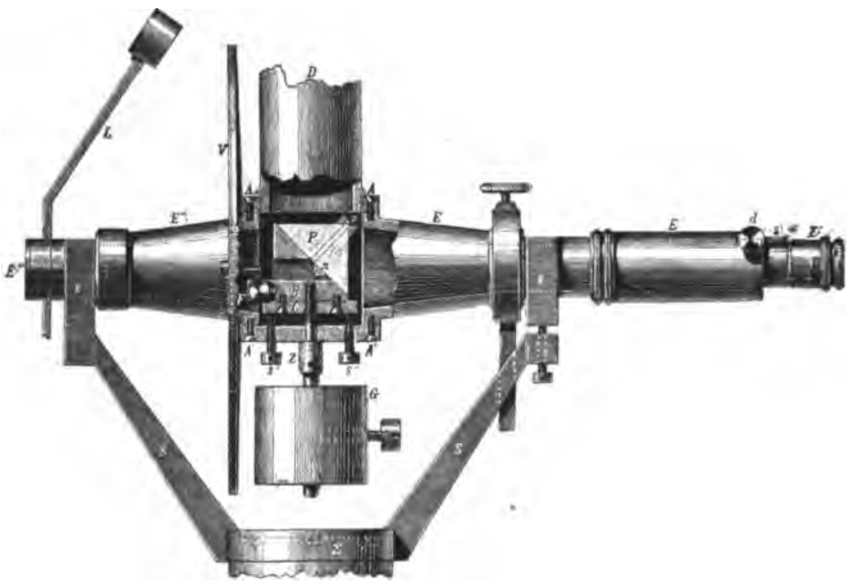
Fig. 4. Theodolit von Meyerstein, Horizontalkreisdurchmesser = 21,7 cm.



libelle L, in den Sonnenorientirungsplatten PP' und in der unmittelbar an die Ocularröhre angeschraubten Libelle L'', deren Bedeutung wir nachher besonders behandeln werden. Das Instrument hat somit jetzt im Ganzen drei Libellen: 1) Die Aufsatz-Reiterlibelle L auf der horizontalen Achse mit Empfindlichkeit 3,5'' auf 1 Strich (diese grosse Empfindlichkeit ist ausser Verhältniss mit dem mechanisch nicht genügend sicheren Verticalachsensystem), 2) die mit der Alhidade fest verbundene Längenvisurlibelle L' (in Fig. 4. undeutlich zu sehen, weil jenseits befindlich) mit Empfindlichkeit von etwa 10'' (früher zu roh, nämlich nur 30'') und 3) die an das Ocular mit dem Futter A angeschraubte Libelle L'', ebenfalls mit 10'' Empfindlichkeit.

Die beiden Kreise sind direct in 10' fein getheilt und geben mit Nonien Ablesung auf 10''.

Fig. 5. Gebrochenes Fernrohr, Maassstab 1 : 3,4.



Das Fernrohr ist gebrochen und gestattet daher nicht nur bequemes Durchschlagen, sondern auch Einstellen auf beliebige Höhen bei constanter Ocularhöhe. Von diesem Fernrohr hat Hunäus (Die geometrischen Instrumente S. 64—65) eine genaue Abbildung und Beschreibung gegeben, welche wir hier wiederzugeben uns erlauben (Fig. 5. ist Verkleinerung von Hunäus' Figur S. 64).

Die Ablenkung der Lichtstrahlen vom Objectiv zu dem seitwärts angebrachten Ocular geschieht durch ein Glasprisma, welches in dem mitt-

leren würfelförmigen Theile der Umdrehungsachse angebracht ist. In Fig. 5. bezeichnet AA' den Durchschnitt des erwähnten Würfels, in dessen Aushöhlung das Glasprisma P auf dem Metallstuhle B durch zwei vor den Grundebenen des Prismas liegende Zugschrauben z (von welchen aber nur die hintere dargestellt ist) befestigt ist. Die den Stuhl B tragende Fussplatte C stemmt sich gegen drei Druckschrauben s'' (von denen die in der Mitte liegende nicht gesehen wird), welche in der Deckplatte A' ihre Mutter haben, und wird durch die Zugschraube Z nach aussen gezogen. Diese Zug- und Druckschrauben s'' und Z dienen zugleich zur Berichtigung der Collimationslinie des Fernrohrs gegen dessen Umdrehungsachse, da wegen der langen Ocularröhre $E'E$ der Collimationsfehler an der Ocularblendung nicht gut verbessert werden kann. Da die eintretenden Lichtstrahlen nur dann ein deutliches Bild geben können, wenn die auffangende Kathetenebene des Prisma's normal gegen die Achse des Objectivrohrs gerichtet ist, so enthält zur etwa nöthigen Drehung des Prisma's (analog der Quercorrectionsvorrichtung bei Röhrenlibellen) der Stuhl B einen seitlichen Fortsatz F, gegen welchen zwei diametral gegenüberstehende Stellschrauben σ treten, von denen aber nur die vordere in der Zeichnung dargestellt ist. Das Objectivrohr D ist in die Deckplatte A geschraubt und durch zwei gegenüber aufgesteckte Gegengewichte G im Gleichgewichte erhalten. Das in die Ocularröhre E geschobene Auszugrohr E' enthält ein Ramsdens'sches Ocular mit dem bei f liegenden Fadennetze.

Zur Beleuchtung des Fadennetzes ist auch die andere Hälfte E'' der Umdrehungsachse durchbohrt und an der Hypotenusenebene des Prisma's P ist ein zweites kleines Glasprisma π befestigt, welches die Lichtstrahlen, die von der Lichtflamme bei E''' ausgehen, ungehindert hindurch gehen lässt.

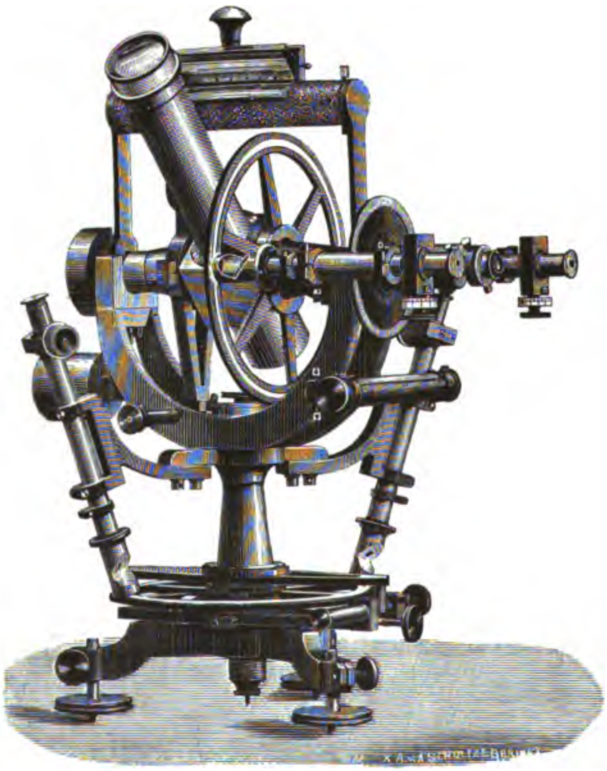
III. Als drittes astronomisches Instrument betrachten wir in Fig. 6. ein kleines Universalinstrument, welches im Jahre 1883 vom Mechaniker Bamberg in Berlin für unsere Sammlung angeschafft wurde. (Unsere Fig. 6. ist aus dem Bamberg'schen Preisverzeichniss IV. S. 13 mit Erlaubniss des Eigenthümers entnommen.) Dieses Instrument unterscheidet in der Anordnung sich nicht wesentlich von dem soeben beschriebenen Meyerstein'schen Fig. 4., denn es hat, wie jenes, ein gebrochenes Fernrohr und Fadenbeleuchtung durch die Achse. Dagegen besteht in der mechanischen und optischen Ausführung ein wesentlicher Unterschied. Das Bamberg'sche Instrument hat statt der Nonien Mikroskope, welche am Horizontal- und Höhenkreis (deren Theilung von 5' zu 5' geht) direct 5'', also mit Schätzung jedenfalls noch 1'', abzulesen gestatten. Die Trommeln der Mikroskope geben in ihrer Secundenbezifferung wirkliche Secunden und nicht Doppelsecunden, wie meist gebräuchlich ist. Wir finden nämlich den kleinen Vortheil, der aus der Doppel-Secundenbezifferung erwachsen soll, — Wegfall der Halbirung bei der Mittelbildung aus den Ablesungen an beiden gegenüberliegenden Mikroskopen — unerheblich gegen die Nachtheile beim Uebergreifen in die nächste Minute etc.

Die Libelle für Höhenwinkel (in Fig. 6. rechts unter den Mikro-

skopen) hat keine besondere Einstellschraube (welche bei grösseren Instrumenten vorhanden zu sein pflegt), sondern sie ist mit dem Horizontalachsenträger fest verbunden, und wird nur durch die drei Hauptstellschrauben eingestellt; ihre Empfindlichkeit ist 9,0″ auf 1 Strich. Aehnliche Empfindlichkeit, nämlich 9,5″ hat auch die obere Aufsatzlibelle, welche namentlich zur Azimutmessung gebraucht wird.

Die Kreise haben 13,5 cm Durchmesser, das Fernrohr hat 27 mm Oeffnung, 24,5 cm Brennweite, mit zwei Ramsden'schen Ocularen 20- und 30fache Vergrösserung, es zeigt für ein mittleres Auge den Polarstern $^1/_4$ — $^1/_2$ Stunde vor Sonnenuntergang, für ein sehr gutes Auge $^1/_2$ bis 1 Stunde vor Sonnenuntergang.

Fig. 6. Universalinstrument von Bamberg, Kreisdurchmesser 13,5 cm.



Das Fadennetz hat einen Horizontalfaden und 6 Verticalfäden, wovon jedoch die zwei mittleren mit nur 40″ Abstand als ein Doppelfaden zählen. Das Fadenintervall ist etwa 6′ oder 24^s in Zeit.

§ 11. Fehlertheorie des astronomischen Theodolits.

Die Achsenfehler des Theodolits haben in der Astronomie wegen der steileren Visuren eine wesentlich andere Bedeutung als in der Geodäsie.

Nennen wir c den Collimationsfehler,
i den Horizontalachsenfehler,
v den Verticalachsen- oder Aufstellungsfehler,

so sind deren Einflüsse auf eine Horizontal- oder Azimutalwinkelmessung:

$$(c) = \frac{c}{\cos h} - c \tag{1}$$

$$(i) = i \tang h \tag{2}$$

$$(v) = v \tang h \cos u \tag{3}$$

wenn h der Höhenwinkel der Visur und u deren Azimutalwinkel gegen die Horizontallinie in dem schief liegenden Limbus ist.

Wir werden namentlich die Formel (2) später zu benutzen haben und werden sie dann speciell behandeln.

Deswegen mag es genügen, die Formeln (1) (2) (3) hier einfach zu citiren (s. Jordan, Handb. d. Vermessungskunde, I. Band S. 239—242).

Der Einfluss derselben Achsenfehler c i v auf eine Höhenwinkelmessung ist (nach J. Handb. I S. 247):

$$\Delta h = \frac{i^2 + c^2 + v^2 \cos^2 u}{2 \varrho} \tang h + \frac{ci + c v \cos u + i v \cos u \sin h}{\varrho \cos h} \tag{4}$$

wo u, wie bei (3), ein Azimutalwinkel ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass eine in der Visurrichtung angebrachte Libelle bei der Höhenwinkelmessung eingespielt habe; ein Fehler dieser Libelle würde mit seiner ganzen Grösse in den Höhenwinkel eingehen. Der Ausdruck (4) für Δh unterscheidet sich dadurch wesentlich von (1) (2) (3), dass Δh nur Glieder zweiter Ordnung i^2 c^2 etc. enthält, während (c) (i) und (v) die ersten Potenzen von c i und v enthalten, neben welchen i^2 c^2 etc. in (1) (2) (3) vernachlässigt worden sind. Dieses deutet schon an, dass der Fehler Δh im Allgemeinen klein ist. In der That gibt die Ausrechnung nach (4) für einen einzelnen Theil von der Form $\frac{\delta^2}{2 \varrho} \tang h$ Folgendes:

δ	Höhenwinkel h							
	1°	5°	10°	20°	30°	45°	60°	90°
1′	0,000″	0,001″	0,002″	0,003″	0,01″	0,01″	0,02″	∞
5′	0,004″	0,02″	0,04″	0,08″	0,13″	0,22″	0,38″	∞
10′	0,014″	0,08″	0,15″	0,32″	0,50″	0,87″	1,51″	∞
30′	0,136″	0,76″	1,38″	2,86″	4,53″	7,86″	13,60″	∞

Diese Tabelle berechtigt uns, bei Höhenwinkelmessungen mit einem einigermassen berichtigten Theodolit, und bei Höhen, die nicht weit über 60° gehen, die Achsenfehler schlechthin zu vernachlässigen.

Ueber Prüfung und Berichtigung des Theodolits im Allgemeinen verweisen wir auf J. Handb. I S. 231 u. ff., jedoch mit der Bemerkung, dass sich die Formel (8) S. 242 erheblich kürzer begründen lässt durch die am Schlusse unseres gegenwärtigen § 11. gegebene Differentialformel (*d*).

Bestimmung der Horizontalachsenneigung *i*.

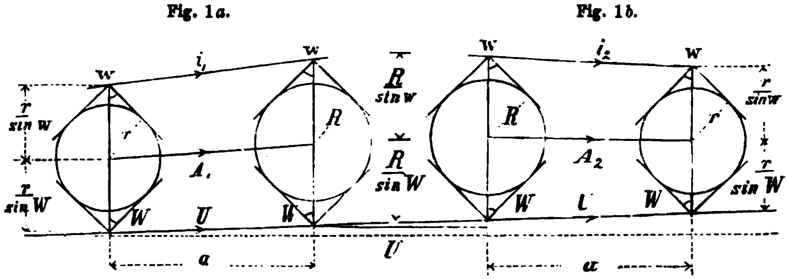
Nachdem die Empfindlichkeit der Aufsatzlibelle bestimmt ist, findet man durch deren Ausschlag beim Aufsetzen auf die horizontale Achse die Neigung der letzteren und zwar unabhängig von dem Libellencollimationsfehler selber, wenn man die Libelle in beiden Lagen aufsetzt und aus beiden Ausschlägen das Mittel nimmt.

Für geodätischen Gebrauch mit schwach geneigten Visuren wird das wohl immer ausreichen, bei astronomischen Azimutmessungen dagegen, wo steile Visuren über 45° kommen, also nach der Formel (2) ($i \tan h$) i mit seiner eigenen Grösse, und sogar noch vergrössert ($\tan h > 1$) in das Resultat der Azimutmessung eingeht, muss unter Umständen noch ein weiterer Fehler in Rechnung gebracht werden, nämlich die Ungleichheit der Zapfendurchmesser der horizontalen Achse.

In Fig. 1. bedeutet W den halben Gabelwinkel des Achsenlagers, in welchem die Achse links mit einem Halbmesser r und rechts mit einem

Fig. 1. Ungleichheit der Zapfenhalbmesser R und r der horizontalen Achse.

Fig. 1*a*. Fig. 1*b*.



Halbmesser R liegt, a sei der Abstand der beiden Lager. (In der Figur sind die Lagerquerschnitte links und rechts um 90° in die Längsebene (in welcher a liegt) gedreht, damit die Querschnittsdimensionen und die Längen in einer Figur zur Anschauung kommen.) Die Libelle sitzt oben mit einem Reitwinkel $2\,w$. Die Einsenkung des Zapfens R beträgt daher $\frac{R}{\sin W}$ für den Gabelwinkel W, und $\frac{R}{\sin w}$ für den Reitwinkel w und entsprechend für den Zapfen r.

Mit U_1 A_1 i seien die Neigungen der Unterlagslinie, der Zapfenachse

und der Libellenachse bezeichnet, im Sinne des beigesetzten Pfeiles, positiv, wenn links tief und rechts hoch ist.

Nun denke man sich die Horizontalachse mit ihren Zapfen vertauscht, die Unterlagsneigung U aber beibehalten, damit wird Fig. 1 *a*. in 1 *b*. übergehen.

Aus diesen Figuren liest man nun folgende Gleichungen:

$$A_1 = U + \frac{\frac{R}{\sin W} - \frac{r}{\sin W}}{a}$$

$$i_1 = U + \frac{\left(\frac{R}{\sin W} + \frac{R}{\sin w}\right) - \left(\frac{r}{\sin W} + \frac{r}{\sin w}\right)}{a}.$$

Setzt man
$$\frac{R - r}{a} = x \tag{1}$$
so wird
$$A_1 = U + \frac{x}{\sin W} \tag{2}$$

$$i_1 = U + \frac{x}{\sin W} + \frac{x}{\sin w} \tag{3}$$

Behandelt man ganz ebenso die Fig. 1b., so erhält man

$$A_2 = U - \frac{x}{\sin W} \tag{4}$$

$$i_2 = U - \frac{x}{\sin W} - \frac{x}{\sin w} \tag{5}$$

Aus (2) und (3), sowie aus (4) und (5) folgt:

$$A_1 - i_1 = - \frac{x}{\sin w} \qquad A_2 - i_2 = + \frac{x}{\sin w} \tag{6}$$

und aus (3) und (5)

$$i_1 - i_2 = \frac{2\,x}{\sin W} + \frac{2\,x}{\sin w}$$

Dieses gibt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{i_1 - i_2}{2} \, \frac{\sin W \sin w}{\sin W + \sin w} \tag{7}$$

also nach (6)

$$A_1 = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{2} \, \frac{\sin W}{\sin W + \sin w}, \quad A_2 = i_2 + \frac{i_1 - i_2}{2} \, \frac{\sin W}{\sin W + \sin w}. \tag{8}$$

Wenn die Winkel W und w einander gleich sind, was häufig der Fall ist, so vereinfachen sich die Formeln; (8) gibt dann:

$$A_1 = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{4}, \quad A_2 = i_2 + \frac{i_1 - i_2}{4} \tag{9}$$

Die Neigungen i_1 und i_2 selbst müssen durch je zweifaches Aufsetzen einer Libelle auf die Horizontalachse bestimmt werden, damit der Libellenfehler eliminirt wird. Ist die Libelle durchlaufend beziffert, wie in den nachfolgenden Fig. 2. und 3. angenommen ist, so berechnet man aus den Blasenablesungen a und b in zwei Lagen die Neigung:

$$i = \frac{a - b}{2}$$

i ist positiv, wenn in Fig. 2. und 3. R höher ist als L. (10)

Folgendes ist ein Beispiel der Zapfenungleichheitsbestimmung für das Bamberg'sche Universalinstrument Fig. 6. S. 44, mit Veranschaulichung der Umstellungen durch Fig. 2. und Fig. 3. Die Aufsatzlibelle ist durch-

Fig. 2. Achsenlage I.

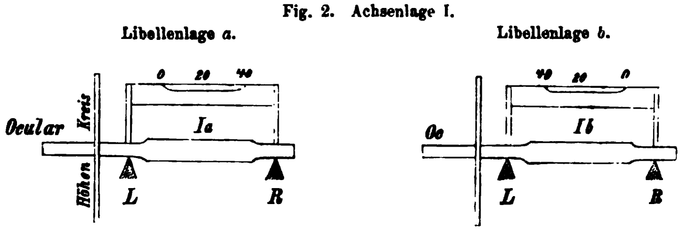
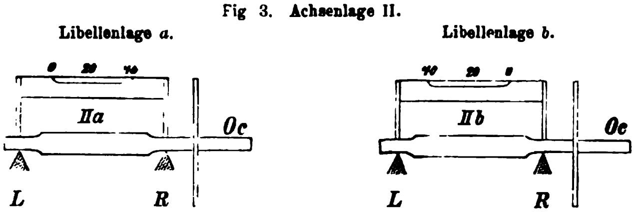


Fig 3. Achsenlage II.



laufend von 0 bis 40 beziffert, weshalb durch die beigeschriebenen Zahlen 0 20 40 die Lage der Libelle gegen die Achse vollständig bestimmt ist. Zwischen Lage I und Lage II wird die horizontale Fernrohrachse auf den Lagern umgesetzt, wobei die Stützpunkte L und R unverändert bleiben. Ein Versuch gab folgende Ablesungen der Blasenenden an der Libellentheilung:

I a	10,1	29,3
I b	9,7	28,8
$a-b$	$+0,4$	$+0,5$

Mittel $(a-b) = +0,45$, $\left(\frac{a-b}{2}\right)_{\mathrm{I}} = +0,22 = i_1$ (11)

II a	9,8	29,2
II b	10,2	29,6
$a-b$	$-0,4$	$-0,4$

Mittel $(a-b) = -0,40$, $\left(\frac{a-b}{2}\right)_{\mathrm{II}} = -0,20 = i_2$ (12)

$$i_2 - i_1 = -0,42$$

$$\frac{i_2 - i_1}{4} = -0,10$$

Das Mittel aus acht solchen Bestimmungen gab

$$\frac{i_2 - i_1}{4} = (-\ 0{,}11 \pm 0{,}03) \text{ Libellenstriche} \tag{13}$$

Dass hiebei i_1 und i_2 die Neigungen in dem Sinne sind, welcher auch in Fig. 1., 2. und 3. für i_1 und i_2 angenommen ist (i positiv, wenn das rechte Ende R höher ist als das linke Ende L), ergibt sich deutlich aus den Libellenablesungen, die man zu noch grösserer Deutlichkeit auch auf die Blasenmitte beziehen kann. Z. B.

I *a*	Blasenende links	10,1	Blasenende rechts	29,3	Blasenmitte	19,70
I *b*	Blasenende rechts	9,7	Blasenende links	28,8	Blasenmitte	19,25

I *a* Blasenmitte 20 — 19,70 = 0,30 links von 20 $(i_1)_1 = -\ 0{,}30$
I *b* Blasenmitte 20 — 19,25 = 0,75 rechts von 20 $(i_1)_2 = +\ 0{,}75$

Um die Collimation der im Strich 20 angenommenen Libellenachse gegen die Unterlagslinie zu eliminiren, hat man aus — 0,3 und + 0,75 das Mittel zu nehmen = + 0,225, was mit dem obigen i_1 in (11) stimmt.

Die Libellenempfindlichkeit ist nach S. 44 = 9,5″ auf 1 Strich, also nach (13) und (9):

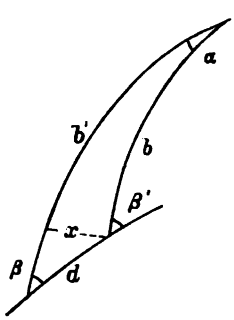
$$A_1 - i_1 = -\ (A_2 - i_2) = -\ 0{,}11 \times 9{,}5'' = -\ 1{,}04'' \tag{14}$$

d. h. in Fig. 1 *a.* ist der linke Zapfen r dicker als der rechte R, und die Achsen i_1 und A_1 convergiren nach rechts um 1,04″.

Differentialformeln des sphärischen Dreiecks.

Zur Theorie der Instrumentenfehler und zu manchen anderen Untersuchungen braucht man häufig Differentialformeln des sphärischen Dreiecks, welche wir daher hier ein für alle Mal aufstellen.

Fig. 4. Sphärisches Differentialdreieck.



In Fig. 4. betrachten wir ein langgestrecktes schmales sphärisches Dreieck, mit den beiden Langseiten b und b', dem eingeschlossenen kleinen Winkel α, dessen kleiner Gegenseite d, mit den anliegenden nahe gleichen Winkeln β und β'. x sei ein Bogen rechtwinklig zu b oder zu b' oder auch genähert, rechtwinklig zu b und zu b', so dass das kleine Dreieck mit d und x als ebenes rechtwinkliges Dreieck behandelt werden kann.

Die sphärische Trigonometrie gibt:

$$\sin \alpha = \frac{\sin x}{\sin b} \quad \text{oder auch} \quad \tan \alpha = \frac{\tan x}{\sin b}$$

woraus für kleines a und kleines x wird:

$$x = a \sin b \tag{a}$$

ferner

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin b'}{\sin b} \tag{b}$$

$$\beta' = \beta + (\beta' - \beta) \qquad b' = b + x \operatorname{cotg} \beta$$

$$\sin \beta' = \sin \beta + (\beta' - \beta) \cos \beta \qquad \sin b' = \sin b + x \operatorname{cotg} \beta \cos b.$$

Damit gibt (b):

$$1 + (\beta' - \beta) \operatorname{cotg} \beta = 1 + x \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} b$$

und mit Einsetzung von x aus (a):

$$\beta' - \beta = a \cos b \tag{c}$$

oder mit $x = d \sin \beta$ nach Fig. 4.:

$$\beta' - \beta = d \sin \beta \operatorname{cotg} b \tag{d}$$

Die Formeln (a) und (c) entsprechen den Formeln für den Parallelkreisbogen und für die Meridianconvergenz in der Geodäsie.

§ 12. Die astronomischen Uhren.

Zur Zeitmessung hat man Pendeluhren und Federuhren. Die Pendeluhren mit fester Aufstellung sind bei mässigen Kosten einer grossen Genauigkeit fähig. Das Pendel soll mit Compensation der Wärmeausdehnung versehen sein. Die Federuhren hat man in der Form von gewöhnlichen Taschenuhren, dann Taschenchronometern und sog. Boxchronometern.

Auf die Mechanik und Compensation der Uhren und Chronometer lassen wir uns nicht ein, und beschreiben hier nur die einfachste Behandlung dieser Instrumente.

Die Bestimmung eines Zeitmomentes an einer Uhr geschieht am bequemsten durch zwei Beobachter. Z. B. zur See, wo ein grösseres Personal meist verfügbar ist, misst etwa der Capitän eine Monddistanz, indem er allmälig die Berührung zweier Ränder im Gesichtsfelde des Sextantenfernrohrs zu Stande bringt, während ein Steuermann mit der Uhr in der Hand die Secunden in Gedanken zählt. Im Moment der Berührung sagt der Capitän: „Top!“ und der Steuermann hält mit seinem Zählen . . . 36 — 37 — *38*! im selben Moment inne, hält 38^s in Gedanken fest, notirt noch dazu die Minuten und Stunden und hat dann z. B. $7^h\ 29^m\ 38^s$.

Nahezu mit derselben Genauigkeit und Bequemlichkeit kann auch ein Beobachter mit dem Auge das Fernrohr und die Uhr beherrschen, wenn entweder die linke Hand zum Halten der Uhr frei ist (bei Theodolitbeobachtungen) oder wenn wenigstens die Uhr in Sehweite vom Ocular des Beobachtungsinstrumentes gebracht werden kann. Man schaut nämlich, sobald der Beobachtungsmoment, z. B. Antritt des Sonnenrandes an einem Faden des Gesichtsfeldes, eintritt, rasch vom Ocular weg nach der Uhr,

und liest deren Sekunden, und nachher auch ruhig die Minuten und Stunden ab.

Diese rohe Methode ist genauer als sie auf den ersten Blick scheint. Der mittlere unregelmässige Zeitfehler beträgt weniger als 1 Secunde; allerdings sind constante, persönliche Fehler in der Auffassung des Zeitmomentes zu erwarten, welche aber unschädlich sind, wenn es sich nur um Differenzen handelt.

Es gibt viele Beobachtungen mit langsamen Bewegungen, z. B. beim Polarstern, bei Sonnenhöhen in der Nähe des Mittags, bei Monddistanzen, kurz Beobachtungen, bei welchen — innerhalb der von uns überhaupt nur beabsichtigten Genauigkeit — es auf 1—2 Zeitsecunden gar nicht ankommt, und in allen diesen Fällen kann ein einzelner Beobachter die erwähnte bequeme Beobachtungsart anwenden.

Die bessere Methode ist jedoch die Beobachtung mit Auge und Ohr. Man fasst z. B. die Secundenschläge einer Pendeluhr mit Auge und Ohr auf, zählt im Stillen (oder auch halblaut) nach den Schlägen weiter, während das Auge nun ins Fernrohr schaut; so zählt man z. B. 34 — 35 — 36 —, inzwischen nähert sich der Sonnenrand dem Faden . . — 37 — *38*! sei die Berührung. Dieses wird notirt und Minuten und Stunden nachher dazu geschrieben. Bei dieser Methode lernt man bald auch halbe Secunden und Zehntelsecunden schätzen; wenn es nöthig erscheint.

Wenn mehrere Ereignisse in kurzen Intervallen zu beobachten sind, so dass man nicht Zeit hat, dazwischen aufs Papier zum Schreiben zu sehen und wieder von Neuem die Secunden an der Uhr abzusehen, z. B. wenn die Durchgänge eines Sterns durch 5 — 7 Fäden eines Fernrohrs rasch folgen, so kann man auch fortgesetzt beobachten und dazu blind schreiben, wobei man durch mechanische Führungen sorgen kann, dass die blind geschriebenen Zahlen nicht in einander hinein gerathen.

(Die beste Methode der Zeitbeobachtung ist die Registrirung durch Tastendruck mit Hülfe elektromagnetischer Uebertragung.)

Taschenuhren schlagen meist zu schwach und nicht nach Sekunden, so dass nach solchen Uhren schwer und unbequem mit dem Ohr zu beobachten ist. Man hat deswegen auch besondere Secundenschlagwerke construirt, welche man zur ersten Uebung wohl benutzen kann, welche aber für wirkliche Beobachtungen selbst wieder mit einer Uhr verglichen werden müssten. Man hat auch sogenannte Chronoscope, d. h. Secundenuhren, welche durch einen Fingerdruck still gestellt werden können; diese wären zu e i n e r Beobachtung gut, bei mehreren Beobachtungen hinter einander, um die es sich doch wohl fast immer handelt, ist das fortgesetzte Vergleichen mit der wirklichen Beobachtungsuhr zu mühsam.

Nach einiger Uebung lernt man bald Secunden in Gedanken zählen, o h n e die Schläge einer Uhr dazu zu hören; man präge sich hiezu den Rhythmus der viersilbigen Zahlworte vier-und-drei-ssig etc. ein, und wird es bald dahin bringen, 30, sogar 60 Secunden in Gedanken zu zählen, ohne um mehr als 1—2 Secunden zu irren. Doch genügen schon etwa

10 Secunden zur praktischen Anwendung dieser Uebung. Z. B. auf der libyschen Expedition maass ich mehrfach Monddistanzen im Freien, während im Zelt die Uhr neben dem Lichte lag. Nach der Randeinstellung mit dem Sextanten wurde, nach Secunden zählend und schreitend, zum Licht ins Zelt gegangen und die abgezählten bezw. abgeschrittenen Secunden beim Ablesen der Uhr in Abzug gebracht.

Stand und Gang. Die Angabe einer Uhr ist im Allgemeinen nie in völliger Uebereinstimmung mit der richtigen astronomischen Zeit (mittleren Sonnenzeit oder Sternzeit eines Ortes), die Uhr geht in irgend welchem Augenblick entweder nach oder vor, im ersten Fall hat sie einen negativen, im zweiten Fall einen positiven Stand, oder indem wir das algebraische Zeichen lieber der Correction zutheilen, sagen wir: Wenn die Uhr nachgeht, so verlangt sie eine positive Standcorrection, und wenn die Uhr vorgeht, so ist die Standcorrection negativ. In einer Gleichung schreiben wir z. B. (s. folgenden § 13., Gleichung (13)):

$$\text{Mittlere Hannov. Zeit} = \text{Chronometerangabe} + 1^m\ 46^s,$$

dann geht die Uhr um $1^m\ 46^s$ nach.

All dieses bezieht sich nur auf den Stand in einem gegebenen Moment. Aendert sich die Standcorrection selbst von Tag zu Tag, so nennt man diese Aenderung pro 1 Tag den „täglichen Gang“ der Uhr. Der Gang ist voreilend, wenn die positive Standcorrection mit der Zeit kleiner wird oder die negative Correction absolut grösser wird. Der Gang ist verzögernd, wenn die positive Correction allmälig grösser oder die negative Correction absolut kleiner wird.

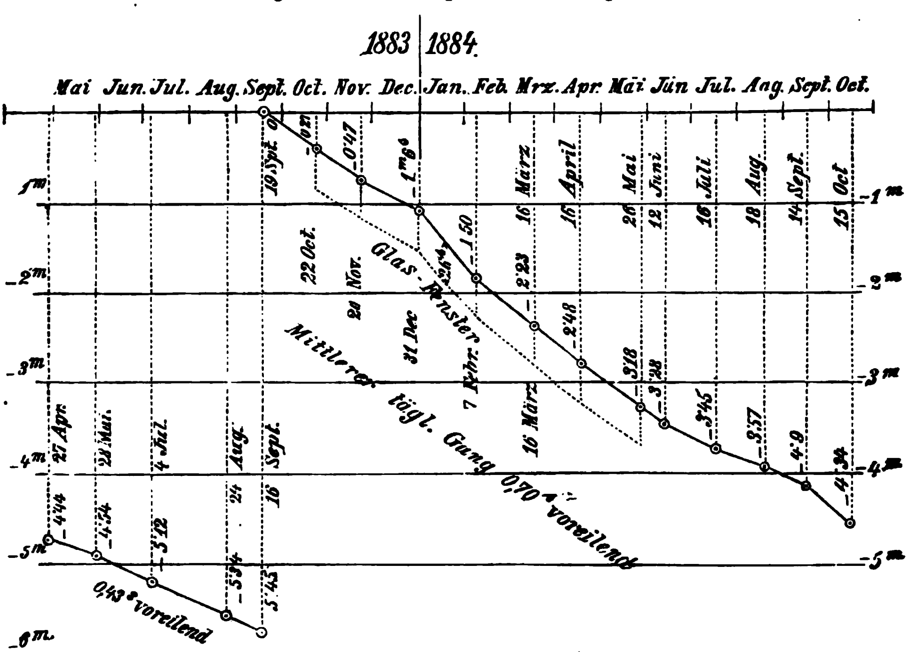
Zu einem Beispiel der Stand- und Gangbestimmung mit graphischer Darstellung nehmen wir die Zeitbestimmungen in Hannover nach einer Pendeluhr von Breguet, welche sich in unserer Sammlung befindet, vom Mai 1883 bis October 1884. Die astronomischen Ortszeitbestimmungen wurden vom Mai bis September 1883 durch einzelne Sonnenhöhen (nach § 13.) erhalten, vom 19. September 1883 bis October 1884 durch ein Passageinstrument mit Sonnenbeobachtung (§ 18.). Zwischen dem 16. und 19. September 1883 wurde die Uhr neu aufgestellt und auf den Stand Null gebracht, die Pendellänge wurde dabei unverändert gelassen. Es sind in dieser Zeit von etwa $1^1/_2$ Jahren im Ganzen an etwa 50 Tagen astronomische Zeitbestimmungen gemacht, von denen wir aber, um die Uebersicht zu wahren, in der nachfolgenden Tabelle und in dem zugehörigen Diagramm Fig. 1. nur 18 aufnehmen. (S. 53.)

Die Tageszahlen x der Gangberechnung nimmt man aus einem von 1 bis 365 durchnumerirten Kalender, den man zu manchen anderen Zwecken ohnehin braucht.

Die graphische Darstellung Fig. 1. musste für unseren Holzschnitt aus Raumrücksichten klein gemacht werden. Für den praktischen Gebrauch führen wir eine solche Darstellung für unsere drei astronomischen Uhren gemeinsam auf einem langen nach Art der Längennivellements behandelten Netz. Der Maassstab 1 Tag = 1 mm und 1^s = 0,5 mm ge-

Tag	x	Δx	Standcorrection y	Δy	Täglicher Gang $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1883 27. April	= 117	31	— 4m 44s	10s	0,32s
28. Mai	= 148	37	— 4 54	18	0,49
4. Juli	= 185	51	— 5 12	22	0,43
24. Aug.	= 236	23	— 5 34	11	0,48
16. Sept.	= 259		— 5 45		
	259 — 117	142	1m 1s	61s	0,43s voreilend
1883 19. Sept.	= 262	33	0m 0s	27s	0,82s
22. Oct.	= 295	29	— 0 27	20	0,69
20. Nov.	= 324	41	— 0 47	19	0,46
31. Dec.	= 365 = 0	38	— 1 6	44	1,16
1884 7. Febr.	= 38	38	— 1 50	33	0,87
16. März	= 76	31	— 2 23	25	0,81
16. April	= 107	40	— 2 48	30	0,75
26. Mai	= 147	17	— 3 18	10	0,59
12. Juni	= 164	34	— 3 28	17	0,50
16. Juli	= 198	33	— 3 45	12	0,36
18. Aug.	= 231	27	— 3 57	12	0,44
14. Sept.	= 258	31	— 4 9	25	0,81
15. Oct.	= 289		— 4 34		
	365 — 262 + 289 — 0	392	4m 34s	274	0,70s voreilend

Fig. 1. Stand und Gang der Pendeluhr Breguet.



nügt, um alle Zahlen in das Netz selbst einzuschreiben und damit jeder Zeit Alles über den Gang der Uhren Nöthige übersichtlich beisammen zu haben.

Es lassen sich aus der Tabelle von S. 53 nebst der Zeichnung Fig. 1. manche Schlüsse ziehen: Die Neuaufstellung der Uhr im September 1873 hat, ohne dass an der Pendellänge etwas geändert wurde, zweifellos den Gang geändert, nämlich von $0,4^s$ auf $0,7^s$ vergrössert.

Nach der Neuaufstellung scheint der Gang eine jährliche Periode, mit etwa $0,8^s$ im Winter und $0,5^s$ im Sommer, zu zeigen. Die Uhr geht daher in der Kälte etwas rascher als in der Wärme. Die in der Tabelle und in dem Diagramm hervorstehende Abnormität vom 31. December steht vielleicht damit in Zusammenhang, dass während der Feiertage plötzlich der sonst bei Tag geheizte Saal, in welchem die Uhr steht, kalt blieb.

Die Zeichnung Fig. 1. hat vom October bis Mai noch eine punktirte Ganglinie mit der Bemerkung „Glasfenster". Es wurde nämlich mit dem Passageinstrument, welches hinter einem gewöhnlichen Fenster sich befindet, nicht nur bei geöffnetem Fenster, sondern auch wiederholt durch das Glasfenster hindurch, beobachtet, wobei der lichtbrechende Einfluss der Glasscheibe für jene ganze Zeit nahe constant $= 26^s$ erhalten wurde. Mit Rücksicht auf diese Correction kann also mit jenem Instrument bei schlechtem Wetter, wenn die Sonne über Mittag erscheint, auch durch die Glasscheibe beobachtet werden.

Zur Regulirung einer Pendeluhr hat man sich der einfachen Pendelgesetze zu erinnern, nämlich

Schwingungsdauer eines Pendels von der Länge l

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

wo g die Beschleunigung der Schwere in 1 Secunde etwa $= 9,81$ m ist.

Aus (1) findet man die Pendellänge l für die Schwingungsdauer t

$$l = g \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \tag{2}$$

insbesondere mit $t = 1^s$, die Länge des Secundenpendels

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0,994 \text{ m} \tag{3}$$

Aus (2) erhält man auch die Aenderung dl, welche ein Pendel erfahren muss, wenn seine Schwingungsdauer t in $t + dt$ übergehen soll:

$$dl = \frac{2\,g\,t}{\pi^2}\,dt \tag{4}$$

oder wegen (2):

$$\frac{dl}{l} = 2\,\frac{dt}{t} \tag{5}$$

Wenn eine Uhr täglich um k Secunden nachgeht (täglicher Gang k Secunden verzögernd), so bedarf sie einer täglichen Correction $= + k$ und da der Tag $24 \times 60 \times 60 = 86400$ Secunden hat, ist

$$\frac{dt}{t} = \frac{k}{86\,400} \text{ und nach (5) und (3):}$$

$$dl = 0{,}994 \frac{2\,k}{86\,400} 1000 \text{ in Millimetern}$$

$$d\,l = 0{,}0230 \; k \text{ Millimeter.} \tag{6}$$

Hiernach berechnet man folgendes Hülfstäfelchen:

Täglicher Gang	Pendelcorrection	Täglicher Gang	Pendelcorrection
1^s	0,023 mm	6^s	0,138 mm
2^s	0,046 „	7^s	0,161 „
3^s	0,069 „	8^s	0,184 „
4^s	0,092 „	9^s	0,207 „
5^s	0,115 „	10^s	0,230 „

(7)

Wenn der Gang $\begin{Bmatrix}\text{voreilend}\\ \text{verzögernd}\end{Bmatrix}$ ist, d. h. wenn die Uhr zu $\begin{Bmatrix}\text{schnell}\\ \text{langsam}\end{Bmatrix}$ geht, muss das Pendel $\begin{Bmatrix}\text{verlängert}\\ \text{verkürzt}\end{Bmatrix}$ werden.

Als Beispiel nehmen wir folgenden Fall: Die zweite Pendeluhr (Frerk) unserer Hannover'schen Sammlung ging nach Sternzeit und sollte auf mittlere Sonnenzeit regulirt werden. Nach S. [4] des Anhangs sind 24 Stunden Sternzeit $= 24^h - 3^m\, 56^s = 24^h - 236^s$ Sonnenzeit. Die Uhr ging also um 236^s täglich vor oder es war der tägliche Gang $= 236^s$ voreilend, was nach (6) oder dem Hülfstäfelchen (7) eine Pendelverlängerung $=$ $+$ 5,43 mm gibt. Es wurde daher die Pendellinse zunächst nach einem Maassstab um circa 5,4 mm heruntergeschraubt und die Uhr versuchsweise 1 Stunde lang in Gang gesetzt, wobei sich im Vergleich mit einer nahezu richtig gehenden anderen Uhr eine Voreilung von $0{,}5^s$ ergab. Da dieses einem täglichen Voreilen von 12^s entspricht, so hat man nach (6) und (7) abermals eine Pendelverlängerung von 0,28 mm vorzunehmen, zu deren Messung die Pendelcorrectionsschraube mit getheiltem Knopfe dient. Die Ganghöhe dieser Schraube fand sich $=$ 0,48 mm, und da die Mutter am Rande in zwanzig Theile getheilt ist, gibt ein solcher Theil 0,024 mm und die berechneten 0,28 mm entsprechen 11,6 Theilen. Man wird für eine Uhr, sobald man den Schrauben- und Theilungswerth der Pendeljustirung kennt, sich ein kleines Täfelchen anlegen, welches für jeden Werth des täglichen Ganges die Pendelcorrection in Theilen der Umdrehungen der Correctionsschraube angibt. In unserem Falle würde dieses Täfelchen sehr einfach werden, denn nach den oben angegebenen Zahlenwerthen entspricht einem Theilstrich der Schraube eine Höhenänderung von $0{,}48 : 20 =$ 0,024 mm, d. h. sehr nahe $=$ 0,023 mm nach (7). Es scheint also der Verfertiger der Uhr die Ganghöhe und Randtheilung der Correctionsschraube absichtlich so eingerichtet zu haben, dass die Drehung der

Schraube um 1 Strich einer Gangänderung der Uhr um 1 Secunde pro 1 Tag entspricht.

In der angegebenen Weise wurde durch verschiedene Versuche der Gang der fraglichen Uhr allmälig auf etwa 1^s pro Tag gebracht und so gelassen.

Wenn die Gangregulirung praktisch so einfach wäre, als die mathematische Betrachtung andeutet, so würde es ein Leichtes sein, einer Pendeluhr in wenigen Wochen auf $0{,}1^s$ genau den Gang $0{,}0^s$ zu verschaffen, allein es treten hiebei manche Störungen ein, deren Ursachen man nicht kennt. Nach jeder Neuregulirung dauert es eine gewisse Zeit bis sich überhaupt wieder ein gleichförmiger Gang einstellt, der innerhalb der letzten Secunde zum Theil dem Zufall anheim gegeben ist. Hat man daher einmal den Gang einer Uhr innerhalb 1^s pro Tag gebracht, so thut man am besten daran, Nichts mehr daran zu ändern, sondern den einmal vorhandenen Gang nur noch rechnerisch zu verfolgen.

Bei Taschenuhren ist es noch schwieriger, den Gang genau zu reguliren. Unser Taschenchronometer (von Kutter in Stuttgart) hat einen Regulator mit Zeigerspielraum von 5 mm. Eine versuchsweise vorgenommene Aenderung um 1 mm gab eine Gangänderung um 40^s, worauf durch mehrfaches Probiren mit schwachem Drücken innerhalb 0,1 mm der Gang allmälig wieder auf etwa 1^s pro Tag gebracht wurde.

Zahlreiche praktische Resultate über Chronometer-Genauigkeit findet man in den verschiedenen Jahrgängen der „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, herausgegeben von der Kaiserlichen Admiralität“. Berlin, Mittler und Sohn.

§ 13. Zeitbestimmung aus einer einzelnen Sonnen- oder Sternhöhe.

Indem wir das astronomische Dreieck Fig. 1. oder Fig. 3. von § 4. (S. 10 und 11) wieder vornehmen, haben wir auch von dort die zur Bestimmung von t aus φ h und δ dienende Gleichung (1) § 4. S. 11:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \tag{1}$$

oder nach $\cos t$ aufgelöst:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \tag{2}$$

Die Anwendung soll sofort an einem Beispiel gezeigt werden. Als Instrument zum Messen der Sonnenhöhe diente der ältere Meyerstein'sche Theodolit mit gebrochenem Fernrohr Fig. 4. § 10. S. 41.

Da der Sonnenmittelpunkt nicht unmittelbar beobachtet werden kann, wird zuerst der Oberrand der Sonne anvisirt, und bei gut einspielender Längslibelle der Moment der Berührung des Sonnenrandes mit dem Horizontalfaden an der Taschenuhr notirt, worauf die Ablesung an beiden Nonien

des Höhenkreises erfolgt. Dann wird das Fernrohr durchgeschlagen und die ganze Operation mit dem Unterrand der Sonne wiederholt.

Da man annehmen kann, dass in der kurzen Zeit von wenigen Minuten, welche diese Messung dauert, die Höhenänderung der Sonne der Zeit proportional ist, erhält man auf diese Weise in dem arithmetischen Mittel beider Zeit- und Höhenmessungen die Höhe des Sonnenmittelpunkts für einen bestimmten Zeitpunkt, ohne den Sonnendurchmesser selbst, und den Indexfehler des Höhenkreises, zu kennen, denn beide werden eliminirt. Es ist auch nicht einmal nöthig, sich genau Rechenschaft zu geben, ob man jeweils den Oberrand oder den Unterrand der Sonne benützt, wenn nur wenigstens in Lage II der andere Rand genommen wird als in Lage I.

Unser Theodolit Fig. 4. § 10. S. 41 gibt die in den Figuren 1. und 2. veranschaulichten Verhältnisse, wobei der unmittelbare Anblick im Fernrohr dargestellt ist.

Fig. 1. Sonnenhöhenmessung. Fernrohrlage I.

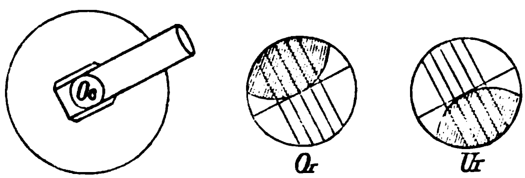
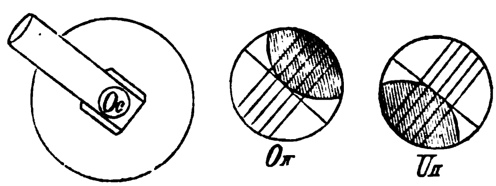


Fig. 2. Sonnenhöhenmessung. Fernrohrlage II.



Die Messung ist folgende:

Hannover, Technische Hochschule 4. Juli 1883 Vormittags.
(3. Juli 1883 astr. Zählung.)

Taschen-Chronometer		Nonius links	Nonius rechts	
$7^h\ 48^m\ 40^s$ Vorm.	O_I	$235^0\ 38'\ 40''$	$55^0\ 40'\ 0''$ $(+\ 360^0)$	
$7^h\ 50^m\ 27^s$ Vorm.	U_{II}	$124^0\ 6'\ 20''$	$304^0\ 6'\ 30''$	
	I — II	$111^0\ 32'\ 20''$	$111^0\ 33'\ 30''$	
$7^h\ 49^m\ 33{,}5^s$		Mittel	$111^0\ 32'\ 55''$	(3)
		Zenitdistanz	$z = 55^0\ 46'\ 28''$	
		Höhe	$H = 90^0 - z = 34^0\ 13'\ 32''$	(4)

Das heisst also: In dem Moment, als die Uhr $7^h\ 49^m\ 33{,}5^s$ zeigte, war der scheinbare Höhenwinkel des Sonnen-Mittelpunktes $= 34^0\ 13'\ 32''$.

Gelegentlich wurde auch die Lufttemperatur = 28° C. und der Barometerstand 754 mm abgelesen, womit man nach den Tafeln im Anhang S. [7] bis [11] die Refraction berechnet:

S. [7] gibt für $H = 34^\circ\ 13'$	$r_m =$	$1'\ 25''$
S. [9] gibt für $H = 35^\circ$ und $t = 28^\circ$	*Correct.* =	$-\ 5''$
S. [11] gibt für $H = 30^\circ$ oder 40° und $B = 754$	*Correct.* =	$0''$
also wahre Refraction	$r =$	$1'\ 20''$

Man hat also jetzt nach (4):	Scheinbare Höhe $H =$	$34^\circ\ 13'\ 32''$
	Refraction $r =$	$1'\ 20''$
	Wahre Höhe $H - r = h =$	$34^\circ\ 12'\ 12''$
Hiezu nach Seite [7] unten, für $h = 34^\circ$ noch die Höhenparallaxe p =		$9''$
Auf den Erdmittelpunkt reducirt:	Resultat $h =$	$34^\circ\ 12'\ 21''$ (5)

Wenn die Messung etwa überhaupt nicht auf 10″ genau, sondern etwa nur auf 30″ oder 1′ genau ist, was wohl manchmal der Fall ist, so kann man natürlich die kleinen Correctionen für Lufttemperatur und Barometerstand, und auch die Höhenparallaxe vernachlässigen. Zur Ermittelung der Sonnendeclination δ und der Zeitgleichung g aus den Angaben des Jahrbuchs setzen wir voraus, dass die beobachtete Uhrzeit nahezu mittlere Hannoveraner Zeit sei, und haben dann

1883, 4. Juli $7^h\ 50^m$ Vormittag bürgerliche Zeitzählung
= 1883, 3. Juli $19^h\ 50^m$ astronomische Zeitzählung.

Hannover liegt $0^h\ 39^m$ östlich von Greenwich, die soeben genannte Hannoveraner Zeit entspricht also $19^h\ 50^m - 39^m = 19^h\ 11^m$ oder $= 19{,}18^h$ mittlerer Greenwicher Zeit.

Der Nautical Almanac für 1883, Seite 111, gibt für den mittleren Greenwicher Mittag:

Tag	Declination	stündliche Aenderung	Zeitgleichung	stündliche Aenderung
3. Juli	$\delta = +\ 22^\circ\ 58'\ 58''$	$-\ 13{,}0''$	$g = +\ 3^m\ 52{,}8^s$	$+\ 0{,}45^s$
4. Juli	$\delta = +\ 22^\circ\ 53'\ 58''$		$g = +\ 4^m\ 3{,}8^s$	

Die stündlichen Aenderungen (var. in 1 hour) sind von S. 110 des Nautical Almanac für den 4. Juli herübergesetzt, und das Vorzeichen + der Zeitgleichung ist nach der Annahme des Berliner Jahrbuchs, dem Wortlaut des Nautical Almanac entsprechend, so angesetzt, dass die Zeitgleichung als Correction der wahren Zeit erscheint.

Nun rechnet man für den Zeitpunkt $19{,}18^h$ um $4{,}82^h$ rückwärts vom 4. Juli die Proportionaltheile:

$$4{,}82 \times 13{,}0 = 63'' = 1'\ 3'' \quad \text{und} \quad 4{,}82 \times 0{,}45 = 2{,}2^s$$

welche zu den Angaben für den 4. Juli mit richtigem Zeichen hinzugefügt geben:

$$\delta = +\ 22^\circ\ 55''\ 1' \qquad g = +\ 4^m\ 1{,}6^s \tag{6}$$

Man braucht jetzt die geographische Breite des Beobachtungsortes

(Hannover, Technische Hochschule), welche aus anderweitigen Messungen als bekannt vorausgesetzt wird, nämlich

$$\varphi = 52^\circ\ 22'\ 50'' \tag{7}$$

Nun hat man die Werthe $h\ \varphi\ \delta$ aus (4) (5) (6) in die Formel (2) einzusetzen wie folgt:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$\varphi = 52^\circ\ 22'\ 50''$	$\log \sin \varphi$	9.898770	$\log \cos \varphi$	9.785624	
$\delta = 22^\circ\ 55'\ 1''$	$\log \sin \delta$	9.590392	$\log \cos \delta$	9.964293	(8)
$h = 34^\circ\ 12'\ 21''$	$\log \sin\varphi \sin\delta$	9.489162	$\log \cos\varphi \cos\delta$	9.749917	

$\log \sin h = 9.749866$	$\sin h = 0{,}562167$	$Erg. \log \cos\varphi \cos\delta$	0.250083	(9)
	$\sin\varphi \sin\delta = 0{,}308434$	$\log(\sin h - \sin\varphi \sin\delta)$	9.404377	
	$\sin h - \sin\varphi \sin\delta = 0{,}253733$	$\log \cos t$	9.654460	

$$t = 63^\circ\ 10'\ 24'' \tag{10}$$

Nach der Hülfstafel S. [2] erhält man die Verwandlung von t in Zeit:

$$\begin{array}{rl} 63^\circ = & 4^h\ 12^m \\ 10' = & \ 0^m\ 40^s \\ 24'' = & \ 1{,}6^s \\ \hline t = & 4^h\ 12^m\ 41{,}6^s \end{array} \tag{11}$$

Dieses ist jedoch vom wahren Mittag rückwärts gezählt

$$\begin{array}{rl} \text{und gibt } t = & 7^h\ 47^m\ 18{,}4^s \text{ Vormittag} \quad (12) \\ \text{hiezu nach (6) } g = & +\ 4^m\ 1{,}6^s \\ \hline \text{Mittlere Zeit} = & 7^h\ 51^m\ 20{,}0^s \\ \text{Die Uhr zeigte (3)} & 7^h\ 49^m\ 33{,}5^s \\ \hline \text{Also Correction der Uhr} & +\ 1^m\ 46{,}5^s \end{array} \tag{13}$$

Die Berechnung von $\sin\varphi \sin\delta$ und $\log \cos\varphi \cos\delta$ ist in (8) deswegen vorangesetzt, weil man, im Falle mehrerer rasch nach einander gemessener Höhen, die Declination δ für die Mittelzeit als constant annehmen kann, und dann jene Berechnung (8) für 2, 3 oder mehr Höhen h gemeinsam benützen kann, wobei die Geschwindigkeit der Aenderung von δ (im März und September nahezu 1″ in 1 Zeitminute, im Juni und December fast verschwindend), sowie die überhaupt erstrebte Genauigkeit mit in Betracht kommt. Hat man eine Tafel der *sinus* selbst, so braucht man nicht, wie bei (9), zuerst $\log \sin h$ und daraus $\sin h$ aufzuschlagen.

Wenn es sich um Vormittagszeit handelt, so wird man bequemer, als bei (10) und (11) geschehen ist, $\log \cos t$ in der Spalte für $\log \sin$ aufsuchen und dort $t = 26^\circ\ 49'\ 36''$ entnehmen, welches mit der Tafel von S. [2] des Anhangs den Zeitwerth $1^h\ 47^m\ 18{,}4^s$ gibt und mit Zufügung von 6^h denselben Werth $7^h\ 47^m\ 18{,}4^s$ wie bei (12). Diese Abkürzung wurde in unserem vorstehenden Beispiel nur deswegen nicht vorgenommen, damit die äussere Uebereinstimmung mit der Formel nicht gestört wird.

Umformung der Grundgleichung (2)

$$1 - \cos t = \frac{\cos\varphi \cos\delta - \sin h + \sin\varphi \sin t}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Wir setzen $\varphi - \delta = 90^0 - H$ (14)

wo H die Bedeutung der Mittagshöhe für die Declination δ und die Breite φ hat (vgl. § 19.) damit wird:

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\sin H - \sin h}{\cos\varphi \cos\delta} = 2 \frac{\sin \frac{H-h}{2} \cos \frac{H+h}{2}}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$$\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{H-h}{2} \cos \frac{H+h}{2}}{\cos\varphi \cos\delta}} \qquad (15)$$

Diese Formel auf das Beispiel (6)—(10) angewendet, gibt:

$$\begin{aligned} \varphi &= 52^0\ 22'\ 50'' \\ \delta &= 22^0\ 55'\ 1'' \\ \hline \varphi - \delta &= 29^0\ 27'\ 49'' \\ H &= 60^0\ 32'\ 11'' \\ h &= 34^0\ 12'\ 21'' \\ \hline H + h &= 94^0\ 44'\ 32'' \\ H - h &= 26^0\ 19'\ 50'' \\ \frac{H+h}{2} &= 47^0\ 22'\ 16'' \\ \frac{H-h}{2} &= 13^0\ 9'\ 55'' \end{aligned}$$

$\log \sin \frac{H-h}{2}$	9.357 479
$\log \cos \frac{H+h}{2}$	9.830 747
Erg. $\log \cos \varphi$	0.215 376
Erg. $\log \cos \delta$	0.035 703
$\log \sin^2 \frac{t}{2}$	9.439 305
$\log \sin \frac{t}{2}$	9.719 152

$$\frac{t}{2} = 31^0\ 35'\ 11''$$

$$t = 63^0\ 10'\ 22''$$

hinreichend übereinstimmend mit (10).

Man findet häufig auch andere Umformungen der Grundgleichung (2) angegeben, welche die Formel mehr für logarithmische Rechnung geeignet machen sollen. Ob man unmittelbar nach (2), oder nach (15) oder nach anderen Umformungen rechnen will, scheint mehr oder weniger Sache des Gutdünkens. Wir rechnen meist nach der Grundgleichung (2) selbst.

Wer den wiederholten Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen scheut, kann statt desselben die Additions- und Subtractions-Logarithmen anwenden.

Benützung einer Sternhöhe.

Wenn man statt einer Sonnenhöhe eine Sternhöhe gemessen hat, so geschieht zwar die Berechnung des Stundenwinkels t nach derselben Gleichung

(2) wie bei einer Sonnenhöhe, aber der Uebergang von dem Stundenwinkel zur mittleren Ortszeit gestaltet sich anders, nämlich durch Vermittlung der Rectascension des Sterns und der Sternzeit, nach der Grundgleichung (1) § 3. S. 7, wie folgendes Beispiel zeigt:

Am 26. December 1873 Abends, auf einem Lagerplatz Nekeb in der libyschen Wüste, maass ich die Höhe des Fixsterns Aldebaran, (welcher an diesem Abend zu einer Mond-Distanzmessung benutzt worden war) mit dem Theodolit Fig. 1. § 10. S. 38. Durch Verbindung der Ablesungen in zwei Fernrohrlagen mit dem arithmetischen Mittel der notirten Uhrzeiten ergab sich:

Chronometer $6^h\ 5^m\ 51{,}5^s$, Sternhöhe $= 46^0\ 44'\ 1''$
Lufttemperatur $= 10^0$ C., Barometerstand $= 740$ mm

hiernach wird die Refraction nach den Tafeln S. [7] [9] und [11] des Anhangs:

$$54'' - 0'' - 1'' = 53'', \text{ also wahre Höhe} = 46^0\ 44'\ 1'' - 53''$$
$$h = 46^0\ 43'\ 8''$$

Die Breite des Lagerplatzes war zuvor durch Polarsternhöhen bestimmt worden $\varphi = 27^0\ 15'\ 24''$, und die Länge war aus dem Itinerar vorläufig, für diesen Zweck hinreichend, $= 1^h\ 56^m$ östlich von Greenwich bekannt.

Der Nautical Almanac für 1873 gibt auf S. 347 die Position des Aldebaran (*α Tauri*) für den 26. December:

$$\text{Rectascension } \alpha = 4^h\ 28^m\ 41{,}9^s, \quad \text{Declination } \delta = +\ 16^0\ 15'\ 20''$$

und auf S. 223 die Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag für den 26. December $T = 18^h\ 20^m\ 12{,}7^s$.

Wenn man diese Werthe $h = 46^0\ 43'\ 8''$, $\varphi = 27^0\ 15'\ 24''$, $\delta = +\ 16^0\ 15'\ 20''$ in die Gleichung (2) S. 56 für $\cos t$ einsetzt, so liefert die Ausrechnung zunächst $t = 45^0\ 20'\ 48'' = 3^h\ 1^m\ 23{,}2^s$. Da aber der Stern im Osten stand, so ist dieses der von der Culmination rückwärts gezählte Stundenwinkel, und der in gewöhnlicher Weise positiv gezählte Stundenwinkel ist daher $= 24^h - 3^h\ 1^m\ 23{,}2^s = 20^h\ 58^m\ 36{,}8^s$. Nun hat man nach der Grundgleichung (1) S. 7

Stundenwinkel des Sterns t =	$20^h\ 58^m\ 36{,}8^s$
Rectascension des Sterns (s. o.) α =	$4^h\ 28^m\ 41{,}9^s$
Orts-Sternzeit $t + \alpha = S$ =	$25^h\ 27^m\ 18{,}7^s$

Es folgt die Verwandlung in mittlere Ortszeit nach S. 22, und hiezu reduciren wir die aus dem Nautical Almanac genommene Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag auf den Meridian des Beobachtungspunktes, dessen Länge $\lambda = 1^h\ 56^m$ östlich von Greenwich ist, dieses gibt nämlich nach der Tafel I auf S. [4] des Anhangs und S. 21 unten:

$$(\Delta\lambda) = -\ (0^m\ 18{,}7^s + 0{,}3^s) = -\ 19{,}0^s$$
$$\text{also } T + (\Delta\lambda) = 18^h\ 20^m\ 12{,}7^s - 19{,}0^s = 18^h\ 19^m\ 53{,}7^s$$

Man hat also Ortssternzeit (s. o.) S =	25^h	27^m	$18{,}7^s$
$T + (\varDelta\lambda) = T'$ =	18^h	19^m	$53{,}7^s$
$S - T'$ =	7^h	7^m	$25{,}0^s$
Zur Verwandlung in Sonnenzeit (Tafel II. S. [4])	—	1^m	$10{,}0^s$
Mittlere Ortszeit =	7^h	6^m	$15{,}0^s$
Das Chronometer zeigte	6^h	5^m	$51{,}5^s$
Also Correction des Chronometers +	1^h	0^m	$23{,}5^s$

Dieses Beispiel zeigt zugleich das gegenseitige Ineinandergreifen der Ortszeitbestimmung und der Breitenmessung. Zur Polarisbreiten-Bestimmung, welche hier als vorhergehend erwähnt worden ist, war nämlich ebenfalls schon die Kenntniss der Ortszeit erforderlich, doch genügte hiezu eine erste Näherung, wie sie das Itinerar liefert. Sollte diese erste Annahme von dem Schlussresultat erheblich abweichen, so hat man immer das Hülfsmittel, mit der verbesserten Ortszeit die Breite nochmals zu berechnen, und mit der so verbesserten Breite auch die Ortszeit neu zu bestimmen, oder besser, beide Bestimmungen in eine Ausgleichung zusammenzufassen. (§ 21.)

Verschiedene Anordnungen der Beobachtung.

Bei den beiden, im Vorstehenden mitgetheilten Beispielen wurde der Indexfehler des Höhenkreises sofort eliminirt durch Durchschlagen des Fernrohrs und Combination des so erhaltenen Höhenwinkels mit dem Mittel der Uhrablesungen; ja bei der Sonne wurde auch noch der Sonnenhalbmesser auf diese Weise eliminirt, indem bei beiden Fernrohrlagen der obere und untere, bezw. der untere und obere Sonnenrand genommen wurde.

Für vereinzelte Messungen ist dieses entschieden die beste Methode, denn die hiebei zu machende Annahme der Proportionalität zwischen der Zeitänderung und der Höhenänderung ist in der kurzen zum Durchschlagen und Neueinstellen erforderlichen Zeit von 1 — 2 Minuten mit der unter solchen Umständen nöthigen Genauigkeit immer zulässig.

Wenn man nun diese ganze Messung zwei- bis dreimal wiederholen will, so wird man auf die Anordnung geführt:

$$\textit{Lage}\quad I\quad II,\qquad II\quad I,\qquad I\quad II,$$
$$\frac{I+II}{2}\qquad \frac{II+I}{2}\qquad \frac{I+II}{2}$$

so dass man zu drei vollen Messungen 3mal durchschlagen muss.

Dieses wiederholte Durchschlagen ist aber nicht nur zeitraubend, sondern auch wegen der damit verbundenen Erschütterungen des Instrumentes der Genauigkeit schädlich. Für längere Reihen wird es sich deshalb empfehlen, den Indexfehler durch Beobachtung eines terrestrischen Zielpunktes wegzuschaffen, oder auf etwa 30″ genau zu bestimmen, und in Rechnung zu bringen, ebenso auch den Sonnenhalbmesser an den Messungen anzubringen, dennoch aber die Messungen so anzuordnen, dass der Indexfehlerrest im Resultat wieder eliminirt wird, also z. B.

Lage I Unterrand	I_1	I_2	I_3	I_4				
Lage II Oberrand					II_5	II_6	II_7	II_8

Diese 8 Messungen werden einzeln behandelt, oder vielleicht auch zu je zweien in Mittel zusammengezogen, und geben in ihrem Gesammtmittel ein vom Indexfehler befreites Resultat, denn der kleine Indexfehler-Rest wird auf die erste Hälfte der Beobachtungen denselben Einfluss ausüben wie auf die zweite Hälfte.

Für den Sonnenhalbmesser ist am Fusse der Refractionstafel S. [7] des Anhangs ein kleines Täfelchen mitgetheilt, nebst Angabe der Höhenparallaxe.

Durch wiederholte Bestimmung der Stand-Correction einer Uhr, etwa von Woche zu Woche, gelangt man zur Kenntniss des Ganges, den man am besten graphisch darstellt, wie bereits in § 12. S. 53 behandelt worden ist.

Anmerkungen.

Für wiederholten Gebrauch an demselben Orte kann man sich ein Schema zu der vorstehenden Berechnung (8)—(9) S. 59 oder (15) S. 60 autographiren, welches sofort $log\ sin\ \varphi$ und $log\ cos\ \varphi$ und die Vorbereitung der Interpolationsrechnung für δ und g enthält.

Bremiker hat in seinen „logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit 5 Decimalstellen Berlin 1872“ im Anhang eine besondere Hülfstafel zur Zeitberechnung nach der Formel (2) mitgetheilt, welche die Functionswerthe

$$log \frac{1}{cos\ \varphi\ cos\ \delta} = log\ m \text{ und } log\ - tang\ \varphi\ tang\ \delta) = log\ n$$

für die Breite von Berlin $\varphi = 52{,}505^0$ geben. Hiebei ist jedoch eine eigenthümliche Winkeltheilung, nämlich Sexagesimalgrade mit centesimaler Unterabtheilung (z. B. $52^0\ 30'\ 17'' = 52{,}505^0$) benützt. Die Abhängigkeit der Werthe $log\ m$ und $log\ n$ von der Zeit ist für alle Jahre von 1872 bis 1922 durch Hülfstafeln dargestellt, so dass eine besondere Ephemeride erspart wird.

Man hat auch anderwärts für Seegebrauch immerwährende Ephemeriden für Sonnendeclination und Zeitgleichung entworfen, z. B. nautische, astronomische und logarithmische Tafeln von Domke, Berlin 1874 S. 88—89.

Bei dem geringen Preis der genaueren, jedes Jahr neu herausgegebenen Ephemeriden, welche man für andere Zwecke ohnehin braucht (s. o. § 6. S. 18) ist das Bedürfniss einer abgekürzten immerwährenden Sonnen-Ephemeride nicht dringlich, weshalb wir auch die Beigabe einer solchen in unserem Anhange unterlassen haben.

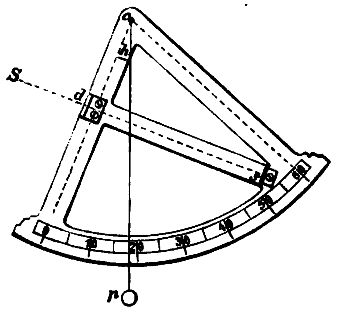
Was die Genauigkeit der in Rede stehenden Zeitbestimmungsmethode betrifft, so soll eingehende Erörterung hierüber später in § 15. angestellt werden, im Allgemeinen sei jetzt schon bemerkt, dass bei Vermeidung der Annäherung an den Mittag man mit einem gewöhnlichen Theodolit, der die Höhenwinkel auf 10"—20" genau gibt, bei einigen Wiederholungen wohl Genauigkeit von 1^s erreichen kann.

Für bürgerliche Zwecke, Regulirung von Thurmuhren auf dem Lande, und für ersten Unterricht, sind auch ganz rohe Messungen mit messingenen oder hölzernen Sextanten ohne Fernrohr, zu empfehlen, z. B. wird ein hölzerner Sextant von Reallehrer M. Eble im Verlag von Brandegger in Ellwangen (Württemberg) geliefert, der nicht durch Visiren, sondern durch Auffangen eines Sonnenbildes in bequemster Weise gehandhabt wird und an einem Lothfaden die Höhe mit Ablesung von 5′ gibt.

Umstehende Fig. 3. (aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1885 S. 58 (über künstliche Horizonte, von Gelcich), entlehnt), zeigt die Anordnung dieses einfachen Werkzeuges, das wir aus eigener Erfahrung dem Liebhaber der Astronomie gut empfehlen. Der Sektor wird über einem Wassergefäss festgeklemmt, in

welchem das Rosshaarloth p zur Ruhe kommt. Das Ganze wird auf 3 Stellschrauben so gestellt, dass der Lothfaden an der Ebene des Sektors gerade anliegt, und dass die Sonne S, durch zwei kleine Löcher bei d scheinend, gegenüber auf dem Plättchen bei D zwei helle Bilder erzeugt, deren Mitte auf eine Strichmarke einspielt. Man kann, mit der Uhr auf dem Tisch und mit einer Stellschraube in der Hand, rasch Reihen von 5 oder 10 Messungen machen, welche bei der Berechnung nach der Methode von S. 59 innerhalb weniger Zeitsecunden übereinstimmen. (Constante Fehler sind besonders zu untersuchen.)

Fig. 3. Hölzerner Sextant von Eble.



Eble ersetzt die Berechnung nach der Formel (2) durch eine mechanische Schiebevorrichtung mit einem Strahlendiagramm, welche Solchen zu empfehlen ist, welche die trigonometrische Rechnung scheuen.

Hier ist auch zu erwähnen: „Der Zeitmessknecht, Tabellen und Regeln zur Zeitbestimmung und Uhrenberichtigung nach gemessenen Sonnenhöhen etc. von M. R. Pressler, Professor in Tharandt, Commissionsbuchhandlung Liebeskind, Leipzig", gibt in zwei Theilen, I. 46° bis 50° Breite, und II. 50° bis 54° Breite, die mittlere Sonnenzeit als Function der geographischen Breite, der Jahreszeit und der gemessenen Sonnenhöhe. Die Breiten gehen von 1° zu 1°, die Sonnenhöhen ebenfalls von 1° zu 1°, und die Datumszahlen von 1 Tag zu 1 Tag. Wenn man die gemessenen Sonnenhöhen durch Abwarten wirklich je auf 1° rund ermittelt, im Uebrigen in die Tafel mit dem nächstliegenden Breitenwerth eingeht, so gibt die Tafel durch directes Aufschlagen eine Zeitgenauigkeit von etwa 2 Minuten. Z. B. würde für unser oben berechnetes Beispiel mit $\varphi = 52^\circ 23'$, $h = 34^\circ 12'$, auf S. 76 Band II. des Pressler'schen Zeitmessknechts, für den 4. Juli Vormittags einzugehen sein mit Breite zwischen 52° und 53°, Sonnenhöhe 34°, wo man findet: $7^h\ 50^m$, was mit unserer genauen Berechnung $7^h\ 51^m\ 20^s$ hinreichend übereinstimmt. (Man kann die Pressler'sche Zeitmessknechts-Tafel auch dazu benützen, bei genaueren Messungen und Berechnungen etwaige grobe Rechenfehler aufzufinden.)

§ 14. Aufgang und Untergang der Sonne.

Die Grundgleichung für Zeitbestimmung, nämlich (2) § 13. S. 56

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \tag{1}$$

gibt mit $h = 0$ den Stundenwinkel t_0 des Aufgangs oder Untergangs der Sonne, d. h. den halben Tagebogen, unter der Voraussetzung, dass die Refraction unwirksam wäre, und dass der Sonnenhalbmesser nicht in Betracht gezogen wird. Obgleich diese Umstände in Wirklichkeit anders sind, haben wir doch nach der Formel:

$$\cos t_0 = - \tan \varphi \tan \delta \tag{2}$$

die Werthe t_0, welche man zu manchen Zwecken brauchen kann, berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt:

Theoretischer halber Tagbogen t_0 (ohne Refraction).

Jahreszeit	δ	Geographische Breite φ								
		0^0	30^0	45^0	50^0	55^0	60^0	$66^0\ 33'$	75^0	90^0
22. Juni	$+\ 23^0\ 27'$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 58^m$	$7^h\ 43^m$	$8^h\ 4^m$	$8^h\ 33^m$	$9^h\ 15^m$	$12^h\ 0^m$	$12^h\ 0^m$	$12^h\ 0^m$
20. Mai und 24. Juli	$+\ 20^0$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 49^m$	$7^h\ 25^m$	$7^h\ 43^m$	$8^h\ 5^m$	$8^h\ 36^m$	$9^h\ 48^m$	$12^h\ 0^m$	$12^h\ 0^m$
1. Mai und 12. August . . .	$+\ 15^0$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 36^m$	$7^h\ 2^m$	$7^h\ 14^m$	$7^h\ 30^m$	$7^h\ 51^m$	$8^h\ 33^m$	$12^h\ 0^m$	$12^h\ 0^m$
16. April und 27. August . .	$+\ 10^0$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 23^m$	$6^h\ 41^m$	$6^h\ 49^m$	$6^h\ 58^m$	$7^h\ 11^m$	$7^h\ 36^m$	$8^h\ 45^m$	$12^h\ 0^m$
2. April und 10. September .	$+\ 5^0$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 12^m$	$6^h\ 20^m$	$6^h\ 24^m$	$6^h\ 29^m$	$6^h\ 35^m$	$6^h\ 47^m$	$7^h\ 16^m$	$12^h\ 0^m$
20. März und 23. September .	$\pm\ 0^0$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	. .
8. März und 6. October . .	$-\ 5^0$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 48^m$	$5^h\ 40^m$	$5^h\ 36^m$	$5^h\ 31^m$	$5^h\ 25^m$	$5^h\ 13^m$	$4^h\ 44^m$	$0^h\ 0^m$
23. Februar und 19. October .	$-\ 10^0$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 37^m$	$5^h\ 19^m$	$5^h\ 11^m$	$5^h\ 2^m$	$4^h\ 49^m$	$4^h\ 24^m$	$3^h\ 15^m$	$0^h\ 0^m$
8. Februar und 3. November	$-\ 15^0$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 24^m$	$4^h\ 58^m$	$4^h\ 46^m$	$4^h\ 30^m$	$4^h\ 9^m$	$3^h\ 27^m$	$0^h\ 0^m$	$0^h\ 0^m$
20. Januar und 21. November	$-\ 20^0$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 11^m$	$4^h\ 35^m$	$4^h\ 17^m$	$3^h\ 55^m$	$3^h\ 24^m$	$2^h\ 12^m$	$0^h\ 0^m$	$0^h\ 0^m$
21. December	$-\ 23^0\ 27'$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 2^m$	$4^h\ 17^m$	$3^h\ 56^m$	$3^h\ 27^m$	$2^h\ 45^m$	$0^h\ 0^m$	$0^h\ 0^m$	$0^h\ 0^m$

$\cos t_0 = \text{tang}\ \varphi\ \text{tang}\ \delta.$

Die wirkliche Aufgangs- und Untergangszeit eines Gestirns findet man, wenn man in der Gleichung (1) $h = -0^0\ 35'$ setzt, weil das Gestirn im Moment des Aufgangs zwar den scheinbaren Höhenwinkel $0^0\ 0'$, aber wegen der Refraction den wahren Höhenwinkel $= -0^0\ 35'$ hat. Man hat also:

$$\cos t_0' = \frac{-\sin 0^0\ 35' - \sin \varphi\ \sin \delta}{\cos \varphi\ \cos \delta} \qquad (3)$$

Dieser Formel mit Zufügung der Zeitgleichung entsprechen die Sonnen-Aufgänge und Untergänge, welche im Berliner astronomischen Jahrbuch, etwa auf S. 74—79 jedes Jahrgangs für Berlin (Breite $52^0\ 30'\ 17''$) von Tag zu Tag angegeben sind.

In Behm's Geographischem Jahrbuch, I. Band 1866, S. 17—20 wird von A. Auwers eine Tafel der Tageslängen für alle Breiten vom Südpol bis zum Nordpol von 5^0 zu 5^0, und für Declinationen zwischen -25^0 und $+25^0$ von 5^0 zu 5^0 mitgetheilt, wobei jedoch als Moment des Sonnenaufgangs und Sonnenuntergangs die scheinbare Berührung des oberen Sonnenrandes mit dem Horizont genommen ist.

Für besondere Zwecke kann man sich jederzeit eine Tafel nach Gleichung (3) berechnen, wie z. B. für die Breiten 25^0, 27^0, 29^0 eine solche Tafel von mir auf S. 99 der „Physischen Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ mitgetheilt ist. Beim Mangel anderer Zeitbestimmung kann man hiernach immer seine Uhr auf etwa 5^m genau reguliren, was für manche Zwecke ausreicht.

Zur Uebersicht über die schon innerhalb Deutschlands für bürgerliche Zwecke nicht unerheblichen Tageslängen-Differenzen, und zur Uebersicht der zu Polarsternbeobachtungen günstigen Dämmerungszeiten haben wir im Anhang auf S. [14] die Sonnen-Auf- und Untergangszeiten für die Breiten 49^0 (Karlsruhe) und $52^0\ 30'$ (Berlin) von 7 zu 7 Tagen zusammengestellt.

§ 15. Geschwindigkeit und Beschleunigung der Höhen-Aenderung.

Die Geschwindigkeit der Höhenänderung der Sonne oder eines Sterns ist von Interesse, weil davon die Genauigkeit der aus Höhenmessungen abgeleiteten Zeitbestimmungen abhängt, und die Beschleunigung der Höhenänderung ist zu untersuchen zur Beantwortung der Frage, innerhalb welcher Grenzen die Höhenänderung als gleichförmig angenommen werden darf, und mit welcher Näherung man das arithmetische Mittel von 2 oder mehr Messungen in Bezug auf Zeit und Höhe als zusammengehörig gelten lassen darf.

Die Grundgleichung (1) § 13. (S. 56) nämlich

$$\sin h = \sin \varphi\ \sin \delta + \cos \varphi\ \cos \delta\ \cos t \qquad (1)$$

gibt nach h und nach t differentiirt:

$$\cos h\ dh = -\cos \varphi\ \cos \delta\ \sin t\ dt$$

$$\frac{dh}{dt} = -\cos \varphi\ \cos \delta\ \frac{\sin t}{\cos h} \qquad (2)$$

und wenn man nun Δh in Bogenmaass, Δt in Zeitmaass rechnet, so hat man:

$$\Delta h^{('')} = -15 \cos\varphi \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h} \Delta t^{(s)} \tag{3}$$

Hiernach ist folgende Tafel für die Breite $\varphi = 50^0$ berechnet worden, wobei die zu (3) nöthigen h aus der Tafel von S. [15] des Anhangs genommen wurden.

I. Höhenänderung der Sonne in 1 Zeitsecunde für die Breite $\varphi = 50^0$.

Jahreszeit	Declination δ	Stundenwinkel t								
		0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h
22. Juni	+ 23° 27′	0,0″	4,7″	7,6″	9,0″	9,6″	9,6″	9,3″	8,6″	7,7″
20. Mai u. 24. Juli	+ 20°	0,0″	4,4″	7,3″	8,8″	9,5″	9,6″	9,4″	8,8″	
16. April u. 27. August	+ 10°	0,0″	3,7″	6,5″	8,2″	9,2″	9,6″	9,6″	9,2″	
20. März u. 23. Sept.	± 0°	0,0″	3,0″	5,4″	7,2″	8,5″	9,3″			
23. Febr. u. 19. Octob.	— 10°	0,0″	2,8″	5,2″	7,1″	8,4″	9,2″			
20. Januar u. 21. Nov.	— 20°	0,0″	2,5″	4,7″	6,5″	7,9″				
21. December	— 23° 27′	0,0″	2,4″	4,5″	6,3″	7,7″				

Wenn man die Höhenmessung mindestens 2 Stunden vom Mittag entfernt hält, so genügt es, den Höhenwinkel auf 5″—10″ genau zu messen, um die Zeit auf etwa 1^s genau zu erhalten.

Die Höhenbeschleunigung erhält man durch abermaliges Ableiten von (2), nämlich:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\cos\varphi \cos\delta \left\{ \frac{\cos t \cos h + \sin t \sin h \frac{dh}{dt}}{\cos^2 h} \right\}$$

oder mit Einsetzung von $\frac{dh}{dt}$ nach (2)

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos t}{\cos h} + \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\cos h}\right)^2 \operatorname{tang} h \tag{4}$$

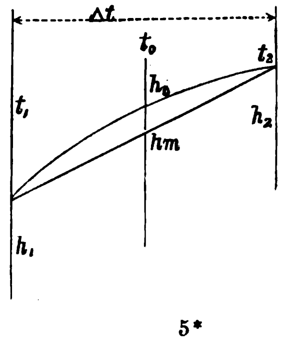
Nun denken wir uns, von zwei zusammengehörigen Werthen h_0 und t_0 ausgehend, die Höhenänderung nach Potenzen der Zeitänderung Δt in einer Reihe entwickelt, d. h. nach Andeutung der schematischen Figur 1.:

$$h_2 = h_0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{dh}{dt} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{\Delta t}{2} \frac{dh}{dt} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

$$\frac{h_1 + h_2}{2} = h_0 + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

Fig. 1. Höhenänderung als Function der Zeitänderung.



Setzt man den Werth (4) hier ein, so wie die Abkürzung h_m für den Mittelwerth aus h_1 und h_2, wie bei Fig. 1. beigeschrieben ist, und bringt man zugleich die nöthigen Maassumwandlungen an, so erhält man:

$$(h_0 - h_m)^{('')} = (\Delta t^{(s)})^2 \frac{225}{8\,\varrho''}\left(\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos t}{\cos} - \left(\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\cos h}\right)^2 \operatorname{tang} h\right) \quad (5)$$

hiebei ist $$\log \frac{225}{8\,\varrho''} = 6.13467 - 10$$

Für ein Zeitintervall von 10 Minuten, welches wir der nachfolgenden Tafel zu Grunde legen, hat man in (5) einzusetzen

$$\Delta t^{(s)} = 600, \text{ womit man erhält}$$

$$h_0 - h_m = 49{,}09''\left(\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos t}{\cos h} - \left(\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\cos h}\right)^2 \operatorname{tang} h\right) \quad (6)$$

Wenn die Werthe Δh nach (3) bereits berechnet vorliegen, wie in unserer vorstehenden Tabelle I., so kann man sie zur Berechnung einer Tabelle für $h_0 - h_m$ benützen, aus (5) und (3) findet man nämlich:

$$(h_0 - h_m)^{('')} = \frac{15}{8\,\varrho''}\,\Delta t^{(s)}\,\Delta h^{('')}\operatorname{cotg} t - \frac{(\Delta h^{('')})^2}{8\,\varrho''}\operatorname{tang} h \quad (7)$$

Wenn man hier ein Zeitintervall von 10 Minuten einführen will, so ist $\Delta t^{(s)} = 600$ zu setzen, und wenn man unter $\Delta h^{('')}$ die Werthe der Tabelle I. verstehen will, welche selbst zu einem Zeitwerth 1^s gehören, so ist auch für $\Delta h^{('')}$ der Factor 600 zuzusetzen, und damit erhält man aus (7):

$$h_0 - h_m = 3{,}2732''\,\Delta h^{('')}\operatorname{cotg} t - 0{,}2182''\,(\Delta h^{('')})^2 \operatorname{tang} h$$

wo $\Delta h^{('')}$ aus der Tabelle I. zu entnehmen ist.

Für $t = 0$ versagt indessen diese Formel, weil hier $\Delta h = 0$ ist. In diesem Falle hat man wieder nach (5), mit $h = 90^0 - (\varphi - \delta)$:

$$h_0 - h_m = \frac{\Delta t^2}{8}\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$$

$$(h_0 - h_m)^{('')} = \frac{225}{8\,\varrho''}\,600^2\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} = 40{,}99''\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \quad (8)$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Tafel II. berechnet worden.

II. Höhendifferenz $h_0 - h_m$ für ein Zeitintervall $\Delta t = 10$ Minuten nach Fig. 1. und Formel (5) bis (8), für die Breite $\varphi = 50^0$ (Functionswerth C für die Gleichung (10))

Jahreszeit	Declination δ	Stundenwinkel t								
		0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h
22. Juni	$+23^0\,27'$	+65″	+49″	+25″	+11″	+ 3″	−2″	−6″	−10″	−15″
20. Mai u. 24. Juli	$+20^0$	+59″	+48″	+27″	+13″	+ 4″	−1″	−5″	−10″	
16. April u. 27. Aug.	$+10^0$	+48″	+42″	+28″	+16″	+ 8″	+2″	−3″	− 7″	
20. März u. 23. Sept.	0^0	+40″	+35″	+26″	+18″	+11″	+8″			
23. Febr. u. 19. Oct.	-10^0	+36″	+33″	+27″	+20″	+13″	+7″			
20. Jan. u. 21. Nov.	-20^0	+32″	+30″	+25″	+20″	+14″				
21. December	$-23^0\,27'$	+30″	+29″	+25″	+20″	+14″				

Die Vergleichung dieser Tafel II. mit der früheren Tafel I. zeigt, dass die Beschleunigung gleich Null wird, wenn die Geschwindigkeit ihr Maximum erreicht, dieses wird nachher noch theoretisch klarer gemacht werden. Zuvor ist die praktische Bedeutung der Tabellenwerthe II. zu untersuchen, wozu das Beispiel von § 13. (S. 57) dienen mag. Es wurden am 4. Juli Vormittags $7^h\ 50^m$ zwei Höhen mit der Zwischenzeit $\Delta t = 1^m\ 47^s$ combinirt. Die Tafel II. gibt mit $t = 4^h\ 10^m$ (nämlich $12^h - 7^h\ 50^m$) im Juli etwa $h_0 - h_m = 4''$, gültig für $\Delta t = 10^m$, also, da $h_0 - h_m$ mit dem Quadrate des Zeitintervalls wächst, kommt auf $1^m\ 47^s = 1{,}8^m$ nur $\left(\frac{1{,}8}{10}\right)^2 4'' = 0{,}1''$, oder es war die Mittelbildung auf S. 57 unbedingt zulässig, während in der Nähe des Mittags auch bei diesem kleinen Zeitintervall doch schon $h_0 - h_m$ den Werth von $1''$ erreicht haben würde.

Wir betrachten noch die Mittelbildung aus Gruppen mehrerer Messungen. Es seien z. B. 4 Höhen $h_1\ h_2\ h_3\ h_4$ auf das Gesammtintervall Δt gleich vertheilt. Ist Δt in Einheiten von 10 Minuten gezählt, und C der Tafelwerth II., so hat man zur Reduction des Mittels aus h_1 und h_4 (Fig. 2.):

$$h' = \frac{h_1 + h_4}{2} + C\,(\Delta t)^2$$

ferner zur Reduction des Mittels aus h_2 und h_3:

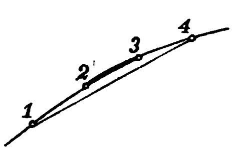
$$h'' = \frac{h_2 + h_3}{2} + C\left(\frac{\Delta t}{3}\right)^2$$

Also Gesammtmittel

$$h_0 = \frac{h' + h''}{2} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} + \frac{5}{9}\,C\,(\Delta t)^2 \qquad (9)$$

Wenn man diese Betrachtung von 4 Höhen auf allgemein n gleichförmig vertheilte Höhen ausdehnt, so findet man das Resultat, dass das arithmetische Mittel t_0 der n Zeitbeobachtungen und das arithmetische Mittel h_m der Höhenbeobachtungen nicht unmittelbar zusammengehören, sondern es gehört zu der Mittelzeit t_0 eine Mittelhöhe h_0, welche aus dem arithmetischen Mittel h_m und dem Gesammt-Intervall berechnet wird durch die Formel

Fig. 2.
Mittelbildung aus 4 Höhen.



$$h_0 - h_m = \frac{1}{3}\,\frac{n + 1}{n - 1}\,C\,(\Delta t)^2 \qquad (10)$$

wo C der Werth der Tabelle II. und Δt in Einheiten von 10 Minuten zu nehmen ist. Insbesondere ist:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Für } n = 2 & \frac{1}{3}\frac{n+1}{n-1} = & 1 = 1{,}00 \\
n = 3 & \text{"} & \frac{2}{3} = 0{,}67 \\
n = 4 & \text{"} & \frac{5}{9} = 0{,}56 \\
n = 5 & \text{"} & \frac{1}{2} = 0{,}50 \\
n = 6 & \text{"} & \frac{7}{15} = 0{,}47 \\
n = 7 & \text{"} & \frac{4}{9} = 0{,}44 \\
n = 8 & \text{"} & \frac{3}{7} = 0{,}43 \\
n = 9 & \text{"} & \frac{5}{12} = 0{,}42 \\
n = 10 & \text{"} & \frac{11}{27} = 0{,}41
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Man habe z. B. am 20. Mai nahe am Mittag in der Zeit von 5 Minuten rasch hintereinander 5 Sonnenhöhen gemessen, und das arithmetische Mittel der Zeiten t_0 sowie das arithmetische Mittel der Höhen h_m berechnet. Die Tafel II. gibt $C = 59''$, es ist also nach (10) und (11) mit $n = 5$:

$$h_0 - h_m = 0{,}50 \times 59'' \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 7{,}4'' \qquad (12)$$

d. h. das arithmetische Mittel h_m der 5 gemessenen Höhen ist wegen der Krümmung der Sonnenbahn um 7″ zu klein. Es ist zwar immer viel besser, schon wegen der Genauigkeits-Uebersicht, alle Höhen einzeln auszurechnen, als Mittel zu bilden; wenn man aber wegen der Rechnungserleichterung zur Mittelbildung sich entschliesst, so gibt vorstehende Theorie wenigstens die Möglichkeit, die dadurch begangenen Fehler zu schätzen und summarisch zu verbessern.

Umformung der Höhengeschwindigkeits-Formel.

Unsere oben gefundene Differentialformel (2), nämlich

$$dh = -\cos\varphi \cos\delta \frac{\sin t}{\cos h}\, dt \qquad (13)$$

lässt sich in zweifacher Weise umformen. Wir nehmen hiezu in Fig. 3. das astronomische Dreieck von § 4. S. 11 Fig. 3. nochmals vor; dasselbe gibt die Sinusbeziehungen

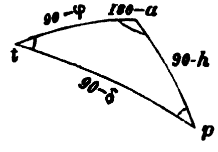
$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\cos\delta}{\cos h} \text{ und } \frac{\sin t}{\sin p} = \frac{\cos h}{\cos\varphi} \qquad (14)$$

Setzt man diese Beziehungen in (13), so erhält man zwei neue Formen:

$$dh = -\cos\varphi \sin a\, dt \text{ oder } \Delta h^{(\prime\prime)} = -15 \cos\varphi \sin a\, \Delta t^{(m)} \qquad (15)$$

$$dh = -\cos\delta \sin p\, dt \text{ oder } \Delta h^{(\prime\prime)} = -15 \cos\delta \sin p\, \Delta t^{(m)} \qquad (16)$$

Fig. 3. Astronomisches Dreieck.



Die Formel (15) sagt, dass die Höhengeschwindigkeit an einem Orte (φ constant) nur von dem Azimut a abhängt und für $a = 90^0$, d. h. im ersten Vertical, ihr Maximum erreicht. Für Zeitbestimmungen aus Sonnenhöhen ist es daher von Wichtigkeit, zu wissen, wann die Sonne in den ersten Vertical kommt. Setzt

man in Fig. 3. den Winkel $180^0 - a = 90^0$, so wird das Dreieck an dieser Stelle rechtwinklig und man hat dann

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\,(90^0 - \varphi)}{\operatorname{tang}\,(90^0 - \delta)} = \operatorname{tang}\,\delta\,\operatorname{cotg}\,\varphi \tag{17}$$

hiernach ist folgende Tafel berechnet:

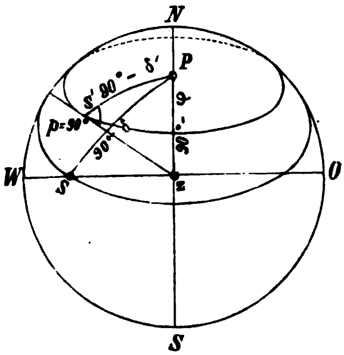
Stundenwinkel für die Sonne im ersten Vertical.

Jahreszeit	Declination δ	Geographische Breite φ		
		45°	50°	55°
22. Juni	+ 23° 27′	4h 17m	4h 35m	4h 49m
20. Mai und 24. Juli	+ 20°	4h 35m	4h 49m	5h 1m
1. Mai und 12. August	+ 15°	4h 58m	5h 8m	5h 17m
16. April und 27. August	+ 10°	5h 19m	5h 26m	5h 32m
2. April und 10. September	+ 5°	5h 40m	5h 43m	5h 46m
20. März und 23. September	0°	6h 0m	6h 0m	6h 0m

Im Winter kommt die Sonne erst unter dem Horizont in den ersten Vertical.

Für solche Gestirne, welche überhaupt nicht in den ersten Vertical gelangen, ist die günstigste Höhenbeobachtungszeit durch die Gleichung (16) bestimmt, nämlich dann, wenn der parallaktische Winkel $p = 90^0$ wird. Man sagt dann, das Gestirn befinde sich im „stationären Azimut", oder auch in der „grössten Digression". Setzt man, um diese Zeit zu erhalten in Fig. 3. $p = 90^0$, so wird

Fig. 4.
Erster Vertical und stationäres Azimut.



$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\,(90^0 - \delta)}{\operatorname{tang}\,(90^0 - \varphi)} = \operatorname{tang}\,\varphi\,\operatorname{cotg}\,\delta \tag{18}$$

Die Frage, ob ein Gestirn mit der Declination δ für einen Punkt unter der Breite φ in den ersten Vertical oder ins stationäre Azimut kommt, wird durch den Anblick von Fig. 4. auf die Frage zurückgeführt, ob der Abstand PS oder PS' grösser oder kleiner als PZ ist, d. h. ob $90^0 - \delta$ grösser oder kleiner als $90^0 - \varphi$ ist, oder ob δ kleiner oder grösser als φ ist, d. h. also:

$$\text{Das Gestirn kommt in} \left\{\begin{array}{l}\text{ersten Vertical}\\ \text{Zenit}\\ \text{stationäres Azimut}\end{array}\right\} \text{wenn} \left\{\begin{array}{l}\delta < \varphi\\ \delta = \varphi\\ \delta > \varphi\end{array}\right\}$$

Einfluss eines Breitenfehlers auf die Zeitbestimmung.

Um diesen Einfluss zu bestimmen, hat man die Grundgleichung (1) nach t und nach φ zu differentiiren. Diese Gleichung, nach t aufgelöst, ist

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \delta} \, \frac{1}{\cos \varphi} - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

woraus:
$$- \sin t \, dt = \left(\frac{\sin h}{\cos d} \, \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi \tag{19}$$

nach (14) und nach Fig. (3.) ist

$$\cos \delta \sin t = \sin a \cos h$$
$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$

also

$$- \sin a \cos h \, dt = \sin h \, \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a}{\cos^2 \varphi}$$
$$= + \frac{\cos h}{\cos \varphi} \cos a$$
$$dt = - \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} \, d\varphi$$
$$\varDelta t^{(s)} = - \frac{1}{15} \, \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \varphi} \, \varDelta \varphi^{('')} \tag{20}$$

hieraus folgt als Hauptresultat, dass im ersten Vertical mit $a = 90^0$, $\varDelta t = 0$ wird, d. h. im ersten Vertical ist die Ortszeitbestimmung nahezu unabhängig von der Kenntniss der Breite.

Dieses Resultat ist namentlich auf Reisen und insbesondere für den Seemann wichtig.

Wir betrachten in dieser Hinsicht nochmals das Beispiel von S. 61. Der Stern Aldebaran befand sich im Azimut etwa $a = 82^0$, von Süden nach Osten (die Kenntniss dieses Azimuts war auch für die Monddistanz-reduction nöthig) und mit $\varphi = 27^0$ hat man nun aus (20):

$$\varDelta t^{(s)} = 0{,}01 \, \varDelta \varphi^{('')}$$

Schätzt man $\varDelta \varphi^{('')}$ sogar zu $\pm 30''$, so erzeugt dieses einen Zeitfehler von nur $0{,}3^s$, weil der Stern nahe im Osten stand. Wäre ein Stern im Azimut 45^0 benützt worden, so würde man in diesem Fall einen Zeitfehler von $2{,}2^s$ erhalten haben.

§ 16. Zeitbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen.

Jeder Fixstern beschreibt am Himmel täglich einen zum Meridian symmetrischen Bogen. Wenn man daher einen solchen Stern in zwei Lagen gleich hoch links und rechts vom Meridian beobachtet, so entspricht

das arithmetische Mittel der beiden hiebei notirten Uhrzeiten dem Durchgang des Sterns durch den Meridian, und zwar unabhängig von dem Gange der Uhr, weil die Verzögerung oder Voreilung dieses Ganges sich im Mittel aufhebt.

Auf die Sonne kann man diese Methode, die Zeit der Culmination zu bestimmen, nicht unmittelbar anwenden, weil die Sonne ihren Ort am Himmel selbst ändert, und zwar sowohl in Rectascension als auch in Declination. Die Rectascensionsänderung (als gleichförmig angenommen), eliminirt sich ebenso wie der Gang der Uhr von selbst und der Einfluss der Declinationsänderung wird durch folgende Betrachtung gefunden:

Für eine Höhe h, Declination δ und Breite φ hat man den Stundenwinkel t nach (2) § 13. (S. 56), gegeben durch die Gleichung:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \tag{1}$$

Die Ableitung nach t und nach δ gibt:

$$-\sin t \, d t = \frac{\sin h}{\cos \varphi} \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} d \delta - \tang \varphi \frac{1}{\cos^2 \delta} d \delta \tag{2}$$

Es ist aber nach (1):

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin h \sin \delta = \sin \varphi \sin^2 \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \delta \cos t.$$

Dieses in (2) eingesetzt gibt:

$$-\sin t \, dt = \frac{d \delta}{\cos \varphi \cos^2 \delta} (\sin \varphi \sin^2 \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \delta \cos t - \sin \varphi)$$

$$-\sin t \, dt = \frac{d \delta}{\cos \varphi \cos^2 \delta} (-\sin \varphi \cos^2 \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \delta \cos t)$$

$$d t = \left(\frac{\tang \varphi}{\sin t} - \tang \delta \cotg t\right) d \delta \tag{3}$$

Es sei für die Vormittagsbeobachtung der Stundenwinkel $= -t$ und die Declination $= \delta$, für die Nachmittagsbeobachtung der Stundenwinkel $= t + \varDelta t$ und die Declination $= \delta + \varDelta \delta$. Dann ist das arithmetische Mittel der beiden Stundenwinkel

$$\frac{-t + (t + \varDelta t)}{2} = + \frac{\varDelta t}{2}$$

und man muss daher das arithmetische Mittel der beobachteten Uhrzeiten um $\frac{\varDelta t}{2}$ vermindern, um auf den Moment der Culmination (Stundenwinkel = Null) zu kommen, oder man sagt: es ist die Mittagsverbesserung v:

$$v = -\frac{\varDelta t}{2} \tag{4}$$

Δt ergibt sich aber aus der Declinationsänderung $\Delta \delta$ nach der Differentialgleichung (3):

$$\Delta t^{(s)} = \left(\frac{tang\ \varphi}{sin\ t} - tang\ \delta\ cotg\ t\right) \frac{\Delta \delta^{('')}}{15} \qquad (5)$$

wo der Nenner 15 zur Verwandlung von Bogensecunden in Zeitsecunden zugesetzt ist.

$\Delta \delta^{('')}$ ergibt sich durch Proportionalrechnung aus der im Nautical Almanac angegebenen stündlichen Declinationsänderung, welche mit μ_1 bezeichnet sein möge. Ist nämlich $t^{(h)}$ die halbe Zwischenzeit in Stunden gezählt, so ist die Gesammtdeclinationsänderung von der Vormittags- bis zur Nachmittagsbeobachtung:

$$\Delta \delta^{('')} = 2\, t^{(h)}\, \mu_1, \qquad (6)$$

also aus (4), (5) und (6).

$$\text{Mittagsverbesserung } v^{(s)} = -\mu_1 \frac{t^{(h)}}{15} \left(\frac{tang\ \varphi}{sin\ t} - tang\ \delta\ cotg\ t\right) \qquad (7)$$

Zur tabellarischen Berechnung wird gesetzt:

$$-\frac{t^{(h)}}{15}\,\frac{1}{sin\ t} = A, \qquad +\frac{t^{(h)}}{15}\, cotg\ t = B \qquad (8)$$

oder mit $t = t^{(m)}$ in Zeitminuten:

$$-\frac{t^{(m)}}{900}\,\frac{1}{sin\ t} = A \qquad +\frac{t^{(m)}}{900}\, cotg\ t = B \qquad (9)$$

dann ist die Mittagsverbesserung:

$$v^{(s)} = \mu_1\ A\ tang\ \varphi + \mu_1\ B\ tang\ \delta. \qquad (10)$$

Die Logarithmen der Coefficienten A und B sind auf der Tafel S. [16] des Anhangs zusammengestellt. (Zugleich ist dort *log* A' für Meridianverbesserung nach § 17. mit aufgenommen.) Wegen der Ungleichheit der Differenzen wird zwar *log* A und *log* B aus S. [16] nicht auf vier Stellen genau durch Interpolation erhalten, jedenfalls erhält man aber nach dieser Rechnung noch 0,1 Zeitsecunden genau.

Für geringere Genauigkeit von nur 1 — 2 Zeitsecunden wurde die zweite Tafel, S. [17] des Anhangs, zunächst für die Breite 49° (Karlsruhe) berechnet, welche aber auf 1—2 Secunden genau auch für ganz Deutschland gebraucht werden kann.

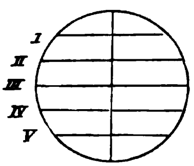
Für eine besondere Mittelbreite kann man sich immer ein Täfelchen nach Art von S. [17] berechnen; wie z. B. in des Verf. „Physische Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste“ S. 6 ein solches Täfelchen für die Breite 28° mitgetheilt ist.

Streng genommen sollte an der Mittagsverbesserung (7) und (10) noch die Reduction von Sternzeit auf Sonnenzeit angebracht werden,

welche aber niemals 0,1 Secunde erreicht und daher vernachlässigt werden kann.

Als Instrument zum Messen der gleichen Höhen vor und nach Mittag setzen wir einen Theodolit von der Art wie Fig. 4. S. 41 voraus. Man stellt etwa die Alhidade des Höhenkreises auf einer beliebigen Stelle des Limbus fest (wobei man den absoluten Werth des Höhenwinkels nicht zu kennen braucht), beobachtet bei gut einspielender Längslibelle Vormittags den Moment der Berührung eines Sonnenrandes mit dem Horizontalfaden des Fernrohrs und ebenso Nachmittags, dann hat man in diesen zwei Uhrbeobachtungen eine vollständige Zeitbestimmung. Zur Controle kann man bei derselben Fernrohrstellung beide Randberührungen der Sonne beobachten. Will man noch mehr Messungen vereinigen, so hat man zuerst das Mittel, die Alhidade des Höhenkreises nach und nach auf verschiedene Theilstriche einzustellen, die man dann Nachmittags in umgekehrter Reihenfolge wieder vornimmt. So kann man beliebig lange Reihen von je 5, 10, 20 Ablesungen bilden, und dadurch die Genauigkeit ziemlich steigern. Indessen ist das beständige Neueinstellen der Striche des Höhenkreises mühsam, lenkt die Aufmerksamkeit von der Zeitbeobachtung ab, erschüttert das Instrument und ist schon an sich nicht so genau wie das Festhalten einer Einstellung. Ein besseres Mittel der Beobachtungshäufung ist die Benutzung von mehr als einem Horizontalfaden im Ocular des Fernrohrs. Ich habe bei dem Theodolit von § 10. Fig. 4. S. 41 das Ocular, welches ursprünglich fünf verticale und einen horizontalen Faden zeigte, für den Zweck der correspondirenden Sonnenhöhen um 90° gedreht, so dass es den Anblick von Fig. 1. gewährt.

Fig. 1.
Horizontalfäden für correspondirende Sonnenhöhen.



Mit den 5 Horizontalfäden allein ist aber der Zweck noch nicht erreicht, es kommt auch noch darauf an, dem Fernrohr für die ganze Dauer der Messungen eine constante Neigung gegen den Horizont zu erhalten, und hiezu haben wir an der Horizontalachse des Theodolits S. 41 eine besondere Libelle L'' anbringen lassen, welche mittelst eines hölzernen Futters A an die rauh gemachte Horizontalachse scharf angeschraubt werden kann. (Das hölzerne Futter A ist deswegen so weit gehalten, damit dieselbe Libelle auch an unser Passage-Instrument (§ 18.) angeschraubt werden kann). Die Libelle L'' hat links eine auf eine Spiralfeder wirkende Mikrometerschraube, welche aber nur vor dem ersten Einstellen benutzt werden darf. Wird im Laufe der Messungen neues Einstellen der Libelle L'' nöthig, so muss hiezu eine hintere oder vordere Stellschraube des Dreifusses in Angriff genommen werden.

Wenn man mit dieser Einrichtung an jedem der 5 Horizontalfäden beide Sonnenränderberührungen beobachtet, so hat man ziemlich mühelos 10 Zeitbestimmungen, welche in ein Mittel vereinigt werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Hannover, Technische Hochschule, 2. April 1884.

Zeitbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen:

Faden		Vormittag		Nachmittag	Mittel
I.	Eintritte	$9^h\ 10^m\ 1^s$	Austritte	$3^h\ 2^m\ 47^s$	$12^h\ 6^m\ 24{,}00^s$
II.		$10^m\ 32{,}5^s$		$2^m\ 17^s$	$24{,}75^s$
III.		$11^m\ 5^s$		$1^m\ 43^s$	$24{,}00^s$
IV.		$11^m\ 36^s$		$1^m\ 13^s$	$24{,}50^s$
V.		$12^m\ 8^s$		$3^h\ 0^m\ 40{,}5^s$	$24{,}25^s$
I.	Austritte	$9^h\ 14^m\ 25^s$	Eintritte	$2^h\ 58^m\ 24^s$	$24{,}50^s$
II.		$14^m\ 57^s$		$57^m\ 52^s$	$24{,}50^s$
III.		$15^m\ 30^s$		$57^m\ 17^s$	$23{,}50^s$
IV.		$16^m\ 0^s$		$56^m\ 48^s$	$24{,}00^s$
V.		$16^m\ 32^s$		$2^h\ 56^m\ 14^s$	$23{,}00^s$
Mittel		$9^h\ 13^m\ 16{,}65^s$		$2^h\ 59^m\ 31{,}55^s$	$12^h\ 6^m\ 24{,}10^s$

Zwischenzeit $2t = 5^h\ 46^m\ 14{,}90^s$

Halbe „ $t = 2^h\ 53^m\ 7{,}45^s$

Der Nautical Almanac für 1884 S. 56 gibt für den 2. April, wahrer Mittag

Declination $\delta = +\ 5^0\ 12'$, stündliche Aenderung $\mu_1 = +\ 57{,}47''$

Zeitgleichung $g = +\ 3^m\ 27{,}76$ stündliche Aenderung $= -\ 0{,}746^s$.

δ und μ_1 können unmittelbar gebraucht werden (weil es bei δ auf Genauigkeit von 1′ nicht ankommt), für die Zeitgleichung hat man, da Hannover $0^h\ 39^m = 0{,}65^h$ östlich von Greenwich liegt, den Proportionaltheil $-\ 0{,}65\ (-\ 0{,}746^s) = +\ 0{,}48^s$ in Rechnung zu bringen, und hat damit die Zeitgleichung im wahren Hannover-Mittag

$$g = +\ 3^m\ 27{,}76^s + 0{,}48^s = +\ 3^m\ 28{,}24^s$$

Nun kommt die Berechnung von v nach der Formel (10) und der Hülfstafel S. [16]. $t = 2^h\ 53{,}1^m$ gibt nach dieser Tafel $log\ A = 9.4480_n$ $log\ B = 9.3100$

$\mu_1 = +\ 57{,}47''$	$log\ \mu_1$ 1.7594	$log\ \mu_1$ 1.7594
	$log\ A$ 9.4480_n	$log\ B$ 9.3100
$\varphi = 52^0\ 23'$ $\delta = +\ 5^0\ 12'$	$log\ tang\ \varphi$ 0.1132	$log\ tang\ \delta$ 8.9591
	1.3206_n	0.0285
	$-\ 20{,}92$	$+\ 1{,}07$

$v = -\ 19{,}85^s$

Unverbesserter Mittag $12^h\ 6^m\ 24{,}10^s$

Wahrer Mittag $12^h\ 6^m\ 4{,}25^s$

soll $12^h + g = 12^h\ 3^m\ 28{,}24^s$

Correction der Uhr $-\ 2^m\ 36{,}01^s$

d. h. mittlere Hannoveraner Ortszeit = Angabe der Uhr — $2^m\ 36{,}0^s$.

Mitternachtsverbesserung. Wenn man zwei gleiche Sonnenhöhen, die eine Nachmittags und die andere am Vormittag des folgenden

Tages combinirt, so gelten für die Mitternacht im Wesentlichen dieselben Betrachtungen wie vorher für den Mittag. Die Formel für die zugehörige „Mitternachtsverbesserung" wird aber abgeändert, weil der Stundenwinkel t nun von Mitternacht gezählt wird. Setzt man in der Entwicklung (1) bis (3) überall $180^0 - t$ oder $12^h - t$ an Stelle von t, so geht (3) über in:

$$d\,t = \left(-\frac{tang\,\varphi}{sin\,t} - tang\,\delta\;cotg\,t\right)d\,\delta$$

und statt (7) bekommt man die

Mitternachtsverbesserung $v^{(s)} = -\mu_1 \frac{t^{(h)}}{15}\left(-\frac{tang\,\varphi}{sin\,t} - tang\,\delta\;cotg\,t\right)$

Es wird gesetzt

$$+\frac{t^{(h)}}{15}\,\frac{1}{sin\,t} = A \qquad +\frac{t^{(h)}}{15}\,cotg\,t = B \tag{11}$$

womit die Mitternachtsverbesserung wird:

$$v^{(s)} = \mu_1\,A\;tang\,\varphi + \mu_1\,B\;tang\,\delta \tag{12}$$

d. h. es gilt für die Mitternachtsverbesserung der Form nach dieselbe Formel wie früher (10) für die Mittagsverbesserung, es hat aber nun A nach (11) gegen (9) sein Vorzeichen geändert. Hiernach sind $log\,A$ und $log\,B$ im zweiten Theil der Hülfstafel von S. [16] berechnet worden.

Zu einem Beispiel der Zählung über Mitternacht nehmen wir die soeben behandelte Nachmittagsbeobachtung vom 2. April 1884 zusammen mit einer Vormittagsbeobachtung vom 3. April, nämlich, sofort in Mittelzahlen:

2. April Nachmittag	3. April Vormittag	Mittel
$2^h\ 59^m\ 31{,}55^s$	$9^h\ 10^m\ 16{,}30^s$	$12^h\ 4^m\ 53{,}92^s$
$2\,t = 18^h\ 10^m\ 44{,}75^s$		
$t = 9^h\ 5^m\ 22{,}38^s$		

Naut. Alm. für 1884 S. 56 gibt für 2. und 3. April:

$$\delta = \frac{5^0\ 12' + 5^0\ 35'}{2} = +\,5^0\ 23' \qquad \mu_1 = \frac{57{,}47'' + 57{,}23}{2} = +\,57{,}35''$$

$$g = \frac{3^m\ 27{,}76^s + 3^m\ 9{,}91^s}{2} - 0{,}65\ (-\,0{,}744) = +\,3^m\ 19{,}32^s$$

Die Hülfstafel S. [16] gibt mit $t = 9^h\ 5{,}4^m$ $log\,A = 9.9436$ und $log\,B = 9.8028_n$, also nun nach Formel [12]:

$\mu_1 = 57{,}35$	$log\,\mu_1$ 1.7585	$log\,\mu_1$ 1.7585
	$log\,A$ 9.9436	$log\,B$ 9.8028_n
$\varphi = 52^0\ 23'$, $\delta = +\,5^0\ 23'$	$log\,tang\,\varphi$ 0.1132	$log\,tang\,\delta$ 8.9742
	1.8153	0.5355_n
	$+\,65{,}36$	$-\,3{,}43$

$v = +\,61{,}93^s = +\,1^m\ 1{,}93^s$

Unverbesserte Mitternacht	$12^h\ 4^m\ 53{,}92^s$
Wahre Mitternacht	$12^h\ 5^m\ 55{,}85^s$
soll $12^h + g =$	$12^h\ 3^m\ 19{,}32^s$
Correction der Uhr	$-\ 2^m\ 36{,}53^s$

Als Beispiel für die Uebereinstimmung, welche mehrere Zeitbestimmungen der fraglichen Art geben können, sollen 5 Bestimmungen dienen, welche bei aussergewöhnlich dauernder Wolkenlosigkeit in Hannover mit dem Meyerstein'schen Instrument Fig. 4. S. 41 gewonnen wurden.

Zeit	Correction der Uhr Breguet	Differenz	
1884 31. März	$-2^m\ 34{,}49^s$		
1884 1. April	$-2^m\ 35{,}32^s$	$-0{,}83^s$	
1884 2. „	$-2^m\ 36{,}00^s$	$-0{,}68^s$	(13)
1884 3. „	$-2^m\ 36{,}76^s$	$-0{,}76^s$	
1884 4. „	$-2^m\ 37{,}33^s$	$-0{,}57^s$	

Das Instrument, dessen Fernrohr auf constanter Höhe festgestellt war, blieb während dieser Zeit auf einem Steinpfeiler stehen. Die Messung im Einzelnen ist wie bei dem ersten Beispiel S. 76.

Zur Veranschaulichung der Genauigkeit unter ungünstigeren Verhältnissen mögen folgende Vergleichungen von der libyschen Expedition (1873—1874) dienen. Als Instrument diente der in Fig. 1. § 10. S. 38 abgebildete Theodolit; es wurden meist 10 Höhen hintereinander an einem Nonius des Höhenkreises auf etwa 1′ genau eingestellt, und die Zeiten der Sonnenrandberührung an dem in der linken Hand gehaltenen Taschenchronometer abgelesen. Die vor den Sonnenstrahlen ungenügend geschützte Libelle wurde mittelst der Stellschrauben des Dreifusses im Einspielen erhalten. Auf 9 Hauptpunkten wurde die Messung in zwei Gruppen ausgeführt, 10 mit Unterrand, 10 mit Oberrand der Sonne. Die Resultate (Ortszeit — Chronometer) waren (Phys. Geogr. u. Met. der libyschen Wüste S. 7—8):

			I	II	I—II	(I—II)²
1. Regenfeld	29. Januar	1874	$0^h\ 55^m\ 7{,}3^s$	$0^h\ 55^m\ 6{,}7^s$	$+0{,}6^s$	0,36
2. „	31. „	1874	$0^h\ 55^m\ 4{,}4^s$	$0^h\ 55^m\ 2{,}6^s$	$+1{,}8^s$	3,24
3. „	5. Februar	1874	$0^h\ 55^m\ 8{,}7^s$	$0^h\ 55^m\ 10{,}3^s$	$-1{,}6^s$	2,56
4. Siuah	21. „	1874	$0^h\ 48^m\ 16{,}3^s$	$0^h\ 48^m\ 15{,}3^s$	$+1{,}0^s$	1,00
5. Beharieh	7. März	1874	$1^h\ 2^m\ 27{,}1^s$	$1^h\ 2^m\ 25{,}0^s$	$+2{,}1^s$	4,41
6. Farafrah	12. „	1874	$0^h\ 59^m\ 11{,}7^s$	$0^h\ 59^m\ 10{,}3^s$	$+1{,}4^s$	1,96
7. Chargeh	24. „	1874	$1^h\ 10^m\ 11{,}3^s$	$1^h\ 10^m\ 11{,}7^s$	$-0{,}4^s$	0,16
8. Esneh	1. April	1874	$1^h\ 18^m\ 35{,}5^s$	$1^h\ 18^m\ 33{,}7^s$	$+1{,}8^s$	3,24
9. „	2. „	1874	$1^h\ 18^m\ 39{,}4^s$	$1^h\ 18^m\ 41{,}1^s$	$-1{,}7^s$	2,89
						19,82

$$\text{Mittlere Differenz } d_1 = \sqrt{\frac{19{,}82}{9}} = \pm\ 1{,}48^s$$

Mittlerer Fehler eines Mittels aus beiden Messungen $= \pm\ 0{,}74^s$.

Auf einer Sternwarte wäre das ein schlechtes Resultat, für jene Verhältnisse war es befriedigend.

Einfluss ungleicher Refractionen. Die Refraction wird gewöhnlich bei correspondirenden Sonnenhöhen Vormittags und Nachmittags als gleich angenommen, und deswegen nicht in Rechnung gebracht, da es

sich ja überhaupt nur um gleiche Höhen handelt. Nun ist aber im Allgemeinen die Lufttemperatur zu gleichen Zeiten vor und nach dem wahren Mittag nicht dieselbe, weil das Wärmemaximum etwa auf 2 Uhr Nachmittags fällt. Man wird im Sommer wohl etwa 5° Differenz der Lufttemperaturen Vormittags und Nachmittags annehmen können. Hat man nun niedere Höhen, z. B. 10°, so gibt nach der Tafel S. [8] oder [9] hier eine Temperaturdifferenz von 5° eine Refractionsänderung von 6″, und diesem entspricht nach der Tafel von § 15. (S. 67) bereits ein Zeitfehler von 1 Secunde. Nimmt man die Höhen nicht unter 20°, so wird nach S. [9] für 5° Temperaturdifferenz eine Höhendifferenz = 3″, und ein Zeitfehler von vielleicht 0,5 Secunden, entstehen. Diese Betrachtung zeigt, dass eine absolute Genauigkeit von 0,1 Zeitsecunde mit correspondirenden Sonnenhöhen ohne Temperaturberücksichtigung erst bei Höhen über 30° erreichbar ist.

Vortheile der correspondirenden Zeithöhen. Zunächst hat man die Unabhängigkeit von der geographischen Breite, indem man die Breite nur beiläufig zu kennen braucht. Dieses ist auf Reisen von besonderem Gewicht. Zweitens hat man keine Furcht vor constanten Instrumentenfehlern zu haben. Die Berechnung besteht in einer einfachen Mittelbildung mit Zuziehung einer Hülfstabelle, welche auf Reisen in der Form von S. [17] des Anhangs jede trigonometrische Formel-Ausrechnung überflüssig macht.

Wenn man an dem Theodolit die oben S. 75 beschriebene Libellen-Anordnung und ein Fadennetz nach Fig. 1. hat, so wirkt das Instrument als eine Art Passage-Instrument im verticalen Sinn und man hat dann in einem solchen Theodolit, welcher nicht dauernd fest aufgestellt zu sein braucht, einen bequemen Ersatz eines wirklichen Passage-Instrumentes (§. 18), welches, um absolute Zeiten auf 0,1 Secunden zu liefern, nicht nur fest aufgestellt sein muss, sondern auch freien Himmel nach Süden und nach Norden haben muss, was ohne eigentliche Sternwarte, oder Beobachtungsschutzhütte im Freien, kaum zu erfüllen ist.

Die Abhängigkeit von der Witterung. In Deutschland gibt es nur wenige Sommertage, an denen man mit Sicherheit auf wolkenfreien Himmel zur Zeit der Nachmittagshöhen rechnen kann, nachdem die Vormittagshöhen gelungen sind. Z. B. unter dem trüben Hannover'schen Himmel habe ich viele Wochen verwendet, um einige zusammenhängende Reihen von der Art der oben unter (13) beschriebenen zu erhalten. Günstiger ist schon das süddeutsche Klima; und vollends der fast wolkenlose afrikanische Himmel, unter welchem ich im Winter 1873—1874 solche Messungen machte, ist hiezu ausgezeichnet, und gestattet auf Reisen die fragliche Methode fast ausschliesslich anzuwenden.

Besondere Instrumente für correspondirende Sonnenhöhen. Da es bei solchen Instrumenten nicht auf die Kenntniss des Höhenwinkels in Gradmaass ankommt, sondern nur auf die Constanterhaltung eines in weiten Grenzen beliebigen Winkels, kann man manche

einfache Vorrichtungen bei genügender Genauigkeit ohne grosse Kosten herstellen. Wir sahen z. B. bei einem Uhrmacher R. in Karlsruhe eine zum Auffangen eines Sonnenbildes eingerichtete Objectivlinse mit einem ganz einfachen Gestell und einer Libelle für diesen Zweck im Gebrauch.

Fig. 2. Instrument zur Beobachtung correspondirender Sonnenhöhen.



In der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881, S. 130—131 wird als Citat von „S. C. Chandler jun. The Observatory (Nr. 45) Januar 1881“ unter dem Namen „Chronodeik“ das in Fig. 2. abgebildete Instrument beschrieben.

In dem cylindrischen Gehäuse befindet sich ein pendelartig aufgehängter ebener Spiegel, welcher, in beliebiger Neigung schief gestellt, in der unteren Oeffnung sichtbar ist. Mit diesem schiefen Spiegel wird die Sonne aufgefangen und nach oben in ein kleines Fernrohr reflektirt, das mit der Pendelaufhängung des Spiegels fest verbunden ist. Das Ocular dieses Fernrohrs ragt oben aus dem Gehäuse hervor.

Anmerkungen.

Ausführlichere Tafeln der *log A* und *log B* als die unsrigen von S. [16], nämlich mit Intervall von 1^m, gibt Domke, nautische, astronomische und logar. Tafeln S. 231—233, oder Ligowski, Sammlung fünfstelliger log., trig., nautischer und astronomischer Tafeln S. 188—189, und Albrecht, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, S. 141—142. Diese Tafeln setzen sämmtlich voraus, dass μ_1 nicht wie bei unseren Formeln und Tafeln die einstündige Declinationsänderung für den fraglichen Tag ist, sondern dass ein Werth μ = der 48stündigen Declinationsänderung eingeführt werde. Dieses ist die ursprünglich von Gauss angenommene Grösse, es soll nämlich dieses μ die Declinationsänderung von gestern auf morgen sein, welche, proportional reducirt, allerdings die Declinationsänderung zwischen der Vormittags- und der Nachmittagsbeobachtung gut liefert. In den älteren Jahrgängen des Berliner astron. Jahrbuchs war dieser Werth *log* μ fünfstellig von Tag zu Tag angegeben. Seitdem dieses nicht mehr geschieht, ist die Rechnung mit der einstündigen Aenderung μ_1 bequemer und ebenso genau, denn diese ist im Nautical Almanac für jeden Mittag genau so angegeben, wie es jenes Gauss'sche 48stündige μ verlangt, nämlich $\mu_1 = \frac{1}{48}(\varDelta\delta_2 + \varDelta\delta_1)$, wo $\varDelta\delta_1$ und $\varDelta\delta_2$ zwei aufeinanderfolgende eintägige Declinationsänderungen sind.

Uebrigens, wenn man auch nicht den Nautical Almanac, sondern das Berliner Jahrbuch benutzt, welches nicht die einstündigen Aenderungen, sondern geradezu die Declinationsdifferenzen von Tag zu Tag gibt, scheint es uns bei zwei aufein-

ander folgenden nahezu gleichen Differenzen immer noch bequemer, nicht die Summe, sondern im Kopf sofort das Mittel zu bilden, und damit weiter zu rechnen, d. h. zu den Gauss'schen $\log A$ und $\log B$ noch $\log 2 = 0.3010$ hinzuzunehmen, oder bei Benutzung unserer Tafel S. [16], $\log \frac{1}{24} = 8.6198$ zuzusetzen.

Hier ist noch ein Werkchen zu citiren: „Der Zeitmesser, Tafeln der Mittagsverbesserung für die Breitengrade 30° bis 60° und der Zeitgleichung für alle Tage etc. von Heinrich Göring, Paderborn 1862". Dasselbe gibt den doppelten Werth der durch unsere Gleichung (10) bestimmten Mittagsverbesserung v für 16 Breitenwerthe $\varphi = 30^0, 32^0, 34^0$ bis 60^0, mit den Argumenten $2t$ = Zwischenzeit von 1^h zu 1^h (also t von 30^m zu 30^m) und Declinationen von 1^0 zu 1^0, was einem Datumsintervall von höchstens 10 Tagen entspricht.

§ 17. Meridianbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen.

Wenn man das im vorigen § 16. behandelte Princip der links und rechts vom Meridian correspondirenden Höhen auch auf die Azimutbestimmung anwendet, so hat man bei Benutzung eines Fixsterns diesen Stern vor und nach seiner Culmination in gleicher Fernrohrhöhe an den Kreuzpunkt der Fäden zu bringen, und beidemal die Alhidade des Horizontalkreises abzulesen, worauf man — unveränderte Limbusstellung vorausgesetzt — in dem arithmetischen Mittel der Ablesungen Vormittags und Nachmittags die Alhidadenstellung erhält, für welche das Fernrohr in den Meridian visirt.

Bei Benutzung der Sonne hat man die Declinationsänderung während der Zwischenzeit in Rechnung zu bringen. Das astronomische Dreieck Fig. 3. § 4. S. 11 gibt hiezu:

$$\cos(90^0-\delta) = \cos(90^0-h)\cos(90^0-\varphi) + \sin(90^0-h)\sin(90^0-\varphi)\cos(180^0-a)$$

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos a$$

Differentiirung nach δ und a gibt:

$$\cos\delta\, d\delta = \cos h \cos\varphi \sin a\, da$$

also

$$da = \frac{\cos\delta}{\cos h \cos\varphi \sin a}\, d\delta \qquad (1)$$

Da man die Höhe h sonst nicht zu kennen braucht, kann man statt derselben die Zeit t in die Formel bringen, es ist nämlich nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin a}{\sin t} = \frac{\sin(90^0-\delta)}{\sin(90^0-h)} = \frac{\cos\delta}{\cos h}$$

womit (1) wird:

$$da = \frac{d\delta}{\cos\varphi \sin t} \qquad (2)$$

Wenn wieder, wie bei den correspondirenden Zeithöhen (S. 74) μ_1 die einstündige Declinationsänderung der Sonne bezeichnet, und auch

im Uebrigen jene Betrachtung auf diesen Fall übertragen wird, so erhält man die Meridianverbesserung

$$v = - \mu_1 \, t^{(h)} \, \frac{1}{\sin t \, \cos \varphi}$$

Setzt man

$$- \frac{t^{(h)}}{60 \sin t} = A' \tag{3}$$

oder auch

$$- \frac{t^{(m)}}{3600} \, \frac{1}{\sin t} = A' \tag{4}$$

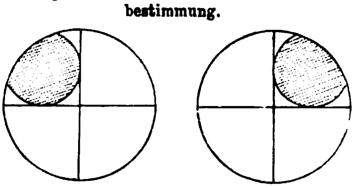
so hat man

$$v^{(')} = \mu_1 \, \frac{A'}{\cos \varphi} \tag{5}$$

wo v in Bogenminuten erhalten wird, wenn μ_1 in Bogensecunden (nach dem Nautical Almanac) eingesetzt wird. Eine Tabelle der Coefficienten-Logarithmen $\log A'$ ist auf S. [16] gegeben und für summarische Berechnungen haben wir ein zunächst für die Breite 49° (Karlsruhe) berechnetes Täfelchen auf S. [17] gegeben, welches genähert für ganz Deutschland gebraucht werden kann; ein entsprechendes Täfelchen für die Breite 28° ist in des Verfassers „Phys. Geogr. und Met. der lib. Wüste" S. 17 gegeben.

Die Beobachtung der correspondirenden Sonnenhöhen für Meridianbestimmung ist unbequemer als die entsprechende Beobachtung für Zeit, denn man hat jetzt nicht nur den Ober- oder Unterrand der Sonne an den Horizontalfaden, sondern gleichzeitig auch den rechten oder linken Rand an den Verticalfaden zu bringen, d. h. man muss die Sonne, wie Fig. 1. zeigt, Vormittags und Nachmittags in zwei gegen den Mittelfaden symmetrische Quadranten des Gesichtsfeldes berührend hineinbringen, zu welchem Zweck man, bei festgestellter Höhenlage des Fernrohrs, der Sonnenbewegung mit der Mikrometerschraube des Horizontalkreises in der Hand, beständig folgen muss, um im Moment der Horizontalberührung, sofort auch die Verticalberührung eintreten zu lassen.

Fig. 1.
Correspondirende Sonnenhöhen für Azimutbestimmung.



Nach dieser Berührung liest man die Zeit beiläufig auf 1 Minute genau an einer beliebigen Taschenuhr ab und kann dann die Ablesung am Horizontalkreis in Musse nachfolgen lassen.

Die Fig. 1. zeigt einen der vier möglichen Fälle der Beobachtungs-Anordnung, man kann statt dessen z. B. auch den Quadranten links unten Vormittags mit rechts unten Nachmittags etc. combiniren.

Wenn man mit dem Theodolit eine Bussole verbunden hat, so kann man, statt am Limbus eines Horizontalkreises, sofort an der Magnetnadel

ablesen, und bekommt so unmittelbar die magnetische Declination (unter der Voraussetzung, dass der Collimationsfehler des Fernrohrs in Bezug auf die Bussolentheilung gleich Null sei oder besonders in Rechnung gebracht werde). In dieser Weise bestimmte ich im Winter 1873 — 1874 die magnetische Declination in der libyschen Wüste mit dem auf S. 38 gezeichneten Instrument, auf 11 Stationen, wovon ein Beispiel im Folgenden gegeben ist.

Meridianbestimmung durch correspondirende Sonnenhöhen.
Oase Chargeh. 24. März 1874. (Breite = 25° 26′).

Höhenkreis	Vormittag			Nachmittag			Mittel der 4 Nadelablesungen	δ	δ^2
	Uhr	Nadel N	Nadel S	Uhr	Nadel N	Nadel S			
132°40′	8h 8m	120,1°	300,8°	1h 44m	252,5°	72,6°	6,500°	−0,130	0,0169
133 0	8 10	120,4	300,3		252,3	72,4	6,350	+0,020	0,0004
133 40	8 13	120,9	300,7		251,7	71,8	6,275	+0,095	0,0090
134 0	8 15	121,3	301,2		251,3	71,3	6,275	+0,095	0,0090
134 20	8 16	121,6	301,5	1h 36m	251,3	71,4	6,450	−0,080	0,0064
Mittel	8h 12m	120,86°	300,90°	1h 40m	251,82°	71,90°	6,370°	0,0000	0,0417
									$= (\delta\delta)$

$$\text{halbe Zwischenzeit} = \frac{13^h\ 40^m - 8^h\ 12^m}{2} = 2^h\ 44^m$$

Der Nautical Almanac für 1874 gibt für 24. März auf S. 42 die stündliche Aenderung der Sonnendeclination $\mu_1 = +\ 59{,}01''$.

Nun gibt die Tafel S. [16] für $t = 2^h\ 44^m$

$$\begin{aligned} \log A' &= 8.8417_n \\ \text{hiezu } \log \mu_1 &= 1.7709 \\ \varphi = 25^0\ 26'\ \log \sec \varphi &= 0.0443 \\ \hline \log v\ \ & \ \ 0.6569_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= -\ 4{,}54' - 0{,}076^0 \\ \text{Mittlere Nadelablesung} &= 6{,}370^0 \\ \hline \text{Nadelablesung für den wahren Meridian} &= 6{,}294^0 \end{aligned}$$

Unser Beispiel gibt noch in der Quadratsumme $(\delta\delta)$ die Möglichkeit einer Genauigkeitsschätzung. Es ist der mittlere Fehler einer Bestimmung aus 4 zusammengehörigen Nadelablesungen N und S.

$$m = \sqrt{\frac{0{,}0417}{4}} = \pm\ 0{,}102^0$$

und der mittlere Fehler des Mittels aus allen 5 Bestimmungen

$$= \frac{0{,}102}{\sqrt{5}} = \pm\ 0{,}046^0$$

Man hat also jetzt die westliche magnetische Declination

$$= 6{,}294^0 \pm 0{,}146^0$$

Zu diesem Resultat $6{,}294^0$ kommt noch die Instrumentalcorrection für Collimation der Fernrohrachse gegen die Bussolentheilung und für die Abweichung der magnetischen Achse der Nadel von deren geometrischer Achse. Diese Correctionen, auf welche wir hier nicht eingehen, betragen nach S. 21 der „Phys. G. u. M. d. lib. W.“ zusammen — $0{,}22^0$, und geben daher für Chargeh 24. März 1874 Mittags die magnetische Declination $6{,}29 - 0{,}22^0 = 6{,}07^0$ westlich. Zur Veranschaulichung der Genauigkeit, welche auf diesem Wege erreicht werden kann, haben wir im Folgenden die auf der libyschen Expedition 1873—1874 erhaltenen Resultate, für diejenigen Orte, an welchen Mittags correspondirende Sonnenhöhen und Abends der Polarstern (vgl. § 23.) beobachtet wurde, zusammengestellt. Die soeben erwähnte constante Instrumentencorrection — $0{,}22^0$ ist hiebei nicht angebracht.

Bestimmungen der magnetischen Declination in der libyschen Wüste 1873—1874.

Ort	Mittagsbeobachtung	Abendbeobachtung	Differenzen d	d^2
Hamrah . .	$5{,}92^0 \pm 0{,}02^0$	$5{,}91^0 \pm 0{,}03^0$	$+ 0{,}01^0$	0,0001
Marak. . .	$6{,}16 \pm 0{,}03$	$6{,}10 \pm 0{,}06$	$+ 0{,}06$	0,0036
Farafrah. .	$6{,}67 \pm 0{,}04$	$7{,}21 \pm 0{,}04$	$- 0{,}54$	0,2916
Dachel . .	$6{,}79 \pm 0{,}02$	$6{,}77 \pm 0{,}13$	$+ 0{,}02$	0,0004
Einsiedel I.	$6{,}76 \pm 0{,}01$	$6{,}86 \pm 0{,}04$	$- 0{,}10$	0,0100
Einsiedel II.	$6{,}95 \pm 0{,}04$	$7{,}23 \pm 0{,}08$	$- 0{,}28$	0,0784
Regenfeld .	$7{,}24^0 \pm 0{,}05^0$	$7{,}14^0 \pm 0{,}05^0$	$+ 0{,}10^0$	0,0100
Siuah . . .	$7{,}78 \pm 0{,}05$	$7{,}63 \pm 0{,}02$	$+ 0{,}15$	0,0225
Beharieh .	$6{,}80 \pm 0{,}02$	$6{,}75 \pm 0{,}04$	$+ 0{,}05$	0,0025
Chargeh . .	$6{,}29 \pm 0{,}05$	$6{,}49 \pm 0{,}05$	$- 0{,}20$	0,0400
Esneh . . .	$6{,}19 \pm 0{,}03$	$5{,}83 \pm 0{,}02$	$+ 0{,}36$	0,1296
		Mittel	$- 0{,}03^0$	0,5887 = Summe

Das einfache arithmetische Mittel der Differenzen zwischen Mittags- und Abendbeobachtungen ist — $0{,}03^0$, doch ist dasselbe durch die Beobachtungsfehler so sehr beeinflusst, dass daraus kein Schluss auf die tägliche periodische Aenderung der Declination gezogen werden kann.

Die den Angaben beigefügten mittleren Fehler sind aus der Uebereinstimmung der 4—6 Einzelbestimmungen berechnet, deren Mittel diese Angaben sind. Wenn man von der Veränderlichkeit der Declination selbst absieht, so findet man den mittleren Fehler einer einzelnen Declinationsbestimmung

$$m = \sqrt{\frac{0{,}5887}{22}} = \pm 0{,}16^0$$

Für solche Zwecke, wie der im Vorstehenden erwähnte, eignet sich die Meridianbestimmung durch correspondirende Sonnenhöhen sehr gut, für genauere Messungen dagegen, innerhalb 1′, ist die Methode weniger ge-

eignet, erstens weil die Beobachtung nach Fig. 1. (S. 82) mit Einpassen der Sonnenscheibe in einen Gesichtsfeldquadranten, mit horizontaler und verticaler Berührung, die Spannung des Beobachters zu sehr vertheilt, zweitens aber weil nach § 11. S. 45 die Azimutalmessung mit einem Theodolit durch die Neigung der Horizontalachse erheblich beeinflusst ist, und eine Berücksichtigung der Horizontalachsen-Neigung die Methode noch complicirter machen würde.

Eine indirecte Methode der Meridianbestimmung durch correspondirende Sonnenhöhen, nämlich durch Vermittlung der Zeithöhen, werden wir beim Passage-Instrument im folgenden Paragraph behandeln.

§ 18. Zeitbestimmung durch das Passage-Instrument.

Stellt man ein theodolitartig gebautes Instrument so auf, dass seine horizontale Achse von Westen nach Osten gerichtet ist, dass also die Kippungsebene des Fernrohrs sich im Meridian befindet, so braucht man nur den Durchgang eines Sterns durch den Verticalfaden des Fadenkreuzes zu beobachten, um aus der bekannten Rectascension dieses Sterns die Sternzeit nach der Grundgleichung (1) § 3. (S. 7)

$$\text{Sternzeit} = \text{Stundenwinkel} + \text{Rectascension}$$

zu bestimmen, woraus auch die mittlere Sonnenzeit gefunden wird.

Lässt man statt eines Sterns die Sonne durch den Verticalfaden gehen, so hat man unmittelbar den wahren Mittag beobachtet, aus welchem man mittelst der Zeitgleichung auch die mittlere Zeit findet.

Unser in Fig. 1. gezeichnetes Passage-Instrument (von Meyerstein, mit einigen nachträglichen Abänderungen) hat im Wesentlichen dieselbe Construction wie ein astronomischer Theodolit, mit Untergestell AA und Stellschrauben. Es ist ein Horizontalkreis von 20 cm Durchmesser und auch ein kleiner Höhenkreis vorhanden. Letzterer dient nicht zu eigentlichen Messungen, sondern mit der Libelle L' nur zum Einstellen auf eine Sternhöhe, und damit zum Auffinden des Sterns, während der Horizontalkreis, mit Nonienablesung von 10″, nützliche Dienste leistet, z. B. zum raschen genäherten Bestimmen des Collimationsfehlers. Dieser Horizontalkreis ist auch deswegen erwünscht, damit man mit dem Instrument geodätische Zielpunkte anvisiren, und zur Orientirung benutzen kann.

Die schiefen Träger B geben die Lager für das Fernrohr. Das gebrochene Fernrohr hat dieselbe Construction wie Fig. 3. § 10. S. 42 mit immer in gleicher Höhe befindlichem Ocular O. Die beiden Cylinderklötze P und Q haben keinen eigenen Zweck, sondern wirken nur als Gegengewichte für den Objectivtheil des Fernrohrs. Die Platte P mit einem kleinen Loch und ein entsprechender Punkt auf der Platte P' dienen zum Richten des Fernrohrs nach der Sonnenhöhe wie schon bei Fig. 1. § 10. S. 38 angegeben ist.

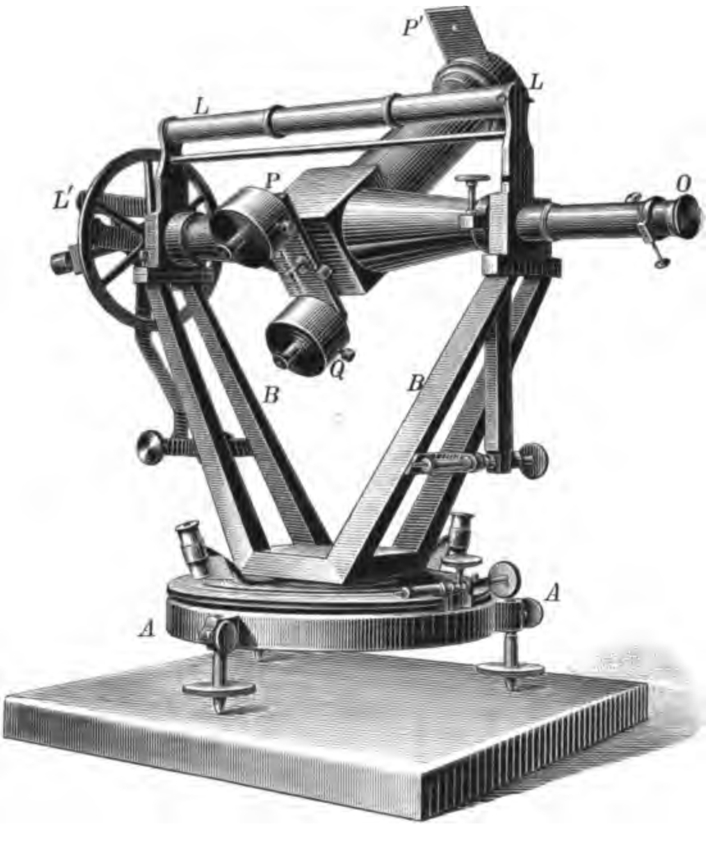
Die Libelle L kann mit Vertauschung ihrer Enden links und rechts,

aufgesetzt werden. Diese Libelle hat eine von 0 bis 40 durchlaufende Theilung mit dem Werth 9,4″ auf 1 Strich. Von dieser Libelle wird im Späteren (Fig. 5.) wieder die Rede sein.

Das Instrument ist in einem nach Süden gehenden Erker der technischen Hochschule Hannover auf einem Steinpfeiler aufgestellt, in der Hörweite der Pendeluhr Breguet, welche wir im § 12. S. 53 erwähnt haben.

Durch das zu öffnende Fenster ist Aussicht nach Süden; dagegen ist Aussicht nach Norden nicht vorhanden.

Fig. 1. Passage-Instrument.
(Maassstab etwa = 1 : 5,5. Durchmesser des Horizontalkreises = 20 cm.)



Dieser Mangel der Nord-Visur nimmt dem Instrument die fundamentale Bedeutung, welche auf jeder Sternwarte dem nach Süd und Nord frei visirenden Passage-Instrument zukommt; wir können nämlich mit unserem nur nach Süden freien Instrument keine absolut richtigen Zeitbestimmungen ohne Hülfe anderer Instrumente und anderer Messungen machen. Wie man sich in solchem Falle helfen kann, wird auf S. 96 gezeigt.

In der Südvisur des Passage-Instrumentes, in der Entfernung von 110 Meter befindet sich (an der Herrenhauser Allee) ein steinerner Pfeiler, welcher eine Meridianmarke trägt. Grössere Entfernung dieser Meridianmarke wäre nützlich, war aber nicht zu erlangen. Es ist möglich, die nur 110^m entfernte Meridianmarke noch mit derselben Ocularstellung anzuvisiren, welche für unendliche Entfernungen gilt.

(Es ist jedoch bei dieser Gelegenheit zu bemerken, dass das Instrument Fig. 1. weder in optischer noch mechanischer Beziehung eine seiner Grösse entsprechende Leistungsfähigkeit hat, wornach die im Nachfolgenden mitgetheilten Messungen zu beurtheilen sind.)

Wir nehmen nun an, ein solches Instrument sei vorerst näherungsweise in den Meridian gebracht, wozu etwa correspondirende Sonnenhöhen nach § 17. oder die später zu behandelnde Beobachtung des Polarsterns (vgl. den spätern § 23.), unter Umständen auch geodätische Orientirung nach den Punkten einer Landestrangulirung, dienen kann.

Nun kann die Beobachtung des Durchgangs der Sonne oder eines Sterns durch den Verticalfaden des Fadenkreuzes beginnen. Man bringt jedoch, zur Controle, ausser dem Mittelfaden noch symmetrische Seitenfäden an, und bekommt so Netze von 3, 5, 7 etc. Verticalfäden.

Fig. 2.
Faden-Netz des Passage-Instruments.

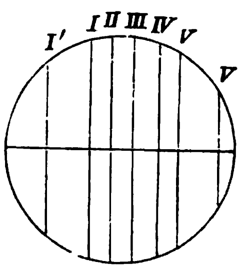
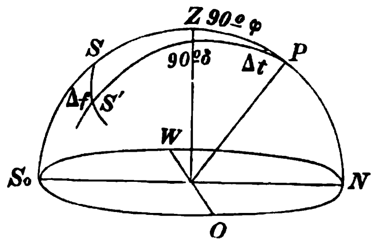


Fig. 3.
Faden-Abstand Δf des Passage-Instruments.



Unser Instrument hat 7 Fäden, wie in Fig. 2. veranschaulicht ist. *III* ist der eigentliche Mittelfaden, *I II III IV V* geben ein System, welches in der Regel zusammen abgelesen wird, *I'* und *V'* dienen als Reserve bei trübem Himmel. Der zufällige Umstand, dass der Faden *I'* weiter vom Rand absteht als *V'*, wird als Kennzeichen der Fäden benutzt, indem z. B. in der normalen Fernrohrlage die Fäden in der Reihenfolge von *I' I II ... V'* getroffen werden, und, nachdem das Fernrohr umgelegt, oder durchgeschlagen und gedreht ist, in der Reihenfolge *V' V IV ... I'*.

Bestimmung der Faden-Abstände. In Fig. 3. sei P der Pol, PS der Meridian oder der Declinationskreis des Mittelfadens, PS' der Declinationskreis eines Seitenfadens, Δf der Fadenabstand, und Δt die Durchgangszeit, dann ist nach § 11. (a) (S. 50):

$$\Delta f = \Delta t \sin (90^0 - \delta) = \Delta t \cos \delta$$

oder

$$\Delta t = \frac{\Delta f}{\cos \delta} \qquad (1)$$

Am 28. Februar 1884 wurde mit unserem Instrument der Durchgang der Sonne durch die 5 Fäden beobachtet und die Zeiten nach ganzen Secunden notirt:

Faden	Antritt der Sonne t_1	Δt_1	Austritt der Sonne t_2	Δt_2	$t_2 - t_1$	$\Delta f = \Delta t \cos \delta$	
I.	$12^h\ 13^m\ 16^s$	39^s	$12^h\ 15^m\ 28^s$	38^s	$2^m\ 12^s$	$38{,}6^s$ $37{,}6^s$	(2)
II.	13 36	19	15 48	18	2 12	18,8 17,8	
III.	13 55	..	16 6	..	2 11	.. ..	
IV.	14 12	17	16 24	18	2 12	16,8 17,8	
V.	14 32	37	16 44	38	2 12	36,6 37,6	
Mittel	$13^m\ 54{,}2^s$		$16^m\ 6{,}0^s$		$2^m\ 11{,}8^s$		

Gesammtmittel $12^h\ 15^m\ 0{,}1^s$

Die Declination der Sonne ist an diesem Tage $\delta = -8^0\ 4'$, womit die Werthe Δf der letzten Spalte berechnet sind. Mehrere solche Bestimmungen gaben im Mittel

Faden	*I'*	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*V'*	
$\Delta f =$	$73{,}16^s$	$37{,}78^s$	$18{,}27^s$	..	$17{,}74^s$	$37{,}42^s$	$71{,}65^s$	(3)

Man kann die Fadenabstände genauer bestimmen, wenn man einen Stern mit grosser Declination δ, also in der Nähe des Pols, durch die Fäden gehen lässt. Die Durchgangszeiten Δt werden dann sehr gross, und bei der Multiplication derselben mit dem kleinen Factor $\cos \delta$ (δ nahe an 90^0) werden auch die Fehler von Δf verkleinert.

Man kann die Fadenabstände auch mit dem Limbus des Horizontalkreises unmittelbar messen, indem man einen fernen, nahezu im Horizont liegenden Punkt mit den verschiedenen Fäden nacheinander einstellt, und jedesmal die Nonien des Horizontalkreises dazu abliest. Auf diese Weise fand sich im Mittel aus mehreren Messungen:

Faden Nr.	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	
$\Delta f =$	9′ 31″	4′ 38″	..	4′ 25″	9′ 23″	
oder in Zeit $\Delta f =$	$38{,}07^s$	$18{,}53^s$	..	$17{,}67^s$	$37{,}53^s$	Sternzeit
Abzug für Sonnenzeit (S. [4])	$-0{,}10^s$	$-0{,}05^s$	..	$-0{,}05^s$	$-0{,}10^s$	
$\Delta f =$	$37{,}97^s$	$18{,}48^s$	..	$17{,}62^s$	$37{,}43^s$	Sonnenzeit (4)

Diese Werthe (4) differiren noch um etwa $0{,}1^s$ von (3). Die Resultate (3) wurden abgerundet beibehalten, und daraus folgende Tabelle berechnet:

Faden-Abstände in Sonnenzeit $\Delta t = \Delta f \sec \delta$

Jahreszeit		δ	Δt I	Δt II	Δt IV	Δt V
20. März	23. September	$\pm$ 0°	37,78^s	18,27^s	17,74^s	37,42^s
2. April 10. Sept.	6. Oct. 8. März	$\pm$ 5°	37,9	18,3	17,8	37,6
16. April 27. Aug.	19. Oct. 23. Febr.	$\pm$ 10°	38,4	18,6	18,0	38,0
1. Mai 12. Aug.	3. Nov. 8. Febr.	$\pm$ 15°	39,1	18,9	18,4	38,7
20. Mai 24. Juli	21. Nov. 30. Jan.	$\pm$ 20°	40,2	19,4	18,9	39,8
22. Juni	21. December	$\pm$ 23° 27′	41,2	19,9	19,3	40,8

(5)

Eine solche kleine Tabelle genügt zur Reduction auf den Mittelfaden, wenn man — was für unsere Zwecke oft der Fall ist — nur Genauigkeit auf etwa 1^s verlangt; für genauere Rechnung müsste man die Tafel ausdehnen, oder die Division mit $\cos \delta$ jeweils ausrechnen.

Im Anschluss hieran braucht man auch die Durchgangszeit der Sonne selbst. Ist r der scheinbare Halbmesser der Sonne und δ die Declination, so ist die Durchgangszeit des Halbmessers $= r \sec \delta$ in Sternzeit, was zwischen 16′ und 17′ oder etwa zwischen 1^m 4^s und 1^m 8^s beträgt, und nach S. [4] in Sonnenzeit verwandelt wird durch Subtraction von 0,18^s oder 0,19^s. Der Nautical Almanac gibt diese Durchgangszeit für jeden Tag, und da dieselbe für gleiches Datum verschiedener Jahre wenigstens nahezu constant ist, bilden wir zur Uebersicht und zum Gebrauch auf etwa 0,5^s genau, folgende Tabelle (6).

Zeitdauer des Durchgangs des Sonnenhalbmessers durch den Meridian, in Sonnenzeit.

Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
1.	1^m 10,8^s	1^m 8,0^s	1^m 5,1^s	1^m 4,3^s	1^m 5,8^s	1^m 8,2^s
5.	1 10,6	1 7,6	1 4,9	1 4,4	1 6,1	1 8,7
10.	1 10,3	1 7,0	1 4,6	1 4,6	1 6,5	1 8,6
15.	1 9,8	1 6,4	1 4,4	1 4,8	1 6,9	1 8,7
20.	1 9,3	1 5,9	1 4,3	1 5,0	1 7,3	1 8,7
25.	1 8,8	1 5,5	1 4,2	1 5,4	1 7,7	1 8,7

Tag	Juli	August	September	October	November	December
1.	1^m 8,6^s	1^m 6,4^s	1^m 4,2^s	1^m 4,1^s	1^m 6,7^s	1^m 10,1^s
5.	1 8,2	1 6,1	1 4,0	1 4,6	1 7,1	1 10,4
10.	1 7,8	1 5,6	1 3,8	1 5,0	1 7,8	1 10,7
15.	1 7,4	1 5,2	1 3,8	1 5,4	1 8,3	1 11,0
20.	1 7,0	1 4,9	1 3,9	1 5,9	1 8,9	1 11,1
25.	1 6,6	1 4,6	1 4,0	1 6,5	1 9,5	1 11,1

(6)

Zur Anwendung der Tafeln (5) und (6) machen wir die Annahme, es seien von den Beobachtungen (2) alle durch Wolken vereitelt worden, ausgenommen der Antritt am Faden *I* und der Austritt am Faden *IV*, also:

28. Februar 1884.

	Beobachtung	Fadenreduction nach (5)	Halbmesser nach (6)	Resultat
Antritt Faden I.	$12^h\ 13^m\ 16^s$	$+ 38^s$	$+ 1^m\ 5^s$	$12^h\ 14^m\ 59^s$
Austritt Faden IV.	12 16 24	— 18	— 1 5	12 15 1
			Mittel	$12^h\ 15^m\ 0^s$

Auf etwa 1^s genau hat man also den Durchgang des Sonnenmittelpunktes durch den Mittelfaden $= 12^h\ 15^m\ 0^s$ Uhrzeit, nahezu wie bei (2).

Wenn eine normale Reihe von Beobachtungen an allen 5 Fäden vorliegt, so braucht man zur Reduction auf den Mittelfaden nur das Gesammtmittel aller Ablesungen zu bilden, und an diesem noch das Mittel der 4 Fadenreductionen anzubringen, d. h. in unserem Falle nach (3):

$$\frac{+ 37{,}8 + 18{,}3 \pm 0{,}0 - 17{,}7 - 37{,}4}{5} = + 0{,}20^s \qquad (7)$$

d. h. der Sonnenmittelpunkt kommt um $0{,}2^s$ vorher in den Schwerpunkt der 5 Fäden als in den Mittelfaden. An dieser kleinen Correction $0{,}20^s$ kann auch der Nenner $\cos \delta$ durchaus $= 1$ gesetzt werden, so dass für unsere Zwecke diese Correction $+ 0{,}2^s$ das ganze Jahr constant ist. Man hat also nach (2) 28. Februar 1884:

Mittel der Eintritte	$12^h\ 13^m\ 54{,}2$	Durchgangszeit $= 2^m\ 11{,}8^s$	
Mittel der Austritte	$12^h\ 16^m\ 6{,}0$		
Gesammtmittel	$12^h\ 15^m\ 0{,}10^s$		
Constante Correction	$+ \quad 0{,}20^s$		
Durchgang durch den Mittelfaden	$12^h\ 15^m\ 0{,}30^s$		(7a)
soll $12^h + g =$	$12^h\ 12^m\ 48{,}36^s$		
Correction der Uhr	$- \quad 3^m\ 11{,}94^s$		

Als allgemeine Controle (welche aber an dem Resultat nichts mehr ändert) dient die Durchgangszeit $2^m\ 11{,}8^s$ oder die halbe Durchgangszeit $1^m\ 5{,}9^s$, welche mit der Angabe des Jahrbuchs $1^m\ 5{,}34^m$ für die vorliegenden Verhältnisse genügend stimmt.

Theorie der Achsenfehler des Passage-Instruments.

1) Die horizontale Drehachse des Instruments gehe nicht genau von West nach Ost, sondern habe in Fig. 4. die Lage *W' O'*, welche um den

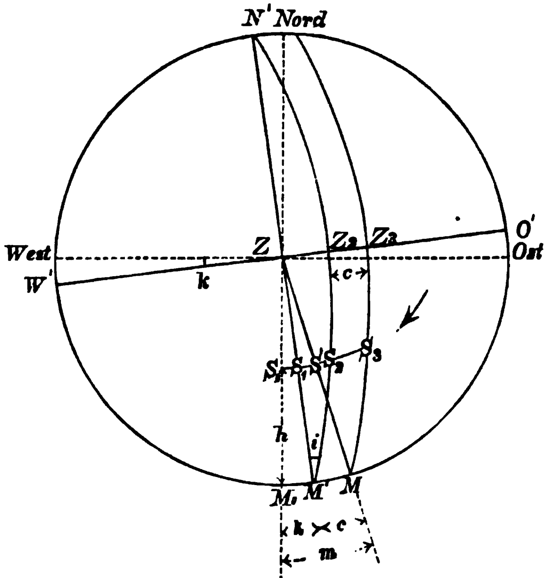
Winkel k gegen WO verdreht ist. In der Höhe h wird daher nicht ein Punkt S_0 anvisirt, sondern ein Punkt S_1, wobei nach (a) § 11. S. 50

$$S_0\,S_1 = k \sin (90^0 - h) = k \cos h \tag{8}$$

2) Die horizontale Drehachse des Instruments ist auch nicht genau horizontal, sondern sei um den Winkel i nach Osten abwärts, nach Westen aufwärts, geneigt, dann verschiebt sich auch das Zenit des Instruments von Z nach Z_2 um den Betrag i, und der Verticalkreis $Z\,M'$ kommt in die schiefe Lage $Z_2\,M'$, wo der Winkel $Z\,M'\,Z_2$ wieder $= i$ ist, also wird die Visur-Verschiebung nach (a) § 11. S. 50:

$$S_1\,S_2 = i \sin h \tag{9}$$

Fig. 4. Achsenfehler des Passage-Instruments.



3) Das Fernrohr hat auch einen Collimationsfehler, d. h. die Horizontal-Visur $Z\,M'$ wird nochmals um den Betrag c nach Osten verschoben, und die Kipp-Ebene geht von $M'\,Z_2$ nach $M\,Z_3$ über, wobei

$$Z_2\,Z_3 = c \text{ und } S_2\,S_3 = c \tag{10}$$

Die Gesammt-Verschiebung $S_0\,S_3$, welche sich aus (8) (9) und (10) durch Addition zusammensetzt, erzeugt nach (1) einen Zeitfehler

$$\Delta t = \frac{S_0\,S_3}{\cos \delta}$$

also zusammen

$$\Delta t = \frac{c}{\cos \delta} + \frac{i \sin h}{\cos \delta} + \frac{k \cos h}{\cos \delta} \tag{11}$$

Da im Meridian die Höhe $h = 90^0 - \varphi + \delta$ ist (vgl. § 19. Fig. 1.) kann man statt (11) auch schreiben:

$$\text{für } S_0\, S_3: \quad \Delta t = \frac{c}{\cos\delta} + \frac{i \cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + \frac{k \sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \qquad (12)$$

Wenn man mit dem Instrument sowohl nach einem Punkt S in der Nähe des Aequators als auch nach einem Stern in der Nähe des Pols visiren kann, so lassen sich durch geeignete Verbindung solcher Beobachtungen, nebst Umlegen des Fernrohrs und Libellenbenutzung, alle 3 Instrumentenfehler $c\ i\ k$ bestimmen und in Rechnung bringen.

Wenn man dagegen, wie in unserem Falle, nur südliche Aussicht hat, so kann von den Gleichungen (11) und (12) kein unmittelbarer Gebrauch gemacht werden. Wir nehmen an, es sei in Fig. 4. ein Meridianzeichen M vorhanden, dessen Fehler m vorerst ausser Betracht bleibt, und es komme zunächst nur darauf an, die Zeitbestimmungsreduction Δt relativ gegen den Verticalkreis ZM zu berechnen, d. h. anzugeben, um wie viel der Stern S später oder früher in den Verticalkreis ZM kommen würde, als er durch den Mittelfaden des Fernrohrs geht. Der Fehler m der Meridianmarke liefert einen Zeitfehler von derselben Form wie der Fehler k in (11) oder (12), d. h.

$$\text{für } S_0\, S': \qquad \frac{m \sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \qquad (13)$$

und die Reduction von dem Durchgang S_3 auf den Durchgang S' durch den Verticalkreis ZM ist die Differenz der Ausdrücke (12) und (13), d. h.

$$\text{für } (S_3 S')\text{: } \Delta t' = \frac{c}{\cos\delta} + \frac{i \cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} + \frac{(k - m) \sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \qquad (14)$$

es ist aber nach Fig. 3. $k - m = - c$, also

$$\Delta t' = \frac{c}{\cos\delta}\,(1 - \sin(\varphi - \delta)) + \frac{i \cos(\varphi - \delta)}{\cos\delta} \qquad (15)$$

Dieser Werth $\Delta t'$ ist zu der Durchgangszeit von S_3 Fig. 4. zu addiren, damit die Zeit des Durchgangs S' durch den Verticalkreis ZM erhalten wird.

Zur Gewinnung einer Uebersicht über diese Fehlerverhältnisse berechnen wir eine kleine Tabelle für die Breite $\varphi = 52^0$ und die Annahmen $c = i = k = 15'' = 1^s$ (vgl. Tabelle (16) S. 93).

Die letzte Spalte dieser Tabelle enthält das erste Glied der Gleichung (15), dasselbe ist stets kleiner als 1 und kann wochenlang als constant betrachtet werden, was für unsere nachfolgenden Anwendungen von Wichtigkeit ist.

Es handelt sich nun um die Bestimmung oder die Elimination der Achsenfehler i und c in (15). Wir betrachten zuerst die Horizontalachsen-Neigung i, welche sich aus zwei Theilen zusammensetzt, nämlich einem

Jahreszeit	δ	$\frac{1^s}{\cos\delta}$ (Collim.-Fehler) (c)	$\frac{1^s \cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$ (Neigung) (i)	$\frac{1^s \sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$ (Verdrehung) (k)	$\frac{1^s}{\cos\delta}\left(1-\sin(\varphi-\delta)\right)$ (Collim.-Fehler, Meridianmarke)
22. Juni	$+23^0$	$1{,}09^s$	$0{,}96^s$	$0{,}52^s$	$0{,}57^s$
20. Mai 24. Juli	$+20$	1,06	0,90	0,56	0,50
16. April 27. Aug.	$+10$	1,02	0,75	0,68	0,34
20. März 23. Sept.	0	1,00	0,62	0,79	0,21
23. Feb. 19. Oct.	-10	1,02	0,48	0,90	0,12
20. Jan. 21. Nov.	-20	1,06	0,33	1,01	0,05
21. December	-23	1,09	0,26	1,06	0,03

(16)

constanten Theil i_0, welcher von der Ungleichheit der Zapfendurchmesser der horizontalen Achse herrührt, und einem veränderlichen Theil i', welcher jeweils durch Aufsetzen der Libelle in zwei Lagen gefunden werden kann, d. h.

$$i = i_0 + i'. \tag{17}$$

Zur Bestimmung von i' beträchten wir die Libelle, deren Theilung von 0 bis 40 Striche geht, in zwei Lagen a und b aufgesetzt, wie schon früher in § 11. Fig. 2. und 3. (S. 48.) und in der nachfolgenden Fig. 5. a und b veranschaulicht ist, d. h. nach Süden schauend, nehmen wir Libelle a so, dass die Theilung 0 20 40 von links nach rechts (von Ost nach West) geht, und Lage Libelle b so, dass die Theilung von rechts nach links (von West nach Ost) geht. Dann berechnet sich die Neigung i' aus der Formel:

$$i' = \frac{a-b}{2}\, e \text{ oder } = (a-b)\,\frac{e}{2} \tag{18}$$

wenn e die Empfindlichkeit der Libelle auf 1 Strich ist.

Wenn i' positiv ist, so ist das rechtsseitige, westliche Lager höher als das linksseitige, östliche Lager, d. h. (beim Schauen nach Süden) erzeugt ein positives i' eine Neigung in gleichem Sinne wie i in Fig. 4. S. 91, und zur entsprechenden Zeitreduction dient das zweite Glied von (15). Um Zahlenwerthe einzuführen, haben wir für unsere Libelle $e = 9{,}4''$ auf 1 Strich oder in Zeitmaass $e = 0{,}627^s$, womit nach (18) wird:

$$i' = 0{,}314^s\,(a-b)$$

und das zweite Glied von (15):

$$\Delta t'_i = 0{,}314^s\,(a-b)\,\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos\delta} \tag{19}$$

Darnach ist die folgende Uebersichtstabelle berechnet:

Zeitreduction für die Horizontalachsen-Neigung i' des Passage-Instruments.

Hannover $\varphi = 52^0\ 23'$. 1 Libellenstrich $= 9{,}4'' = 0{,}627^s$.

Jahreszeit	δ	Libelle $(a - b)$									
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
22. Juni	$+23^0\ 27'$	$0{,}1^s$	$0{,}3^s$	$0{,}4^s$	$0{,}6^s$	$0{,}7^s$	$0{,}9^s$	$1{,}0^s$	$1{,}2^s$	$1{,}3^s$	$1{,}5^s$
20. Mai 24. Juli	$+20^0\ 0'$	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,3	1,4
16. April 27. Aug.	$+10^0\ 0'$	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2
20. März 23. Sept.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
23. Feb. 19. Oct.	$-10^0\ 0'$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7
20. Jan. 21. Nov.	$-20^0\ 0'$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5
21. December	$-23^0\ 27'$	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4

(20)

Die beiden anderen Fehler, welche in (15) eingehen, nämlich der constante Theil i_0 der Horizontalachsen-Neigung (17) und der Collimationsfehler c, können durch die Messung selbst eliminirt werden, durch Anwendung des Instrumentes in zwei Fernrohrlagen. Allerdings geschieht dieses nicht so bequem, wie bei geodätischen Messungen, bei welchen die Zielpunkte ruhig bleiben, indessen kann man — bei unseren einfachen Verhältnissen — bei Sonnenbeobachtungen die 5 Fadenantritte in Lage I nehmen, und die 5 Fadenaustritte in Lage II; denn zwischen den Antritten und Austritten hat man etwa eine Minute Zeit, welche gerade hinreicht, um das Fernrohr durchzuschlagen, um 180° zu drehen, neu auf die Meridianmarke einzustellen und wieder auf die Sonne zu richten. Die Libelle muss in Lage I und in Lage II besonders (je zweifach a und b) aufgesetzt werden, zur Berücksichtigung ihres Ausschlages nach der Formel (19) oder der Tabelle (20).

Bei dieser Messungsanordnung wird auch die constante Reduction (7) vom Mittel der Fadenablesungen auf den Mittelfaden selbst (welcher zum Einstellen auf die Meridianmarke dient) eliminirt, und braucht deswegen nicht besonders in Rechnung gebracht zu werden.

Eine andere und in vielen Beziehungen vorzuziehende Methode, die Differenz zwischen der Fernrohr-Lage I und Lage II zu eliminiren, und zugleich zu bestimmen, besteht darin, dass man, von Tag zu Tag abwechselnd, in beiden Fernrohrlagen beobachtet, und die zusammengehörigen Messungen in Mittel vereinigt. Wir haben so vom 31. März bis 4. April 1884 eine zusammenhängende Reihe von fünf Beobachtungen erhalten, deren erste in Lage I im Einzelnen Folgendes gab:

Hannover, 31. März 1884.

Antritte A		Austritte B		$\frac{A+B}{2}$
Faden I.	$12^h\ 4^m\ 54^s$	Faden V.	$12^h\ 8^m\ 18^s$	$12^h\ 6^m\ 36,0^s$
„ II.	5 15	„ IV.	7 59	6 37,0
„ III.	5 32	„ III.	7 40,5	6 36,25
„ IV.	5 49	„ II.	7 22	6 35,5
„ V.	6 10	„ I.	7 4	6 37,0
Mittel	$12^h\ 5^m\ 32,0^s$		$12^h\ 7^m\ 40,7^s$	$12^h\ 6^m\ 36,35^s$

$12^h\ 6^m\ 36,35^s$ (21

Fig. 5. Libelle auf der Horizontalachse des Passage-Instruments.

a. Libellentheilung von links nach rechts. *b.* Libellentheilung von rechts nach links.



die Aufsetzung der Libelle gab:

vor dem Durchgang der Sonne			nach dem Durchgang der Sonne		
$a =$	11,2	27,6	$a =$	11,1	27,8
$b =$	10,1	26,8	$b =$	9,5	26,2
$a - b$	$+ 1,1$	$+ 0,8$	$a - b =$	$+ 1,6$	$+ 1,6$

Gesammtmittel $(a - b) = + 1,28$ Striche,

damit gibt die Tabelle (20) für 31. März rund $0,3^s$ oder genauer erhält man nach der Formel (19) mit $\delta = + 4^0\ 26'$, $\varphi = 52^0\ 23'$, $\varDelta t'_1 = + 0,27^s$, was zu (21) hinzugefügt gibt $12^h\ 6^m\ 36,62^s$. Die Zeitgleichung ist am 31. März für Greenwich wahrer Mittag $g = + 4^m\ 3,80^s$, und für Hannover wahrer Mittag $g = + 4^m\ 4,29^s$, man hat also jetzt:

$$\begin{aligned} \text{Meridiandurchgang des Sonnenmittelpunktes} &= 12^h\ 6^m\ 36,62^s \text{ Uhrzeit} \\ \text{soll } 12^h + g &= 12^h\ 4^m\ \ 4,29^s \\ \text{Correction der Uhr} &= -\ \ 2^m\ 32,33^s \end{aligned} \qquad (22)$$

Die Beobachtungen in Fernrohrlage II wurden in gleicher Weise gemacht, der einzige Unterschied ist hier, dass die Fäden in umgekehrter Folge durchlaufen werden. Die von der Libelle herrührende Correction (19) behält auch in Lage II dasselbe Zeichen wie in Lage I.

Die erwähnte 5tägige Reihe gab folgende Einzelresultate, welche ebenso wie oben (22) berechnet sind.

Nummer	Tag 1884	Lage I.	Differenz	Lage II.	Differenz
1.	31. März	$- 2^m\ 32,33^s$			
2.	1. April		$1,27^s$	$- 2^m\ 38,12^s$	
3.	2. „	$- 2\ \ 33,60$			$1,36^s$
4.	3. „		1,81	$- 2\ \ 39,48$	
5.	4. „	$- 2\ \ 35,41$			
	Mittel I =	$- 2^m\ 33,78^s$		II = $- 2^m\ 38,80^s$	(23)

Diese Zahlen passen hinreichend in den Gang der Uhr, wie er in § 12. Fig. 1. S. 53 dargestellt ist, denn man findet dort durch Interpolation für 2. April — $2^m\ 34^s$, entsprechend Lage I, auch der daselbst, S. 53, für jene Zeit angegebene mittlere Gàng $0{,}8^s$ stimmt mit den Angaben vom 31. März bis 4. April, soweit dieses bei Messungen, die selbst nur auf etwa $0{,}2^s$ sicher sind, gesagt werden kann.

Nun bildet man aus (23)

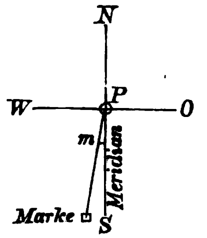
$$\frac{II - I}{2} = \frac{-5{,}02^s}{2} = -2{,}51^s \tag{24}$$

Dieser ziemlich hohe Betrag rührt her vom Collimationsfehler, von der Ungleichheit der Zapfendurchmesser der horizontalen Instrumentenachse, von der Unsymmetrie des Fadennetzes (vgl. oben (7) S. 90) und wohl noch von anderen kleinen Fehlerquellen, deren Trennung für unsere Zwecke nicht nöthig ist. Zur Elimination aller dieser Fehler wird man die Reduction (24) an den fünf Einzelmessungen anbringen; und die so reducirten Messungen vergleichen wir dann mit den an denselben Tagen gemachten Zeitbestimmungen aus correspondirenden Sonnenhöhen, die wir schon früher in (13) § 16 (S. 78.) mitgetheilt haben. Folgendes ist die Vergleichung:

Tag 1884	Passageinstrument	Corresp. Sonnenhöhen	Differenz
31. März	$-2^m\ 34{,}84^s$	$-2^m\ 34{,}49^s$	$+0{,}35^s$
1. April	$-2\ \ 35{,}61$	$-2\ \ 35{,}32$	$+0{,}29$
2. "	$-2\ \ 36{,}11$	$-2\ \ 36{,}00$	$+0{,}11$
3. "	$-2\ \ 36{,}97$	$-2\ \ 36{,}76$	$+0{,}21$
4. "	$-2\ \ 37{,}92$	$-2\ \ 37{,}33$	$+0{,}59$
		Mittel	$+0{,}31^s$ (25)

Diese im Mittel $0{,}31^s$ betragende Differenz zwischen den Angaben des Passage-Instruments und den Resultaten correspondirender Sonnenhöhen ist zu betrachten als herrührend von einer falschen Stellung der Meridianmarke *M* Fig. 4., auf welche der Mittelfaden sowohl in Lage I als auch II vor Erhebung des Rohrs eingestellt wurde, und zwar steht die Marke hiernach zu weit rechts (westlich), weil die darüber beobachteten Durchgangszeiten noch einer negativen Correction bedürfen.

Fig. 6.
Fehler der Meridianmarke
$m = 7''$.



Die Reduction erscheint in (25) positiv, weil sie hier als Correction der Differenz (Wahre Culmination — Durchgangszeit) auftritt, an der mit dem Passageinstrument beobachteten Durchgangszeit wird also eine negative Correction vorausgesetzt.

Um in Hinsicht auf die Vorzeichen jeden Zweifel zu beseitigen, schreiben wir nochmals zusammen:

1884. 31. März Lage I (s. o. (21) bis (24)):

Mittel der Uhrzeiten der Durchgänge durch die 5 Fäden (21)	12^h	6^m	$36{,}35^s$
Reduction für die Horizontalachsen-Neigung			$+\ 0{,}27^s$
Reduction von Lage I auf das Mittel beider Lagen (24)			$+\ 2{,}51^s$
Uhrzeit d. Durchgangs durch d. Verticalkreis d. Meridianmarke	12^h	6^m	$39{,}13^s$
Reduction für falsche Stellung der Meridianmarke (25)			$-\ 0{,}31^s$
Uhrzeit des Durchgangs durch den wahren Meridian	12^h	6^m	$38{,}82^s$
soll $= 12^h +$ Zeitgleichung $=$	12^h	4^m	$4{,}29^s$
Correction der Uhr	$-$	2^m	$34{,}53^s$

d. h. wenn man an der beobachteten Durchgangszeit eine Reduction $= -\ 0{,}31^s$ anbringt, so erhält man dieselbe Uhrcorrection, wie sie von den correspondirenden Sonnenhöhen, die wir als maassgebend betrachten, verlangt wird. Oder wenn die Marke im Sinne der Sonnenbewegung weiter rückwärts stünde, würde sie richtige Zeiten liefern, d. h. die Marke steht beim Schauen nach Süden zu weit rechts, oder sie hat eine Abweichung von Süden nach Westen, wie in Fig. 6. angedeutet ist, entgegengesetzt zu Fig. 4.

Den absoluten Werth der Meridianmarken-Verdrehung m erhält man aus (13) und (25):

$$\frac{m \sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} = 0{,}31^s$$

woraus mit $\varphi = 52^0\ 23'$ und $\delta = +\ 5^0\ 12'$ (2. April) sich berechnet

$$m = 0{,}42^s = 7''$$

wie in Fig. 6. beigeschrieben ist.

Als praktisches Gesammtresultat ziehen wir aus dem Vorstehenden Folgendes:

Wenn man ein Passage-Instrument, das nur Aussicht nach Süden hat, zur Zeitbestimmung mit der Sonne, auf $0{,}5^s$ genau, einrichten will, so verschaffe man sich eine Meridianmarke zunächst genähert. Auf diese Marke wird der Mittelfaden stets orientirt. Die Horizontalachse halte man mit der Libelle stets auf etwa 1 Strich richtig, oder bringe die kleinen Ausschläge mittelst einer Tafel von der Form (20) in Rechnung. Im Uebrigen aber die Instrumentenfehler zu bestimmen, und in Rechnung zu bringen, lohnt sich bei den vorausgesetzten Verhältnissen kaum der Mühe. Viel einfacher und sicherer ist es, von Zeit zu Zeit die Angaben des Passage-Instruments durch correspondirende Sonnenhöhen zu controliren, und aus dem Verlauf der Controldifferenzen die Gesammtcorrection zu berechnen, welche nach der Tafel (16) wochen- und monatelang als hinreichend constant behandelt werden darf.

§ 19. Bestimmung der Breite aus Sonnenmittagshöhen.

Aus Fig. 1., welche mit S einen culminirenden Stern, oder die Sonne, und mit H deren Höhe bezeichnet, entnimmt man:

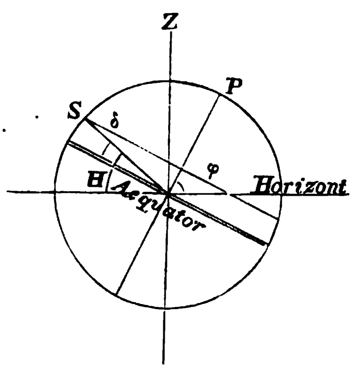
$$H - \delta + \varphi = 90^0$$

oder

$$\varphi = 90^0 - H + \delta \tag{1}$$

Diese einfache Beziehung zwischen der Culminationshöhe H eines Gestirns, der Declination δ desselben und der Breite φ liefert eine der bequemsten Breitenbestimmungen. Insbesondere mit der Sonne benützt der Seemann diese Methode zur täglichen Breitenbestimmung, wenn die Witterung es gestattet. Nur zwischen den Wendekreisen, wenn die Sonne nahe dem Zenit culminirt, versagt die Methode.

Fig. 1. Culminationshöhe H.



Ganz genau im Moment der Culmination die Höhe zu messen, wird im Allgemeinen nicht möglich sein, da aber kurz vor der Culmination die Höhenänderung eine geringe ist, so lässt sich auch aus Höhen, welche nur wenigstens in der Nähe des Meridians gemessen sind, immer noch mit Vortheil eine Breitenbestimmung gewinnen.

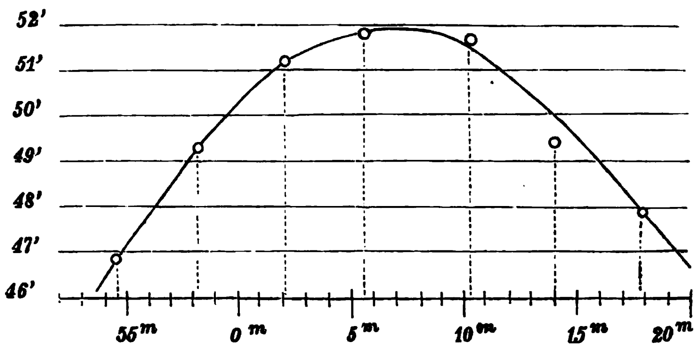
Wir betrachten sofort ein Zahlenbeispiel: Am 31. December 1873 maass ich in der Oase Farafrah folgende 7 Sonnenhöhen:

	Chronometer	Sonnenhöhe		
1.	$10^h\ 54^m\ 33^s$	$39^0\ 46'\ 50''$	Lufttemperatur = 17° C. Barometer 760 mm	(2)
2.	10 58 0	39 49 17		
3.	11 2 1	39 51 10		
4.	11 5 26	39 51 45		
5.	11 10 12	39 51 40		
6.	11 14 0	39 49 27		
7.	11 17 56	39 47 55		

Die Höhen sind mit dem Theodolit von S. 38 in beiden Fernrohrlagen gemessen, d. h. es wurde Fernrohrlage I, Sonnenoberrand, combinirt mit Fernrohrlage II, Sonnenunterrand, so dass die angegebenen Höhen bereits vom Indexfehler befreit, sich auf den Sonnenmittelpunkt beziehen. Eine Ueberlegung nach § 15. S. 69 lässt diese Beobachtungsanordnung mit Rücksicht auf die überhaupt erreichbare Genauigkeit zulässig erscheinen.

Aus dem Verlauf der Höhen, welche allmälig anwachsen, und wieder abnehmen, ist bewiesen, dass die Culmination innerhalb der Beobachtungen fällt, und wenn man nur auf etwa 1′ genau rechnen will, so nimmt man schlechthin 39° 52′ als Maximalhöhe und damit als Mittagshöhe.

Fig. 2. Circum-Meridianhöhen.



Um auch die Aussenhöhen mitreden zu lassen, und doch keine grosse Rechenmühe aufzuwenden, kann man die 7 Höhen als Ordinaten zu den 7 Zeiten als Abscissen auftragen und graphisch ausgleichen, wodurch man die Fig. 2. erhält, aus welcher man die Maximalhöhe $= 39^0\ 51'\ 50''$ entnimmt. Hiezu kommt nach Seite [7] die Refraction und die Parallaxe $-\ 1'\ 9'' + 7'' = -\ 1'\ 2''$ (Correctionen der Refr. für Temp. und Barom. bleiben bei dieser rohen Methode ausser Betracht), also wahre Culminationshöhe der Sonne $H = 39^0\ 51'\ 50'' - 1'\ 2'' = 39^0\ 50'\ 48''$.

Um die Sonnendeclination aus dem Jahrbuch entnehmen zu können, muss man die geographische Länge des Beobachtungspunktes beiläufig kennen. Diese Länge ist, für die Oase Farafrah, in unserem Fall $1^h\ 52^m$ östlich von Greenwich. Nach S. 222 des Nautical Almanac für 1873 ist am 31. December wahrer Greenwicher Mittag $\delta = -\ 23^0\ 5'\ 0''$ mit stündlicher Aenderung $= +\ 11{,}45''$, was für $1^h\ 52^m$ den Betrag $\frac{112}{60}\ 11{,}45''$ $= 21''$ ausmacht, also Sonnendeclination im Mittag von Farafrah $\delta = -\ 23^0\ 5'\ 0'' - 21'' = -\ 23^0\ 5'\ 21''$ und nun hat man nach der Grundgleichung (1)

$$
\begin{array}{lrl}
H = 39^0\ 50'\ 48'' & 90^0 - H = & 50^0\ 9'\ 12'' \\
 & \delta = & -\ 23^0\ 5'\ 21'' \\
\hline
 & \text{Farafrah}\ \varphi = & 27^0\ 3'\ 51''
\end{array} \qquad (3)
$$

Dieses Resultat stimmt sehr nahe überein mit dem Resultat der genaueren Berechnung, zu welcher wir nun übergehen. Die Beziehung zwischen einer Höhe h, der Mittagshöhe H und dem Stundenwinkel t ist durch die Gleichung (15) S. 60 unmittelbar gegeben, nämlich mit Auflösung nach $H - h$

$$\sin \frac{H-h}{2} = \sin^2 \frac{t}{2} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos \frac{H+h}{2}} \tag{4}$$

dabei ist $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$.

Wenn $H - h$ und t klein sind, kann man die Gleichung (4) näherungsweise so schreiben:

$$H - h = 2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H}$$

oder auch mit Ersetzung von H nach (1)

$$\Delta h = H - h = \frac{t^2}{2} \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)}$$

Zur numerischen Rechnung sind aber noch Maassreductionen anzubringen. Erstens ist rechts der Nenner ϱ zuzusetzen, und zweitens sind die Zeitsecunden t mit 15 zu multipliciren, um sie in Bogensecunden zu verwandeln, d. h.

$$\Delta h^{('')} = \frac{225}{2 \varrho''} (t^{(s)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{5}$$

Aehnlich hat man auch für andere Maasseinheiten

$$\Delta h^{(')} = \frac{225}{2 \varrho'} (t^{(m)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{6}$$

$$\Delta h^{('')} = 60 \frac{225}{2 \varrho'} (t^{(m)})^2 \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} \tag{7}$$

Wenn man diese Coefficienten ausrechnet, so hat man

$$\Delta h = 0{,}000\,54542'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(s)})^2 \quad \log Coeff. = 6.73673 \tag{8}$$

$$\Delta h = 0{,}032\,725' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(m)})^2 \quad \log Coeff. = 8.51488 \tag{9}$$

$$\Delta h = 1{,}9635'' \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi - \delta)} (t^{(m)})^2 \quad \log Coeff. = 0.29303 \tag{10}$$

Zu einem Ueberblick über die Reductionsbeträge Δh dient folgende Reihe, welche mit $\varphi = 50^0$ und $\delta = 0$ berechnet ist:

$t =$	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m	10^m
$\Delta h =$	0″	2″	7″	15″	26″	41″	59″	1′ 21″	1′ 45″	2′ 13″	2′ 45″

Hieraus erkennt man auch, ob es zulässig ist, die bequeme Höhenmessungsmethode anzuwenden, welche bereits bei der Gruppe (2) erwähnt wurde, nämlich je zwei aufeinander folgende Messungen mit Lage I und Lage II zu combiniren, um den Indexfehler (und Sonnenhalbmesser) sofort zu eliminiren, indem aus den beiden Zeiten und den beiden Höhen die Mittel genommen werden. Ist etwa die erste Messung um 5^m, die zweite um 7^m gemacht, so berechnet man das Mittel 6^m und hiezu die Reduction 59″, während genauer zu dem Mittel jener zwei Höhen auch das Mittel

der Reductionen 41″ und 1′ 21″, d. h. 61″ gehört, was um 2″ vom Vorigen abweicht. (Hiemit stimmt die Tafel auf S. 68 überein, nämlich 40″ für $t = 0$ und $\delta = 0$, $\varDelta t = 10^m$; dieses gibt für $\varDelta t = 2^m$ den Werth $40 \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 1{,}6''$ was auf 1″ abgerundet, 2″ gibt.)

Zur Uebersicht für Rechnungen in unseren Breiten stellen wir für $\varphi = 50^0$ Folgendes zusammen:

$\delta =$	$-23^0\ 27'$	-20^0	-15^0	-10^0	-5^0	0^0
$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$	9.78901	9.80807	9.83573	9.86389	9.89305	9.92382
$\delta =$	$+23^0\ 27'$	$+20^0$	$+15^0$	$+10^0$	$+5^0$	0^0
$\log \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$	0.12034	0.08209	0.03442	9.99335	9.95692	9.92382

Nun führen wir das Beispiel (2) weiter, und brauchen hiezu zuerst die Reduction des Chronometers auf mittlere und wahre Ortszeit. Es ist durch correspondirende Sonnenhöhen vor und nach den Sonnenmittagshöhen, gefunden worden, dass die Sonne culminirte, während die Uhr zeigte $11^h\ 6^m\ 48{,}7^s$. Die Zeitgleichung wird zum Weiteren nicht gebraucht, da aber in anderen Fällen die Reduction auf den wahren Mittag nicht so unmittelbar vorliegt, nehmen wir auch die Zeitgleichung hinzu, welche $= +\ 3^m\ 22{,}3^s$ ist, d. h. die Uhr hätte während der Culmination $12^h\ 3^m\ 22{,}3^s$ zeigen sollen, oder sie hat im Vergleich mit dem was sie wirklich zeigte, $11^h\ 6^m\ 48{,}7^s$, eine Standcorrection $= +\ 0^h\ 56^m\ 33{,}6^s$,

$$\text{d. h. mittlere Ortszeit} = \text{Chronometer} + 0^h\ 56^m\ 34^s \qquad (11)$$

Die Breite φ wird aus wenigen Ablesungen vorläufig $= 27^0\ 4'$ gefunden und die Declination der Sonne ist nach (3) $\delta = -\ 23^0\ 5'$, man hat also zur Anwendung der Formel (8)

$$\begin{array}{rl} \varphi = & 27^0\ 4' \\ \delta = & -\ 23^0\ 5' \\ \hline \varphi - \delta = & 50^0\ 9' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\cos\varphi & 9.94962 \\ \log\cos\delta & 9.96376 \\ Erg.\ \log.\sin(\varphi-\delta) & 0.11479 \\ \log Coeff. & 6.73673 \\ \hline \log C & 6.76490 \end{array} \qquad (12)$$

d. h. man hat jetzt nach (8):

$$\varDelta h^{('')} = C\ (t^{(s)})^2 \qquad (13)$$

wo C durch seinen Logarithmus nach (12) gegeben ist.

Wir geben im Folgenden die Ausrechnung der 4 Nummern 1. 3. 5. 7. des Beispiels (2) in tabellarischer Anordnung mit allen Einzelheiten.

Beob. Num.	1.	3.	5.	7.
Beobachtete Uhrzeit . . .	$10^h\,54^m\,33^s$	$11^h\,2^m\,1^s$	$11^h\,10^m\,12^s$	$11^h\,17^m\,56^s$
Reduction auf Ortszeit . .	+ 56 34	+ 56 34	+ 56 34	+ 56 34
Mittlere Ortszeit	$11^h\,51^m\,7^s$	$11^h\,58^m\,35^s$	$12^h\,6^m\,46^s$	$12^h\,14^m\,30^s$
Wahrer Mittag = $12^h + g$	12 3 22	12 3 22	12 3 22	12 3 22
Stundenwinkel t	$- 12^m\,15^s$	$- 4^m\,47^s$	$+ 3^m\,24^s$	$+ 11^m\,8^s$
In Secunden t = ...	735	287	204	668
$\log t$	2.86629	2.45788	2.30963	2.82478
$\log t^2$	5.73258	4.91576	4.61926	5.64956
$\log C$	6.76490	6.76490	6.76490	6.76490
$\log Ct^2$	2.49748	1.68066	1.38416	2.41446
Ct^2 = ...	314″	48″	24″	260″
δ im wahren Mittag . . .	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″	− 23° 5′ 21″
Aenderung für t	− 2	− 1	+ 1	+ 2
(+ 11,4″ für 1 h)				
δ = ...	− 23° 5′ 23″	− 23° 5′ 22″	− 23° 5′ 20″	− 23° 5′ 19″
Beobachtete Höhe h' . . .	93° 46′ 50″	39° 51′ 10″	39° 51′ 40″	39° 47′ 55″
Mittlere Refraction	1′ 10″	1′ 9″	1′ 9″	1′ 10″
Lufttemperatur 17°	− 2 } 1′ 2″	− 2 } 1′ 1″	− 2 } 1′ 1″	− 2 } 1′ 2″
Barometer 760	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
Höhenparall. 8,9″ $\cos h'$.	− 7	− 7	− 7	− 7
Wahre Höhe h	39° 45′ 48″	39° 50′ 9″	39° 50′ 39″	39° 46′ 53″
S. o. $Ct^2 = \Delta h$	5 14	48	24	4 20
$H = h + \Delta h$	39° 51′ 2″	39° 50′ 57″	39° 51′ 3″	39° 51′ 13″
90° − H	50 8 58	50 9 3	50 8 57	50 8 47
S. oben + δ	− 23 5 23	− 23 5 22	− 23 5 21	− 23 5 19
Breite φ = ...	27° 3′ 35″	27° 3′ 41″	27° 3′ 37″	27° 3′ 28″

Alle 7 Messungen in gleicher Weise wie diese Nr. 1. 3. 5. 7. behandelt, geben die Resultate folgender Zusammenstellung, in welcher zugleich eine Genauigkeitsschätzung beigefügt ist.

Messung	φ	v	v^2
1.	27° 3′ 35″	+ 10″	100
2.	3 40	+ 5	25
3.	3 41	+ 4	16
4.	3 51	− 6	36
5.	3 37	+ 8	64
6.	4 26	− 41	1681
7.	3 28	+ 17	289
Mittel	27° 3′ 45″	+ 44 − 47	2211

$$m_1 = \sqrt{\frac{2211}{6}} = \pm 19''$$

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{7}} = \pm 7''$$

Die 6. Messung zeigt eine auffallende Abweichung, welche aber nicht berechtigt, diese Messung auszuschliessen.

Gesammt-Resultat:

$$\text{Oase Farafrah Breite } \varphi = 27^0\ 3'\ 45'' \pm 7'' \qquad (14)$$

Der mittlere Fehler $\pm$ 7″ gilt natürlich nur vorbehältlich etwaiger constanter Fehlertheile, wovon später gehandelt werden wird.

In dem Resultat (14) sind nur 7 Sonnenhöhen benutzt, es sind aber deren im Ganzen 9 gemessen (zwei sind hier nur zur Raumersparung weggelassen). Alle 9 Höhen zusammen gaben statt (14)

$$\varphi = 27^0\ 3'\ 50'' \pm 6'' \qquad (14\,\text{a})$$

Reihe mit höheren Gliedern.

Wenn man in der Gleichung (1) § 13. S. 56 für *cos t* die Reihe setzt, so entsteht:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)$$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - \cos\varphi \cos\delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right)$$

$$\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta = \cos(\varphi - \delta) = \sin H$$

$$\sin h - \sin H = -\cos\varphi \cos\delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right) \qquad (15)$$

Zur Reihenentwicklung für $H - h$ setzen wir

$$h = H - \varDelta h \qquad (16)$$

$$\sin h = \sin H - \varDelta h \cos H - \frac{\varDelta h^2}{2} \sin H$$

Dieses in (15) eingesetzt gibt:

$$\varDelta h \cos H + \frac{\varDelta h^2}{2} \sin H = \cos\varphi \cos\delta \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right) \qquad (17)$$

in erster Näherung ist $\varDelta h = \dfrac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos H} \dfrac{t^2}{2} + \ldots = C \dfrac{t^2}{2} + \ldots \qquad (18)$

$$\varDelta h^2 = C^2 \frac{t^4}{4} + t^6 \ldots$$

Dieses in das zweite Glied links von (17) eingesetzt und mit *cos H* dividirt, gibt:

$$\varDelta h + \frac{C^2 t^4}{8} \tan H = C\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right)$$

und wenn man nach Potenzen von t ordnet, so erhält man:

$$\varDelta h = C\,\frac{t^2}{2} - \frac{C t^4}{24}\,(1 + 3\,C\,tang\,H) \tag{19}$$

Man kann diese Entwicklung auch bis zu t^6 fortsetzen, da dieses aber wenig praktischen Werth hat, schreiben wir, ohne Zwischenresultate, hievon nur das Hauptresultat:

$$\varDelta h = C\frac{t^2}{2} - \frac{C t^4}{24}\,(1 + 3\;tang\;H)$$
$$+ \frac{C t^6}{720}\,(1 + 15\;C\;tang\;H + 15\;C^2\,[1 + 3\;tang^2\,H])$$

Bei der Formel (19) stehenbleibend, betrachten wir das zweite Glied, welches die Form hat $C'\,t^4$ mit $H = 90^0 - (\varphi - \delta)$,

$$\text{wo } C' = \frac{C}{24}\,(1 + 3\;C\;cotg\;[\varphi - \delta]) \text{ und } C = \frac{cos\;\varphi\;cos\;\delta}{sin\;(\varphi - \delta)}$$

wobei C durch (18) bestimmt ist. Wenn das zweite Glied in Bogensecunden erhalten werden soll, und t in Zeitsecunden gegeben ist, so hat man zu rechnen

$$\varDelta\;h_2^{('')} = \frac{15^4}{24\;\varrho''^3}\,(t^{(s)})^4\,(\ldots) \qquad log\;Coeff. = 7.3809 - 20 \tag{20}$$

und entsprechend

$$\varDelta\;h_2^{(')} = \frac{15^4}{24\;\varrho'^3}\,(t^{(m)})^4\,(\ldots) \qquad log\;Coeff. = 2.7153 - 10 \tag{21}$$

$$\varDelta h_2^{('')} = 60\,\frac{15^4}{24\;\varrho'^3}\,(t^{(m)})^4\,(\ldots) \qquad log\;Coeff. = 4.4935 - 10 \tag{22}$$

Die Ausrechnung des Gesammt-Coefficienten für t in Zeitminuten und $\varDelta\,h$ in Bogensecunden, nämlich

$$C' = 60\;\frac{15^4}{24\;\varrho'^3}\;\frac{cos\;\varphi\;cos\;\delta}{sin\;(\varphi - \delta)}\;\left(1 + 3\;\frac{cos\;\varphi\;cos\;\delta}{sin\;(\varphi - \delta)}\;cotg\,[\varphi - \delta]\right)$$

gab für einige Hauptwerthe von δ und φ ($\varphi = 52^0\;23'$, Hannover) Folgendes:

$\delta =$	$-23^0\,27'$	-20^0	-15^0	-10^0	-5^0	0^0
für $\varphi = 52^0\,23'$ $log\;C' =$	4.413	4.470	4.554	4.640	4.730	4.825
für $\varphi = 50^0$ $log\;C' =$	4.472	4.532	4.621	4.713	4.808	4.910
$\delta =$	$+23^0\,27'$	$+20^0$	$+15^0$	$+10^0$	$+5^0$	0^0
für $\varphi = 52^0\,23'$ $log\;C' =$	5.419	5.306	5.162	5.038	4.927	4.825
für $\varphi = 50^0$ $log\;C' =$	5.564	5.439	5.279	5.142	5.021	4.910

(23)

Als Anwendung der Formel (19) mit den Coefficienten (8) und (20) mag die Reduction einer ziemlich lange nach der Culmination gemessenen Sonnenhöhe dienen.

Am 2. Juni 1873 wurde in Hannover 19 Minuten 59 Secunden nach der Culmination die Sonnenhöhe 59° 34′ 10″ gemessen, oder nach Anbringung von Refraction und Parallaxe $h = 59^0\ 38'\ 42''$. Die Höhenreduction ist nach (19) mit (8) und (20):

$$\varDelta h^{('')} = [6.73673]\, C\, (t^{(s)})^2 - [7.3809]\, C\, (1 + 3\, C\, cotg\, (\varphi - \delta))\, (t^{(s)})^4$$

wo [. . . .] die Logarithmen der Coefficienten sind.

$$\begin{array}{lrl}
\varphi = 52^0\ 23' & \log\cos\varphi & 9.78560 \\
\delta = 22\ \ 11 & \log\cos\delta & 9.96660 \\
\varphi - \delta = 30\ \ 12 & \log cosec\,(\varphi - \delta) & 0.29841 \\
 & \log C & 0.05061 \\
t = 1^m 959^s = 1199^s & \log t = & 3.07882 \\
 & \log t^2 & 6.15764 \\
 & \log Const. & 6.73673 \\
 & & 2.94498 \text{ erstes Glied} = 881{,}0'' = 14'\,41{,}0''
\end{array}$$

Die weitere Rechnung gibt:

$$\begin{array}{rl}
\log\,(1 + 3 \ldots) & 0.8320 \\
\log C & 0.0506 \\
\log Const. & 7.3809 \\
\log t^4 & 2.3153 \\
 & 0.5788 \text{ zweites Glied} = 3{,}8'' \\
 & \varDelta h = 13'\,37{,}2'' \quad (24)
\end{array}$$

Für das zweite Glied dürfte man sich wohl erlauben, den Coefficienten durch flüchtige Interpolation aus der Tabelle (23) zu entnehmen, nämlich

für $\varphi = 52^0\ 23'$ und $\delta = +\ 22{,}4^0$ $\log C' = 5.377$
hinzu in Minuten $t = 20{,}0$ $\log t = 1.301$ $\log t^4$ 5.204
$\log C'\ t^4$ 0.581 zweites Glied = 3,8″ wie vorher.

Nachdem $\varDelta\, h = 13'\ 37''$ gefunden ist, ist alle übrige Rechnung wie bei dem Beispiel von S. 102, weshalb wir diese übrige Rechnung nicht weiter verfolgen.

Die Kleinheit des zweiten Gliedes (4″) in diesem Falle gibt zu der Ueberlegung Veranlassung, wie gross dieses Glied für extreme Werthe von t wird, oder umgekehrt, wie gross der Abstand t vom wahren Mittag sein darf, wenn das zweite Glied innerhalb gewisser Grenzen bleiben oder vernachlässigt werden soll. Für die Breite $\varphi = 50^0$ erlangt dieses zweite Glied folgende Werthe:

$t =$	10^m	15^m	20^m	25^m	30^m
für $\delta = -\ 23^0\ 27'$ II =	0,0″	0,2″	0,5″	1,2″	2,4″
$\delta = -\ 10$ II =	0,1	0,3	0,8	2,0	4,2
$\delta = \ \ 0$ II =	0,1	0,4	1,3	3,2	6,6
$\delta = +\ 10$ II =	0,1	0,7	2,2	5,4	11,2
$\delta = +\ 23^0\ 27'$ II =	0,4	1,9	5,9	14,3	29,7

Wenn man also Beträge bis zu 1″ vernachlässigen will, so braucht man auf das zweite Glied keine Rücksicht zu nehmen, so lange man nicht über 25 Minuten im Winter und nicht über 12 Minuten im Sommer vom wahren Mittag entfernt beobachtet. Jedenfalls hat man in unseren Breiten 10 Minuten vor und nach Mittag, also zusammen 20 Minuten Zeit, um Breitenbestimmungen auf 1″ genau zu machen, ohne sich um das zweite Reductionsglied zu kümmern.

Einfluss eines Zeitfehlers. Das Hauptreductionsglied nach (5) ist, wenn Δh in Bogensecunden und t in Zeitsecunden gezählt wird:

$$\Delta h = \frac{225}{2\,\varrho''}\,C\,t^2, \quad \text{wo} \quad C = \frac{\cos\varphi\,\cos\delta}{\sin\,(\varphi - \delta)}$$

also

$$d\,(\Delta h) = \frac{225}{\varrho''}\,C\,t\,d\,t.$$

Hiernach ist folgende Uebersicht der Werthe $d\,(\Delta h)$ berechnet, für $d\,t = 1^s$ und $\varphi = 50^0$

$t =$	10^m	15^m	20^m	25^m	30^m
$\delta = -23^0\,27'$	0,4″	0,6″	0,8″	1,0″	1,2″
-10	0,5	0,7	1,0	1,2	1,4
0	0,5	0,8	1,1	1,4	1,6
$+10$	0,6	1,0	1,3	1,6	1,9
$+23\;\;27$	0,9	1,3	1,7	2,2	2,6

Es ist also auch in Hinsicht auf die Zeitfehler angezeigt, die Beobachtungen innerhalb 10^m vor und nach Mittag anzustellen.

Reihenentwicklung nach Potenzen von $\sin\frac{t}{2}$.

Die Gleichung (1) § 13, S. 56 kann auch in folgende Form gebracht werden:

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\left(1 - 2\,\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta - \cos\varphi\,\cos\delta\;2\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\sin h = \sin H - 2\,\cos\varphi\,\cos\delta\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$h = H - \Delta h$$

$$\sin h = \sin H - \Delta h\,\cos H - \frac{\Delta h^2}{2}\,\sin H$$

$$\Delta h + \frac{\Delta h^2}{2}\,\tang H = 2\,\frac{\cos\varphi\,\cos\delta}{\cos H}\,\sin^2\frac{t}{2} = 2\,C\,\sin^2\frac{t}{2}$$

$$\text{erste Näherung } \Delta h = 2\, C \sin^2 \frac{t}{2} + \ldots$$

$$\Delta h^2 = 4\, C^2 \sin^4 \frac{t}{2} + \ldots$$

$$\Delta h = 2\, C \sin^2 \frac{t}{2} - 2\, C^2 \, tang\, H \sin^4 \frac{t}{2} \tag{25}$$

oder indem überall φ und δ wieder eingesetzt, und die nöthigen ϱ zugesetzt werden:

$$\Delta h = 2 \varrho \sin^2 \frac{t}{2} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} - 2 \varrho \sin^4 \frac{t}{2} \left(\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\right)^2 cotg(\varphi - \delta) \tag{26}$$

Das erste Glied ist offenbar mit (5) identisch, weil $\sin \frac{t}{2} = \frac{t}{2\varrho}$.
Der Coefficient des zweiten Gliedes in (25) oder (26) ist etwas bequemer zu berechnen als der Coefficient des zweiten Gliedes von (19).

Für die Coefficienten von (26) hat man mehrfach Hülfstafeln berechnet, z. B. die astronomischen Tafeln und Formeln von Dr. C. F. W. Peters, Hamburg 1871, geben

$$2\, \varrho \sin^2 \frac{t}{2} = m \text{ und } 2\, \varrho \sin^4 \frac{t}{2} = n$$

sowie auch $\log m$ und $\log n$

auch Albrecht's Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1879, geben auf S. 146—151 die Werthe m und $\log m$, und n (nicht $\log n$).

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen heisst die Formel (26):

$$\Delta h = m \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} - n \left(\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\right)^2 cotg\,(\varphi - \delta)$$

$$\text{oder } \Delta h = m\, C - n\, C^2 \, cotg\,(\varphi - \delta)$$

und die Berechnung unseres zweiten Beispiels von S. 105 gestaltet sich hiernach so:

für $t = 19^m\, 59^s$ $\log m$	2.89400		
hinzu $\log C$	0.05061		
	2.94471	erstes Glied $= 880{,}5 = 14'\, 40{,}5''$	
fürs zweite Glied $\log n$	0.173		
$\log C^2$	0.101		
$\log cotg\,(\varphi - \delta)$	0.235		
	0.509	zweites Glied	$3{,}2''$
			$\Delta h = 14'\, 37{,}3''$ (27)

Die zwei Theile von (27) sind verschieden von den Theilen von (24), die Resultate Δh selbst aber müssen in (24) und in (27) gleich sein.

Wenn man eine Tafel dieser Art für $\log m$ und $\log n$ zur Verfügung hat, und beide Glieder von (26) berechnen will, so ist die Anordnung (26)

bzw. (27) derjenigen von (19) vorzuziehen, weil der von φ und δ abhängige Theil etwas bequemer zu berechnen ist. Wir haben jedoch die Entwicklung nach Potenzen von t selbst an die Spitze dieser Untersuchungen gestellt, weil erstens für nur ein Glied beide Rechnungen zusammenfallen, und weil zweitens die Rechnung mit Potenzen von t keine besondere Hülfstafel verlangt. Deswegen ist auch im Anhang dieses Buches keine Hülfstafel dieser Art aufgenommen. Ich habe zahlreiche Mittagsbreiten ohne eine solche Hülfstafel für $log\ m$ und $log\ n$ reducirt, wie an dem Beispiel von S. 102 angegeben ist. Für das zweite Glied kann ein besonders angelegtes Hülfstäfelchen von der Art (23) S. 104 dienen.

Declinationsänderung der Sonne. Statt die Declination der Sonne für jede Beobachtung einzeln zu berechnen, wie in unserem Beispiel S. 102 geschehen ist, kann man auch eine constante Declination einführen, welche aber nicht der Zeit der Culmination, sondern der Zeit der grössten Höhe entspricht, und von diesem Zeitpunkt der grössten Höhe sind dann auch die Stundenwinkel t zu zählen. Wir verweisen hierüber auf Brünnow, sphärische Astronomie 3. Aufl. 1871 S. 272. Für strengste Rechnung wäre auch der Stundenwinkel t immer in Sternzeit auszudrücken und die Aenderung der Zeitgleichung während der Beobachtungsdauer zu berücksichtigen, doch macht dieses fast Nichts aus.

Mit dem Instrument Fig. 1. § 10. S. 38 haben wir in der libyschen Wüste im Winter 1883—1884 12 Breiten aus Sonnenmittagshöhen bestimmt, welche in § 24. mit den entsprechenden Polaribreiten verglichen werden sollen.

Mit dem Instrument Fig. 4. § 10. S. 41 wurde an 4 Tagen des Sommers 1883 die Breite von Hannover nach dieser Methode gemessen mit den Resultaten:

$$\begin{array}{llll} 2.\ \text{Juni} & 1883 & \varphi = & 52^0\ 22'\ 45'' \\ 12.\ \ \text{„} & \ \ \text{„} & & 52\ \ 22\ \ 59 \\ 18.\ \ \text{„} & \ \ \text{„} & & 52\ \ 23\ \ \ 7 \\ 21.\ \ \text{„} & \ \ \text{„} & & 52\ \ 22\ \ 48 \\ & \text{Mittel} & \varphi = & 52^0\ 22'\ 55'' \pm 5'' \end{array} \tag{28}$$

§ 20. Bestimmung der Breite und der Ortszeit aus Sonnenmittagshöhen.

Dass man auch ohne Kenntniss der Ortszeit die Maximalhöhe der Sonne oder eines Sterns aus einer Gruppe von Höhenmessungen, welche die Culmination zwischen sich fassen, bestimmen kann, haben wir schon am Anfang des vorigen § 19. S. 99 erwähnt. Wir wollen nun aber statt der dort angedeuteten graphischen Behandlung Fig. 2. S. 99 eine Ausgleichungsrechnung vornehmen, welche auch die Ortszeit als zweite Unbekannte enthält.

Nach (1) und (6) § 19. S. 100 haben wir die Gleichungen:

$$\varphi = 90^0 - H + \delta \qquad H - h = \Delta h = C\,t^2 \tag{1}$$

Hiebei ist für Δh in Secunden und t in Zeitminuten:

$$C = 60 \frac{225}{2\varrho'} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \tag{2}$$

also

$$\varphi = 90^0 - (h + Ct^2) + \delta \tag{3}$$

φ_0 sei ein Näherungswerth von φ, und x sei eine noch zu bestimmende Correction von φ_0, also $\varphi = \varphi_0 + x$, die Ortszeit sei auch nur genähert $= t_0$ bekannt, und erhalte noch eine Correction y, endlich sei v die Verbesserung der gemessenen Höhe h, dann ist

$$\varphi_0 + x = 90^0 - (h + v + C[t_0 + y]^2) + \delta \tag{4}$$

$$C(t_0 + y)^2 = C(t_0^2 + 2t_0 y + ..)$$

$$-v = x + 2Ct_0 y + \varphi_0 - 90^0 + (h + Ct_0^2) - \delta$$

dieses ist eine Fehlergleichung von der Form:

$$-v = ax + by + l \tag{5}$$

wo

$$a = +1 \qquad b = 2Ct_0 \tag{6}$$

$$l = \varphi_0 - (90^0 - [h + Ct_0^2] + \delta) = \varphi_0 - (\varphi) \tag{7}$$

wenn mit (φ) die der Zeit t_0 entsprechende Breitenberechnung ist.

Zu einem Beispiel nehmen wir Folgendes:

Am 2. Juni 1883 wurden in Hannover über Mittag mit dem Theodolit Fig. 4. § 10. S. 41 folgende 10 Sonnenhöhen gemessen:

	Chronometer	Sonnenhöhe		
1.	11h 48m 52s	59° 45′ 42″		(8)
2.	11 51 23	59 46 55	Lufttemp. 25°	
3.	11 53 36	59 47 42	Barometer 756 mm	
4.	11 55 41	59 48 22		
5.	11 . 57 47	59 48 38		
6.	12 0 16	59 48 5		
7.	12 3 35	59 47 28		
8.	12 6 14	59 45 42		
9.	12 8 10	59 44 12		
10.	12 11 37	59 40 46		
Culmination, Näherung	11h 57m 10s			

Durch graphische Behandlung findet man, dass die Sonne ihre grösste Höhe erreichte, als die Uhr etwa $11^h\,57^m\,10^s$ zeigte, weshalb dieser Werth als Näherungswerth der Culmination bereits den Beobachtungen der Tabelle (8) unten beigefügt worden ist.

Was die Höhenmessungen selbst betrifft, so ist sowohl der Indexfehler des Höhenkreises als auch der Sonnenhalbmesser bereits eliminirt, weil abwechslungsweise der Oberrand der Sonne in Lage I und dann der Unterrand in Lage II des Fernrohrs genommen worden ist.

Da man in der Nähe der Culmination Proportionalität zwischen Zeitänderung und Höhenänderung nur für sehr kleine Zeitintervalle gelten

lassen kann, überlegen wir nach § 15. S. 69, um wie viel etwa unsere so erhaltenen Höhen zu klein sein mögen. Die Zwischenzeit zwischen je zwei in ein Mittel zusammengenommenen Messungen war im Mittel $1^m\ 40^s = 1{,}7^m$, also nach der Tabelle von S. 68, die Höhencorrection für Beschleunigung etwa $= 60''$ für 10 Minuten Zwischenzeit, folglich für 1,7 Minuten Zwischenzeit:

$$\text{Beschleunigungscorrection} = \left(\frac{1{,}7}{10}\right)^2 60 = 1{,}7'' \tag{9}$$

d. h. um so viel sind unsere in die Rechnung eingeführten Höhen zu klein und um eben so viel die daraus abgeleitete Breite zu gross.

Mit den bei (8) angegebenen Zahlenwerthen rechnet man nun Alles genau nach der Methode von § 19. S. 102. durch, und zwar hat man dabei (mit Hannover $\lambda = 38^m\ 53^s$ östlich von Greenw.) für die Culmination die Sonnendeclination $\delta = +\ 22^0\ 10'\ 44{,}7''$ und nebenbei auch die nachher gebrauchte Zeitgleichung $g = -\ 2^m\ 20^s$. Für C nach (2) hat man $log\ C = 0.3436$. Die Resultate sind:

Nummer	t	(φ)	l	$2\ Ct = b$
1.	$-\ 8{,}30^m$	$52^0\ 22'\ 56''$	$-\ 12''$	$-\ 37$
2.	$-\ 5{,}78$	62	$-\ 18$	$-\ 25$
3.	$-\ 3{,}57$	61	$-\ 17$	$-\ 16$
4.	$-\ 1{,}48$	45	$-\ 1$	$-\ 7$
5.	$+\ 0{,}62$	34	$+\ 10$	$+\ 3$
6.	$+\ 3{,}10$	47	$-\ 3$	$+\ 14$
7.	$+\ 6{,}42$	15	$+\ 29$	$+\ 28$
8.	$+\ 9{,}07$	32	$+\ 12$	$+\ 40$
9.	$+\ 11{,}00$	37	$+\ 7$	$+\ 49$
10.	$+\ 14{,}45$	52	$-\ 8$	$+\ 64$
	$\varphi_0 =$	$52^0\ 22'\ 44''$ Mittel	$-\ 1''$ Summe	$+\ 113$ Summe

$$(bb) = +\ 11385 \qquad (bl) = +\ 2286 \qquad (ll) = +\ 1965 \tag{10}$$

damit hat man die Coefficienten $a\ b\ l$ nach (5) (6) (7) und die Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} 10\,x + \quad 113\,y - 1 = 0 \\ 113\,x + 11385\,y + 2286 = 0 \qquad (ll) = +\ 1965 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Die Auflösung gibt:

$$x = +\ 2{,}6'' \pm 4{,}5'' \qquad \left.\begin{array}{l} y = -\ 0{,}227^m \pm 0{,}133^m \\ \quad = -\ 14^s + 8^s \end{array}\right\} \tag{12}$$

die Correction x zu φ_0 addirt gibt:

$$\varphi = \varphi_0 + x = 52^0\ 22'\ 44'' + 2{,}6'' \pm 4{,}5'' = 52^0\ 22'\ 46{,}6'' \pm 4{,}5'' \tag{13}$$

Und wenn man die Correction y zu den Zeiten t hinzufügt und mit den neuen Zeiten die ganze Berechnung wiederholt, so erhält man folgende Breitenwerthe:

1.	52° 22′ 47″	6.	52° 22′ 50″
2.	56	7.	22
3.	57	8.	41
4.	43	9.	48
5.	34	10.	66

Mittel $\varphi = 52^0\ 22'\ 46{,}4''$

Dieses stimmt mit (13) so nahe überein als unsere meist auf 1″ abgerundete Rechnung erlaubt und wir haben nun das Resultat mit Hinzufügung der Correction (9):

$$\varphi = 52^0\ 22'\ 45'' \pm 5''$$

Nach (8) war zuerst angenommen, dass der wahre Mittag stattfindet, wenn das Chronometer $11^h\ 57^m\ 10^s$ zeigt und dass die erste Messung zur Zeit $11^h\ 48^m\ 52^s - 11^h\ 57^m\ 10^s = -8^m\ 18^s$ vom wahren Mittag an gezählt, stattgefunden habe. Diese Zeit soll nach (12) die Correction $y = -14^s$ erhalten, soll also werden $-8^m\ 32^s$, was andererseits auf $11^h\ 57^m\ 24^s$ als neue Annahme des Uhrstandes im wahren Mittag führt. Da die Zeitgleichung $g = -2^m\ 20^s$ ist, soll die Uhr im wahren Mittag zeigen $11^h\ 57^m\ 40^s$ oder man hat im Vergleich mit $11^h\ 57^m\ 24^s$:

$$\text{Mittlere Ortszeit} = \text{Chronometer} + 0^m\ 16^s \pm 8^s,$$

wo $\pm 8^s$ als mittlerer Fehler von y nach (12) zugesetzt ist.

Es ist noch eine Bemerkung über die Beziehung zwischen den zwei Unbekannten x und y zu machen. Die Breitencorrection x ist bei (3) und (4) mit der Näherung φ_0 unabhängig eingeführt worden. Wenn jedoch, wie bei (10) geschehen ist, als Näherung φ_0 das Mittel der erstmals berechneten (φ) eingeführt wird, so muss $[l] = 0$ werden, was auch bei [10] insofern stattfindet, als -1 nur durch Abrundungshäufung statt 0 entstand. Dann wird die erste Normalgleichung $10\,x = -113\,y$ oder allgemein für n Messungen:

$$n x = -2 C\,[t]\,y$$

da $2\,Cty$ die Aenderung von $C\,(t + y)^2$ ist, so sagt also die letzte Gleichung in der Form:

$$x = -\frac{[t]}{n}\,2\,C y:$$

es ist x das negative arithmetische Mittel der durch die Zeitänderung y herbeigeführten Höhenänderungen, was unmittelbar einzusehen ist.

Endlich bemerkt man noch, dass mit $[t] = 0$ auch die Breitencorrection $x = 0$ wird, d. h. wenn die Messungen vor und nach der Culmination so gleich vertheilt sind, dass das Zeitenmittel nahe auf die Culmination fällt, so ist das Breitenmittel φ_0 nahezu unabhängig von der Kenntniss der Ortszeit.

Diesen Umstand soll man sich wohl merken, wenn man Mittagshöhen für Breite ohne vorherige Ortszeitbestimmung misst.

§ 21. Bestimmung der Breite und der Ortszeit aus beliebig zerstreuten Höhen.

Sobald man Näherungswerthe der Breite und der Ortszeit hat, kann jede Höhenmessung eines Gestirns zur weiteren Verbesserung dieser Näherungswerthe benutzt werden. Eine Höhe gegen Westen oder Osten gibt einen Beitrag für die Ortszeitbestimmung, eine Höhe im Meridian gibt einen Beitrag zur Breitenverbesserung, indessen jede Höhe in beliebigem Azimut gibt durch Differentiiren nach φ und t im Allgemeinen eine Fehlergleichung, welche zur Verbesserung von φ und von t benutzt werden kann. Diese Betrachtung bezieht sich auf beliebige Höhen der verschiedensten Gestirne, für Tagesbeobachtungen hat man jedoch nur die Sonne in verschiedenen Stellungen zur Verfügung.

Zu einem Beispiel nehmen wir eine Anzahl Sonnenhöhen, welche im Seebad Niendorf bei Travemünde am 14. Juli 1883 gemessen wurden.

Die Messungen wurden nicht mit dem Theodolit, sondern mit dem Sextanten (§ 28.) über einem künstlichen Flüssigkeitshorizont gemacht, da jedoch alle hierauf bezüglichen Reductionen (Indexfehler, Excentricität etc.) bereits an den nachstehenden Messungen (1) angebracht sind, so können wir wohl diese Messungen hier schon behandeln.

Wir haben bei (1) auch schon die Refraction und die Parallaxe in Rechnung gebracht, weil diese Reductionen für die Ausgleichung keine Fehler erzeugen.

Nummer	Chronometer		Wahre Sonnenhöhe h (als gemessen zu behandeln)
1.	$9^h\ 31^m\ 42{,}7^s$	Vormittags	$47^0\ 26'\ 11''$
2.	9 41 51,0	„	48 38 7
3.	10 22 17,4	„	52 53 37
4.	10 28 24,2	„	53 26 56
5.	11 53 6,0	„	57 41 54
6.	11 56 22,3	„	57 42 51
7.	12 4 18,7	Nachmittags.	57 42 2
8.	12 18 26,4	„	57 30 31
9.	1 30 15,0	„	53 23 4
10.	1 38 44,6	„	52 35 59

(1)

Diese Resultate sind selbst Mittel aus Gruppen von je 2 bis 5 Einzelmessungen. In der Nähe der Culmination sind nur je 2—4, weiter vom Mittag entfernt, je 5 Messungen zusammengezogen; es sind jedoch keine grösseren Zwischenzeiten zugelassen, als solche, welche nach den Betrachtungen von § 15. S. 69 Mittelbildung ohne grössere Fehler als 1″ gestatten. Wenn sich hieraus schon die oben erwähnte Vermehrung der Gruppenzahlen entfernt vom Mittag erklärt, so kommt auch noch der Umstand hinzu, dass Morgens bei starker Höhenänderung die Zeitgenauigkeit viel wichtiger ist als in der Nähe des Mittags.

Wir behandeln nun die Zahlen der Tabelle (1) wie 10 gleichgewichtige Original-Beobachtungen, bei deren Ausgleichung alle Fehler den Höhenmessungen zugewiesen werden sollen (Chronometerablesungen als fehlerfrei eingeführt).

Als ersten Näherungswerth für die Breite nehmen wir:

$$\varphi_0 = 54^0\ 0'\ 0'' \qquad (2)$$

In die Näherungs-Annahme für die Ortszeit nehmen wir auch den Gang des Chronometers auf, derselbe ist nämlich $= 3{,}0^s$ pro 1 Tag verzögernd aus den Messungen jener Zeit anderwärts genügend bekannt, was auf 1 Stunde $0{,}125^s$ ausmacht, und da eine Auswahl der Vormittagsmessungen von (1) durch eine Berechnung nach § 13. die Chronometer-Correction $= + 6^m\ 29^s$ ergeben hat, nehmen wir mit Rücksicht auf den erwähnten verzögernden Gang an:

Chronometer =	9^h	Ortszeit =	Chronometer +	$6^m\ 29{,}4^s$
"	10	"	"	29,5
"	11	"	"	29,6
"	12	"	"	29,8
"	1	"	"	29,9
"	2	"	"	30,0

(3)

Nun berechnet man für die 10 Zeitmomente, welche durch die Chronometerangaben (1) und durch die Correctionen (3), nebst der Länge $43^m\ 18^s$ östl. von Greenwich, bestimmt sind, unter Voraussetzung der Breite $\varphi_0 = 54^0\ 0'\ 0''$ die 10 wahren Höhen (h) und nebenbei auch die Azimute, die Höhen auf 1″ genau; die Azimute, welche nur zu den Coefficienten gebraucht werden, sind kaum auf 1′ genau nöthig. Die Sonnendeclination ist hiebei zwischen $21^0\ 48'\ 44''$ und $21^0\ 42'\ 11''$, die Zeitgleichung zwischen $+ 5^m\ 32{,}6^s$ und $+ 5^m\ 33{,}8^s$.

Nummer	Höhe (h)	Azimut a
1.	47° 26′ 11″	— 55° 25′
2.	48 38 21	— 52 24
3.	52 53 41	— 39 8
4.	53 26 52	— 36 57
5.	57 41 39	— 2 35
6.	57 42 35	— 1 10
7.	57 41 50	+ 2 17
8.	57 30 10	+ 8 23
9.	53 22 57	+ 37 7
10.	52 36 10	+ 40 8

(4)

Für die Fehlergleichungen hat man:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Die Ableitung nach t ist schon in (15) § 15. S. 70 behandelt worden und hat gegeben:

$$\frac{dh}{dt} = -\ 15 \cos\varphi \sin a \qquad (5)$$

wo das Azimut a von Süden nach Westen, d. h. Vormittags negativ, Nachmittags positiv, gezählt wird.

Die Ableitung nach φ gibt:

$$\cos h \; dh = (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) \; d\varphi \tag{6}$$

Wenn man eine der sphärisch-trigonometrischen Formeln (8) § 1. S. 2 mit entsprechender Buchstabenvertauschung auf das nautische Dreieck Fig. 3. § 4. S. 11 anwendet, so erhält man zunächst:

$$\tan \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t + \sin t \cot (180^0 - a)$$

wo das Azimut a ebenso wie bei (5) gezählt ist, also:

$$\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos t = - \cos \delta \sin t \cot a$$

Dieses in (6) eingesetzt gibt:

$$\frac{dh}{d\varphi} = - \frac{\cos \delta \sin t \cos a}{\cos h \sin a}$$

und da das nautische Dreieck Fig. 3. § 4. S. 11 auch noch das Sinusverhältniss gibt

$$\frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin a}{\cos \delta}$$

so hat man nun:

$$\frac{dh}{d\varphi} = - \cos a \tag{7}$$

Um hiernach die Fehlergleichung zu bilden, betrachtet man die Höhe h als Funktion des Stundenwinkels t und der Breite φ d. h.

$$\begin{aligned} h &= f(t, \varphi) = f(t_0 + \Delta t, \varphi_0 + \Delta \varphi) \\ &= f(t_0, \varphi_0) + \frac{dh}{dt} \Delta t + \frac{dh}{d\varphi} \Delta \varphi \end{aligned} \tag{8}$$

wo t_0 und φ_0 Näherungswerthe von t und φ sind.

Setzt man die Differentialquotienten bezw. $= a$ und $= b$ (Coefficient a und Azimut a können nicht verwechselt werden), und bezeichnet man $f(t_0 \; \varphi_0) = (h)$ wie schon bei (4) eingeführt ist, so hat man jetzt aus (8):

$$v = a \, \Delta t + b \, \Delta \varphi + l \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo Coefficient } a &= \frac{dh}{dt} = - 15 \cos \varphi \sin a \\ b &= \frac{dh}{d\varphi} = - \cos a \\ l &= (h) - h = \text{berechnete Höhe} - \text{beobachtete Höhe} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

v, Δt, $\Delta \varphi$ sind die Verbesserungen der gemessenen Höhen h nach (1), des Stundenwinkels t nach (3) und der genäherten Breite φ_0 nach (2).

Die Berechnung der $a \; b \; l$ nach (10) zeigt folgende Tabelle (11), welche zugleich auch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler

v enthält, und ausserdem in einer letzten Spalte die übrig bleibenden Fehler v' einer zweiten Ausgleichung, von welcher nachher die Rede sein wird.

Nummer	a	b	l	nach der Ausgleichung v	v'
1.	+ 7,3	— 0,57	0"	— 1"	— 10"
2.	+ 7,0	— 0,61	+ 14	+ 14	+ 6
3.	+ 5,6	— 0,78	+ 4	+ 6	+ 6
4.	+ 5,3	— 0,80	— 4	— 2	0
5.	+ 0,4	— 1,00	— 15	— 8	0
6.	+ 0,2	— 1,00	— 16	— 8	— 1
7.	— 0,4	— 1,00	— 12	— 3	+ 3
8.	— 1,3	— 0,99	— 21	— 13	— 7
9.	— 5,3	— 0,80	— 7	+ 4	— 7
10.	— 5,7	— 0,76	+ 11	+ 23	+ 8
	+ 13,1	— 8,31	— 46	$(vv) = 1088$	$(v'v') = 344$

(11)

Die Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{224,37}\ \Delta t - 7,38\ \Delta\varphi + 96,50 = 0 \\ \underline{+\ 7,14}\ \Delta\varphi + 52,57 = 0 \\ \underline{+\ 1464,00} \end{array}\right\} \quad (12)$$

Die Auflösung gibt

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta t = & -\ 0,70^s \pm 0,85^s \\ \Delta\varphi = & -\ 8'' \pm 4'' \\ \text{hiezu } \varphi_0 = & 54^0\ \ 0'\ \ 0'' \\ \hline \text{Resultat } \varphi = & 53^0\ 59'\ 52'' \pm 4'' \end{array}\right\} \quad (13)$$

Mittlerer Fehler einer Höhe $= \pm 12''$.

Um die einzelnen nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler v zu erlangen, hat man alle Stundenwinkel t nach (13) um $0,7^s$ oder $10''$ zu verkleinern, mit dem endgültigen φ von (13) die Höhen h neu zu berechnen, und mit den gemessenen h von (1) zu vergleichen, die so erhaltenen Werthe v sind in der vorletzten Spalte von (11) angegeben.

Betrachtet man diese Werthe v, so findet man ihre Vertheilung nicht recht befriedigend, man kann auf die Vermuthung kommen, dass eine constante Fehlerursache die positiven v im Wesentlichen an die Enden und die negativen v in die Mitte gehäuft hätte.

Diese Vermuthung und eine selbstständige Ueberlegung der einzelnen Fehlerquellen kann dazu führen, in die Fehlergleichung (9) ein constantes Glied x aufzunehmen, welches etwa dem Indexfehler der Höhenmessung entspricht, also zu setzen:

$$v' = x + a\ \Delta t + b\ \Delta\varphi + l$$

worauf die Normalgleichungen an Stelle von (12) nun werden

$$\left.\begin{array}{r} \underline{+\ 10,00\ x} + 13,10\ \Delta t - 8,31\ \Delta\varphi - 46,00 = 0 \\ \underline{+\ 224,37}\ \Delta t - 7,38\ \Delta\varphi + 96,50 = 0 \\ \underline{+\ 7,14}\ \Delta\varphi + 52,57 = 0 \\ \underline{+\ 1464,00} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die Auflösung gibt:

$$x = -50'' \pm 15'' \quad \varDelta t = +0{,}34^s \pm 0{,}58'' \quad \varDelta\varphi = -65'' \pm 17'' \quad (15)$$

die einzelnen v' nach (11) mit $(v'v') = 344$ und mittlerem Gewichtseinheitsfehler $= \pm 7''$.

Die Vergleichung der Resultate (13) und (15) beider Ausgleichungen gibt nach (11) zwar eine erheblich kleinere Fehlerquadratsumme $(v'v') = 344$ als $(vv) = 1088$ und entsprechend auch einen kleineren Gewichtseinheitsfehler $7''$ gegen $12''$ im ersten Fall, allein der mittlere Fehler des Hauptresultates φ oder $\varDelta\varphi$ ist erheblich gewachsen, nämlich von $\pm 4''$ auf $\pm 17''$ und die Annahme einer constanten Correction der Höhen $= -50'' \pm 15''$ nach (15) entspricht durchaus nicht den wirklichen Verhältnissen, abgesehen davon, dass das Resultat $\varphi = 54^0\ 0'\ 0'' - 65'' = 53'\ 58'\ 55''$, welches aus (15) folgen würde, mit anderen Bestimmungen durchaus nicht sich verträgt. All dieses und nähere Betrachtung der scheinbar besseren Fehlervertheilung v' in (11) im Zusammenhang mit den nur um 10^0 unter einander verschiedenen Höhen, führen zu dem Schluss, dass die Einführung eines constanten Gliedes x in die Fehlergleichungen, welche in anderen Fällen ganz am Platze ist, in diesem Falle nicht gerechtfertigt war.

Wir bleiben daher bei dem ersten Resultat (13) stehen und haben:

$$\text{Niendorf Breite } \varphi = 53^0\ 59'\ 52'' \pm 4'' \quad (16)$$

§ 22. Der Polarstern.

Nächst der Sonne ist für die elementaren Ortsbestimmungsmethoden auf der nördlichen Halbkugel der Erde der Polarstern (Polaris, α Ursae Minoris) das wichtigste Gestirn. Durch einen glücklichen Zufall haben wir einen Stern zweiter Grösse in diesem Jahrhundert nur zwischen 1^0 und 2^0 vom Nordpol entfernt. Das Sternbild des kleinen Bären (Ursa Minor), zu welchem der Polarstern gehört, ist in der Fig. 4. § 3. S. 9 gezeichnet. Der Polarstern liegt nahezu auf der Verlängerung der Verbindung der beiden Sterne α und β des grossen Bären (Ursa Major).

Nach dem Nautical Almanac hat der Polarstern in den nächsten Jahren folgende Rectascensionen und Polabstände:

Rectascension Polaris.

	1885	1886	1887	1888
1. Januar	$1^h\ 17^m\ 12^s$	$1^h\ 17^m\ 32^s$	$1^h\ 17^m\ 49^s$	$1^h\ 18^m\ 5^s$
1. April	1 16 10	1 16 29	1 16 45	1 17 0
1. Juli	1 17 3	1 17 22	1 17 37	1 17 54
1. October	1 18 10	1 18 27	1 18 43	1 18 58

Polabstand Polaris.

	1885	1886	1887	1888
1. Januar	1° 17′ 58″	1° 17′ 41″	1° 17′ 24″	1° 17′ 6″
1. April	1 18 12	1 17 55	1 17 38	1 17 20
1. Juli	1 18 30	1 18 13	1 17 55	1 17 37
1. October	1 18 8	1 17 52	1 17 34	1 17 14

Für manche Zwecke, z. B. Meridianbestimmung zur magnetischen Orientirung u. A. genügt diese abgekürzte Ephemeride, die man dann auch nach rückwärts und vorwärts ausdehnen kann, da man sieht, dass die Rectascension in 1 Jahr etwa um 21ˢ zunimmt, und dass der Polabstand in 1 Jahr im Mittel um 16″ abnimmt.

Die genaue Ephemeride, von Tag zu Tag, gibt der Nautical Almanac etwa auf S. 310 u. ff.

Der Polabstand p durchläuft im letzten Viertel dieses Jahrhunderts folgende Werthe:

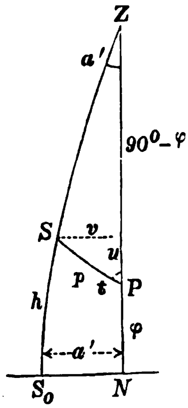
Jahr	p	Jahr	p	Jahr	p
1877	1° 20′ 48″	1885	1° 18′ 16″	1893	1° 15′ 45″
1878	1 20 29	1886	1 17 57	1894	1 15 26
1879	1 20 10	1887	1 17 38	1895	1 15 7
1880	1 19 51	1888	1 17 19	1896	1 14 48
1881	1 19 32	1889	1 17 0	1897	1 14 30
1882	1 19 13	1890	1 16 41	1898	1 14 11
1883	1 18 54	1891	1 16 23	1899	1 13 52
1884	1 18 35	1892	1 16 4	1900	1 13 33

Mit starken Fernröhren kann der Polarstern auch bei Tage beobachtet werden, was namentlich für Azimutmessung wichtig ist, weil es dadurch möglich wird, den Polarstern und einen geodätischen Zielpunkt unmittelbar nacheinander anzuvisiren. Aber auch mit einem gewöhnlichen Theodolit-Fernrohr kann man den Stern wenigstens in der Dämmerung beobachten, und hat dann den Vortheil, dass die Instrumentenablesungen immer noch mit Tageslicht gemacht werden können. So habe ich zahlreiche Messungen mit dem kleinen, nur 15fach vergrössernden, Fernrohr des Instruments Fig. 1. § 10. S. 38 in der Abenddämmerung gemacht. Das Instrument Bamberg Fig. 6. § 10. S. 44 zeigt zwar den Polarstern nicht bei voller Tageshelle, aber schon ½ Stunde vor Sonnenuntergang, wenn der Beobachtungsort im Schatten liegt. Es kommt hiebei natürlich auch sehr auf die Schärfe des beobachtenden Auges an.

In allen diesen Fällen kann man aber den Stern nicht unmittelbar finden, sondern man muss das Fernrohr nach Azimut und Höhe auf etwa 5′ genau einstellen. Einstellung auf Azimut oder Höhe allein, und vorsichtiges Drehen im anderen Sinne, genügt nicht. Für die Azimutaleinstellung hat man auf festem Wohnsitz wohl anderweitige astronomische oder geodätische Orientirung, auf Reisen muss die Bussole orientiren.

Schlimmsten Falls kann man an einem Abend die Sichtbarkeit des Sterns mit blossem Auge abwarten, dann beide Kreise roh ablesen, und anderen Tags mit ungefähr denselben Einstellungen vor Sonnenuntergang beginnen.

Fig. 1. Polarstern *S*.



Was die Berechnung der Orientirung betrifft, so kommt es zunächst auf den Stundenwinkel t an, welcher vom Meridian oben nach links gezählt wird (s. Fig. 1.). Der Stundenwinkel ist nach (1) § 3. S. 7:

$$\text{Stundenwinkel} = \text{Sternzeit} - \text{Rectascension} \quad (1)$$

In erster Näherung kann man hiebei die Sternzeit nach der Uebersicht von S. [14] des Anhangs berechnen. Wir nehmen als Beispiel 1. April Abends $6^h\ 30^m$ (Sonnenuntergang).

S. [14]	Sternzeit im mittleren Mittag	$0^h\ 40^m$	(2)
	mittlere Zeit $6^h\ 30^m$ +	$6\quad 30$	
	Ortssternzeit (genähert)	$7^h\ 10^m$	
S. 116.	— Rectascension Polaris	$-\ 1\quad 16$	
	Stundenwinkel Polaris	$t = 5^h\ 54^m = 88^0\ 30'$	

Diese Rechnung ist nur auf etwa 4^m oder 1^0 genau, was aber bei der langsamen Bewegung des Sterns zum Aufsuchen desselben genügt. Die genauere Behandlung ist in der später (§ 23. und § 24.) zu gebenden Azimut- und Breitenberechnung mit enthalten.

Obiger Werth $t = 5^h\ 54^m = 88^0\ 30'$ sagt, dass der Stern links vom Pol steht, ein wenig höher als der Pol selbst, also ungefähr in der Lage von Fig. 4. § 3. S. 9.

Nach Fig. 1. ist in erster Näherung

$$u = p \cos t \qquad v = p \sin t \qquad (3)$$

und nach (a) § 11. S. 50 ist $v = a' \sin (90^0 - \varphi)$, und dieses gibt den Azimutalwerth

$$a' = \frac{v}{\cos \varphi} = \frac{p \sin t}{\cos \varphi}\,. \qquad (4)$$

Man hat also jetzt zusammen:

$$h = \varphi + u = \varphi + p \cos t \qquad a = 360^0 - a' = -\frac{p \sin t}{\cos \varphi} \qquad (5)$$

wobei statt des linksseitigen Azimuts a' (welches in Fig. 1. eingeschrieben ist) nun das rechtsseitige, gewöhnliche Azimut a eingeführt ist.

Führt man die obige Näherungsrechnung (1) für 1. April, Hannover, Abends $6^h\ 30^m$ vollends durch, so hat man nach (5):

$$
\begin{array}{lrr}
p = 1^0 19' = 79' & \log p \; 1.8976 & \log(-p) \; 1.8976_n \\
t = 88^0\,30' & \log\cos t \; 8.4179 & \log\sin t \; 9.9998 \\
\varphi = 52^0\,23' & \overline{0.3155} & Erg.\log\cos\varphi \; 0.2144 \\
 & & \overline{2.1118_n} \\
 & +\;2' & -129' = -2^0\;9' \\
 & \varphi = 52^0\,23' & \text{Nordpunkt} = 360\;\;0 \\
 & \text{Höhe } h = 52^0\,25' & \text{Azimut} = 357^0\,51'
\end{array}
$$

Mit diesen Einstellungen wird man den Stern in der Dämmerung finden.

In gleicher Weise wurde folgende Tabelle berechnet, zunächst für Hannover, ($\varphi = 52^0\ 23'$), welche aber zur allgemeinen Orientirung auch anderwärts gebraucht werden kann.

Zeit		Stellung des Polarsterns		
		Stundenwinkel	Azimut	Höhe
1. April	6h 30m Abends	5h 54m	2° 9' links vom Pol	0° 2' über dem Pol
1. Mai	7 23 "	8 44	1 38 " " "	0 52 unter " "
1. Juni	8 10 "	11 33	0 15 " " "	1 18 " " "
1. Juli	8 24 "	13 46	0 58 rechts " "	1 11 " " "
1. August	7 51 "	15 14	1 37 " " "	0 52 " " "
1. Sept.	6 47 "	16 12	1 55 " " "	0 36 " " "
1. Octob.	5 37 "	17 0	2 5 " " "	0 20 " " "

Diese Zahlen, oder besser noch eine darnach angefertigte Zeichnung, lassen zugleich im Allgemeinen erkennen, zu welcher Jahreszeit der Polarstern für gewisse Zwecke Abends am günstigsten steht. Anfangs April ist Abends Azimutmessung sehr günstig, weil der Stern sich nahezu vertical bewegt, also die Zeit der Azimutbeobachtung nur wenig genau bekannt zu sein braucht. Umgekehrt steht Anfangs Juni der Stern Abends für Breitenmessung günstig, weil er sich in der Nähe der unteren Culmination befindet, und damit nur eine schwache Höhenänderung hat.

Zur genäherten Bestimmung der Stellung des Polarsterns gegen den Pol kann auch die auf Seite 120 stehende Zeichnung Fig. 2. dienen. Wenn die obere Scheibe centrisch und drehbar mit der unteren Scheibe verbunden wird (indem entweder die obere Scheibe ausgeschnitten oder eine auf Pauspapier gezeichnete Copie derselben auf die untere Scheibe gelegt wird), so dass für irgend welchen Zeitpunkt die auf der oberen Scheibe abgelesene Tageszeit und die auf der unteren Scheibe abgelesene Jahreszeit zusammenfallen, so zeigen die Punkte S und P die gegenseitige Lage des Polarsterns und des Pols für jenen Zeitpunkt.

Zur vorläufigen Einstellung auf den Polarstern in Hinsicht auf die Höhe kann man sich auch der Hülfstafeln des Nautical Almanac etwa S. 477 bedienen, von welchen in § 24. die Rede sein wird.

Für manche Genauigkeitsschätzungen überlegen wir noch, wie gross die Polarisbewegung im Maximum ist. Der Polabstand $1^0\ 19' = 79' = 4740''$ gibt für 1 Zeitsecunde $= 15''$ Centriwinkel die Bewegung

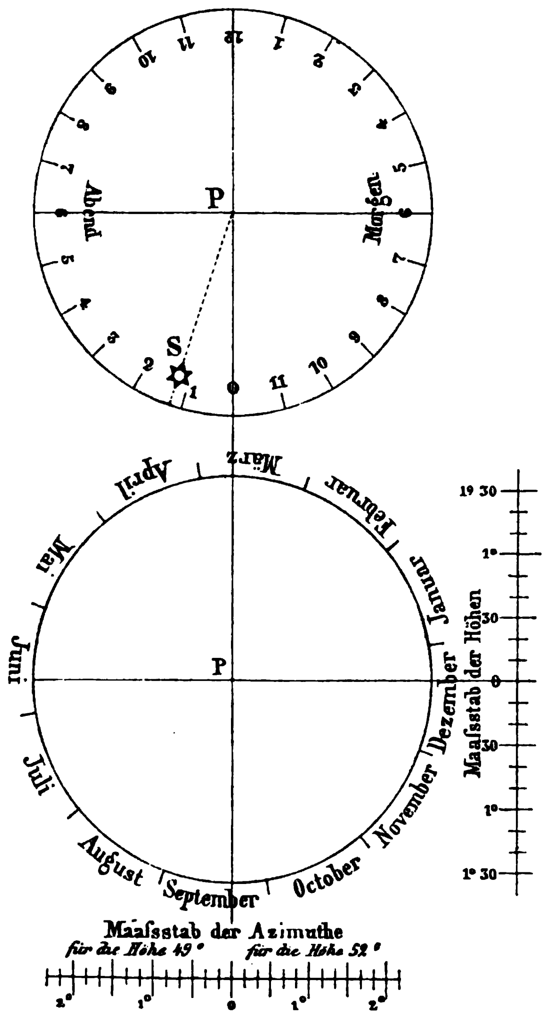
$$\frac{15''}{\varrho''}\,4740'' = 0{,}34'' \text{ in der Höhe}$$

$$\text{und im Azimut für } 52^0 \text{ Breite } \frac{0{,}34''}{\cos 52^0} = 0{,}56''.$$

Wenn man also mit einem Instrument beobachtet, das überhaupt nur 10″ abzulesen gestattet und wo 1″ die letzte Rechnungseinheit vorstellt, so ist es immer genügend, die Zeit auf 1—2^s genau zu haben.

Fig. 2.

Stellung des Polarsterns gegen den Pol.



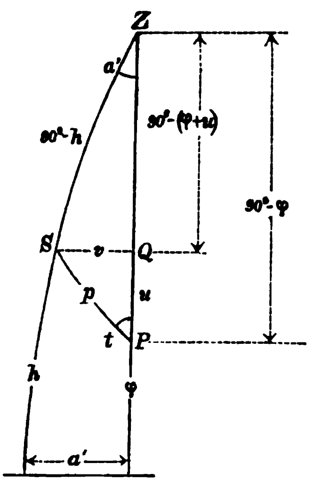
§ 23. Azimutbestimmung durch den Polarstern.

Wenn man die Declination δ und den Stundenwinkel t eines Sterns kennt, so lässt sich für eine gegebene Breite φ das Azimut des Sterns berechnen, und wenn man in dem betreffenden Zeitpunkt den Azimutalwinkel zwischen dem Stern und einem geodätischen Zielpunkt mit einem Theodolit misst, so erhält man durch Zufügen dieses Winkels zu dem berechneten Azimut des Sterns auch das Azimut des geodätischen Zielpunktes. Die Beziehung zwischen φ t und $p = 90^0 - \delta$ einerseits und dem Azimut a andererseits erhält man durch Anwendung der sphärisch-trigonometrischen Formel (8) § 1. S. 2 auf das astronomische Dreieck § 4. Wir haben diese Anwendung schon bei Fig. 2. und Fig. 3. § 4. S. 11 ausgeführt und in (2) S. 11 die Formel gefunden:

$$cotg\ a = \frac{sin\ \varphi\ cos\ t - tang\ \delta\ cos\ \varphi}{sin\ t} \tag{1}$$

Dabei ist das Azimut a von Süden nach Westen gezählt (Fig. 1. S. 10), da indessen $cotg\ (a \pm 180^0) = cotg\ a$ ist, so kann man in (1) auch das Azimut a von Norden nach Osten zählen, wie wir für den Polarstern annehmen wollen.

Fig. 1.
Astronomisches Dreieck ZPS des Polarsterns S.



Die Formel (1) lässt sich unmittelbar auf jeden Stern, auch auf die Sonne, anwenden. Wir behandeln jedoch nun den Fall des Polarsterns besonders, weil dieser Stern wegen seiner langsamen Bewegung sich zur Azimutmessung besonders eignet. Da der Polabstand $p = 90^0 - \delta$ beim Polarstern besonders klein ist, empfiehlt es sich, statt der geschlossenen Formel (1) eine Reihenentwicklung anzuwenden.

Unter Verweisung auf § 25., wo diese Reihenentwicklung allgemeiner betrachtet werden wird, nehmen wir hier eine geometrisch anschauliche Behandlung in zwei Abstufungen. Hiezu dient Fig. 1., welche im Wesentlichen wieder die Verhältnisse von Fig. 1. § 22. S. 118 vorführt.

Wenn $SQ = v$ auf dem Meridian PZ rechtwinklig ist, so bestehen die Gleichungen:

$$tang\ u = tang\ p\ cos\ t \qquad sin\ v = sin\ p\ sin\ t \tag{2}$$

$$tang\ a' = \frac{tang\ v}{sin\ [90^0 - (\varphi + u)]} = \frac{tang\ v}{cos\ (\varphi + u)} \tag{3}$$

Wenn man zunächst Fehler von 1″ bis 2″ vernachlässigt, so braucht man die Glieder dritter Ordnung nicht zu berücksichtigen, und hat dann aus (2) und (3):

$$u = p \cos t \qquad v = p \sin t \tag{4}$$

$$a' = \frac{v}{\cos\varphi - u \sin\varphi} = \frac{v}{\cos\varphi}\,\frac{1}{(1 - u \tang\varphi)}$$

$$a' = \frac{v}{\cos\varphi}\,(1 + u \tang\varphi)$$

und mit Einsetzung von (4):

$$a' = \frac{p \sin t}{\cos\varphi} + \frac{p^2}{\cos\varphi} \tang\varphi \sin t \cos t \tag{5}$$

Nach Fig. 1 ist a' das von Norden nach Westen (links) gezählte Azimut, führt man statt dessen das nach Osten (rechts) gezählte Azimut a ein, welches auch in Gleichung (1) benützt ist (und fügt man zugleich in (5) im zweiten Glied den Nenner ϱ zu, um vom analytischen aufs geometrische Maass überzugehen), so erhält man aus (5):

$$a = -\frac{p \sin t}{\cos\varphi} - \frac{p^2}{\varrho}\,\frac{1}{\cos\varphi} \tang\varphi \sin t \cos t \tag{6}$$

Für die nächsten 10 Jahre hat man für das zweite Glied:

Jahr	$\log \frac{p^2}{\varrho}$		Jahr	$\log \frac{p^2}{\varrho}$	
	in Minuten	in Secunden		in Minuten	in Secunden
1885	0.2509	2.0290	1890	0.2331	2.0113
1886	0.2474	2.0255	1891	0.2297	2.0179
1887	0.2438	2.0220	1892	0.2261	2.0043
1888	0.2403	2.0184	1893	0.2225	2.0006
1889	0.2367	2.0149	1894	0.2188	1.9970
1890	0.2331	2.0113	1895	0.2152	1.9934

Die Formel (6) ist noch nicht auf 1″ — 2″ genau, wir führen deshalb die Reihenentwicklung bis zur dritten Potenz weiter, und erhalten damit aus (2) und (3):

$$u + \frac{u^3}{3} = \left(p + \frac{p^3}{3}\right) \cos t \qquad v - \frac{v^3}{6} = \left(p - \frac{p^3}{6}\right) \sin t \tag{7}$$

erste Näherungen, wie bei (4):

$$\begin{aligned} u &= p \cos t + p^3 \dots & v &= p \sin t + p^3 \dots \\ u^3 &= p^3 \cos^3 t + p^5 \dots & v^3 &= p^3 \sin^3 t + p^5 \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Näherungen (8) wieder in (7) eingesetzt, geben:

$$u = p \cos t + \frac{p^3}{3} \cos t \sin^2 t \qquad v = p \sin t - \frac{p^3}{6} \sin t \cos^2 t \qquad (9)$$

Nun kommt die höhere Entwicklung von (3):

$$a' + \frac{a'^3}{3} = \frac{v + \frac{v^3}{3}}{\cos\varphi - u \sin\varphi - \frac{u^2}{2}\cos\varphi}$$

$$a' + \frac{a'^3}{3} = \frac{v + \frac{v^3}{3}}{\cos\varphi} \, \frac{1}{1 - u \tan\varphi - \frac{u^2}{2}}$$

$$a' + \frac{a'^3}{3} = \left(v + \frac{v^3}{3}\right) \frac{1}{\cos\varphi} \left(1 + [u \tan\varphi + \frac{u^2}{2}] + [u \tan\varphi - \ldots]^2\right) \quad (10)$$

erste Näherung $a' = \frac{v}{\cos\varphi} + \ldots \qquad a'^3 = \frac{v^3}{\cos^3\varphi} + \ldots$

Setzt man diesen letzten Werth a'^3 in (10), und ordnet mit Weglassung aller Potenzen über der dritten, so erhält man:

$$a' = \frac{v}{\cos\varphi}\left(1 + u \tan\varphi + \frac{u^2}{2} + u^2 \tan^2\varphi - \frac{v^2}{3} \tan^2\varphi\right)$$

Setzt man hier im Gliede vor der Klammer für v seinen Werth aus (9), und in der Klammer die ersten Näherungen $u = p \cos t$, $v = p \sin t$, so erhält man:

$$\begin{aligned} a' \cos\varphi = {} & p \sin t - \frac{p^3}{6} \sin t \cos^2 t \\ & + p^2 \sin t \cos t \tan\varphi \\ & + \frac{p^3}{2} \cos^2 t \sin t + p^3 \cos^2 t \tan^2\varphi \sin t - \frac{p^3}{3} \sin^3 t \tan^2\varphi \end{aligned}$$

nach Potenzen von p geordnet, zugleich mit Zusetzung der nöthigen ϱ und mit Zählung von Nord nach Ost (nach rechts) d. h.
$a = 360^0 - a' = - a'$:

$$\left.\begin{aligned} a = {} & - \frac{p \sin t}{\cos\varphi} - \frac{p^2}{\varrho} \frac{\tan\varphi}{\cos\varphi} \sin t \cos t \\ & - \frac{p^3}{3\varrho^2} \frac{\sin t}{\cos\varphi}\left(\cos^2 t\,(1 + 3\tan^2\varphi) - \sin^2 t \tan^2\varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Das dritte Glied, welches man auch so schreiben kann:

$$III = - \frac{p^3}{3\varrho^2} \frac{\sin t}{\cos\varphi} \left((1 + 4 \tan^2\varphi) \cos^2 t - \tan^2\varphi \right)$$

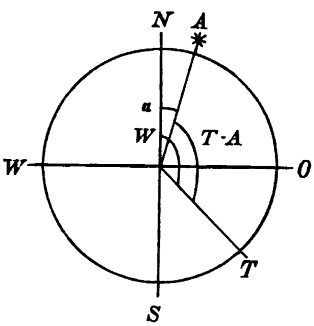
erreicht nur kleine Werthe. Mit $p = 1^0\ 18' = 78' = 4680''$ hat man $log\ \frac{p^3}{3\varrho^2} = 9.90477$ und für $\varphi = 52^0\ 23'$ (Hannover) berechnet man folgende Werthe:

$t =$	0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h
$III =$	0,0"	−1,9"	−2,7"	−2,0"	−0,3"	+1,5"	+2,2"	+1,5"
$t =$	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h	13^h	14^h	15^h
$III =$	−0,3"	−2,0"	−2,7"	−1,9"	−0,0"	+1,9"	+2,7"	+2,0"
$t =$	16^h	17^h	18^h	19^h	20^h	21^h	22^h	23^h
$III =$	+0,8"	−1,5"	−2,2"	−1,5"	+0,3"	+2,0"	+2,7"	+1,9"

(12)

Wenn die Rechnung überhaupt nur auf 1" genau sein soll, kann man dieses Täfelchen für ganz Deutschland benützen. Im übrigen kann man für jeden Beobachtungsort und jeden Werth p jeweils ein besonderes Hülfstäfelchen dieser Art, (12) anlegen.

Fig 2. Azimut a des Polarsterns.



Nachdem in der angegebenen Weise das Azimut a des Polarsterns gefunden ist, erhält man das Azimut W eines terrestrischen Zielpunktes nach Fig. 2.

$$W = a + (T - A) = (a - A) + T \quad (13)$$

wenn A die Kreisablesung ist, welche während der Visur auf den Stern genommen ist und T die Kreisablesung für den terrestrischen Zielpunkt.

Zu einem Beispiel nehmen wir die Polarsternbeobachtung vom 2. April 1884, Abends, in Hannover. Die Messung wurde mit dem auf S. 44 abgebildeten Instrument von Bamberg gemacht. Das Instrument wurde nach einer vorläufigen Berechnung (vgl. S. 119) auf den Stern bei Tage eingestellt und die Messung selbst gelang bereits ½ Stunde vor Sonnenuntergang. Die Reduction der beobachteten Uhrzeit auf mittlere Ortszeit erfolgte nach den Angaben eines Taschenchronometers, dessen Stand und Gang zunächst nach einer Pendeluhr und durch diese mittelst des Passageinstruments bestimmt ist.

Das Instrument befand sich auf der Eisenplatte (Punkt E) der geodätischen Plattform der technischen Hochschule in Hannover, und als terrestrischer Zielpunkt diente der Wasserthurm in Linden, welcher vor und nach der Sternbeobachtung je zweimal eingestellt wurde.

Die Originalmessungen sind folgende:

	Lage I		Lage II	
	Mikr. A	Mikr. B	Mikr. A	Mikr. B
Wasserthurm	111° 39′ 57″	291° 39′ 52″	291° 40′ 10″	111° 40′ 0″
	39 39	40 17	40 15	40 12
Polarstern Chron.				
$5^h\ 58^m\ 58^s$	277° 53′ 10″	97° 53′ 30″		
6 0 14	53 3	53 22		
6 0 55	53 2	53 22		
6 1 40	53 5	53 23		
$6^h\ 8^m\ 35^s$			97° 52′ 32″	277° 53′ 18″
6 9 48			52 23	53 4
6 10 34			52 24	53 8
6 11 26			52 27	53 12
Wasserthurm	111° 39′ 52″	291° 40′ 22″	291° 40′ 2″	111° 40′ 23″
	40 8	40 27	40 7	40 26

Um eine übersichtliche Rechnung zu erhalten, bilden wir aus allen gleichartigen Messungen Mittelzahlen:

	Lage I	Lage II	
Wasserthurm	111° 40′ 4,2″	291° 40′ 11,9″	(14)
Polarstern $6^h\ 0^m\ 26{,}7^s$	277 53 14,6		
„ 6 10 5,7		97 52 48,5	

Der Nautical Almanac für 1884 gibt auf S. 313 für 2. April:

$$\left.\begin{array}{rl} \alpha \text{ Ursae Minoris (Polaris) Rectascension } \alpha = & 1^h\ 15^m\ 48^s \\ \text{Declination } \delta = & 88^0\ 41'\ 31'' \\ \text{oder Polabstand } p = & 1\ \ 18\ \ 29 = 4709'' \end{array}\right\} \quad (15)$$

(Hier wäre noch eine Reduction für tägliche Aberration anzubringen, welche aber niemals 1″ ausmacht, und da wir nur auf 1″ genau rechnen wollen, vernachlässigt werden soll.)

Zugleich nimmt man von S. 57 desselben Nautical Almanac die Sternzeit im mittleren Greenw. Mittag $= 0^h\ 44^m\ 56{,}4^s$, wozu nach S. 23 die Reduction auf Hannover mit $-\ 6{,}4^s$ kommt, also Sternzeit im mittleren Hannover-Mittag:

$$T_H = 0^h\ 44^m\ 50{,}0^s \quad (16)$$

Damit erhält man folgende Berechnung:

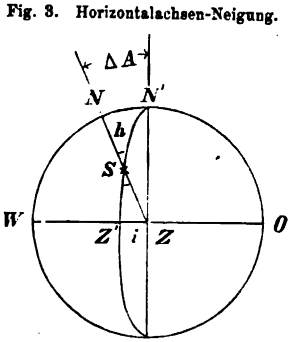
	Lage *I*	Lage *II*
Beobachtete Uhrzeit	$6^h\ 0^m\ 26{,}7^s$	$6^h\ 10^m\ 5{,}7^s$
Reduction auf mittlere Ortszeit	$+\ 0\ \ 30{,}0$	$+\ 0\ \ 30{,}0$
Mittlere Ortszeit t'	$6^h\ 0^m\ 56{,}7^s$	$6^h\ 10^m\ 35{,}7^s$
Zuschlag für Sternzeit (S. [4] I.)	$+\ 0\ \ 59{,}3$	$+\ 1\ \ 0{,}9$
Sternzeit im Hannov. Mittag, s. o. (16) . .	0 44 50,0	0 44 50,0
Ortssternzeit	$6^h\ 46^m\ 46{,}0^s$	$6^h\ 56^m\ 26{,}6^s$
— Rectascension Polaris, s. o. (15) . . .	1 15 48	1 15 48
Stundenwinkel t	$5^h\ 30^m\ 58^s$	$5^h\ 40^m\ 39^s$
„ in Bogen S. [3] $t =$ . . .	$82^0\ 44'\ 30''$	$85^0\ 9'\ 45''$
$p = 4709$ (s. o. (15)) gibt $log\ (-\ p)$ . . .	3.672929_n	3.672929_n
$\varphi = 52^0\ 23'$ gibt *Erg. log cos* φ	0.214403	0.214403
log sin t	9.996506	9.998450
log I	3.883838_n	3.885782_n
Hiezu nochmals *log p*	3.6729	3.6729
Erg. log ϱ''	4.6856	4.6856
log tang φ	0.1132	0.1132
log cos t	9.1016	8.9260
log II	1.4571_n	1.2835_n
Erstes Glied $I =$	$-\ 7653{,}1''$	$-\ 7687{,}5''$
$I =$	$-\ 2^0\ 7'\ 33{,}1''$	$-\ 2^0\ 8'\ 7{,}5''$
Zweites Glied $II =$	$-\ \ 28{,}6$	$-\ \ 19{,}2$
Hiezu drittes Glied nach (12) mit $t = 5^1/_2{}^h$	$+\ \ 1{,}8$	$+\ \ 1{,}8$
Azimut des Polarsterns $a =$	$-\ 2^0\ 7'\ 59{,}9''$	$-\ 2^0\ 8'\ 24{,}9''$
Oder $a =$	$357^0\ 52\ \ 0{,}1$	$357^0\ 51\ \ 35{,}1$
Kreisablesung Polaris (14) $A =$	277 53 14,6	97 52 48,5
Nach Gleichung (13) $a - A$	$89^0\ 58'\ 45{,}5''$	$269^0\ 58'\ 46{,}6''$
Kreisablesung Wasserthurm (14) $T =$ . .	111 40 4,2	291 40 11,9
Azimut Wasserthurm W	$201^0\ 38'\ 49{,}7''$	$201^0\ 38'\ 58{,}5''$

(Die Zeilen *log I* bis *log cos t* sind durch eine Klammer zu *log II* zusammengefasst.)

Mittel $201^0\ 38'\ 54''$ (17)

Berücksichtigung der Horizontalachsen-Neigung des Instruments (Fig. 3). Wenn die Horizontalachse des Instruments nicht genau horizontal, sondern etwa von West unten nach Ost oben um den Winkel i geneigt ist, so bewegt sich das Fernrohr nicht in einer Verticalebene, sondern in einer schiefen Ebene $N'SZ'$ (Fig. 3.), wobei die Zenitverrückung ZZ' wieder gleich der Achsenneigung i ist; und ein Punkt S, welcher von dem falschen Zenit Z' aus nach N' projicirt wird, würde von dem wahren Zenit Z aus nach N projicirt

Fig. 3. Horizontalachsen-Neigung.



werden, oder es ist $NN' = \Delta A$ der durch den Fehler i erzeugte Azimutfehler. Da in Fig. 3. zwei schmale Dreiecke von der Form Fig. 4. S. 49 vorkommen, in welchen $NS = h$ und $ZS = 90^0 - h$ ist, so hat man nach (a) S. 50, wenn der Winkel bei S vorübergehend mit S bezeichnet wird:

$$\Delta A = S \sin h \qquad i = S \sin\,(90^0 - h)$$

woraus

$$\Delta A = i \tan h \tag{18}$$

wie auch schon in (2) S. 45 citirt ist.

Fig. 4.
Neigung i der Horizontalachse.

a. **Libellentheilung von links nach rechts.** *b.* **Libellentheilung von rechts nach links.**



Die Achsenneigung i wird durch die Libelle gewonnen. Wenn in Fig 4. die Libelle mit Theilung von links nach rechts eine Blasenmitte $= a$ gibt, und nach Umsetzung, mit Theilung von rechts nach links, eine Blasenmitte $= b$, so ist der Blasenausschlag gegen die Mitte 20:

$$\begin{array}{lll} \text{Für Fig. } 4a & \text{Ausschlag} & = a - 20 \\ \text{,, ,, } 4b & \text{,,} & = 20 - b \\ \hline \text{Ausschlag im Mittel} & & \dfrac{a - 20 + 20 - b}{2} = \dfrac{a-b}{2} \end{array} \tag{19}$$

Die Ablesungen a und b für die Blasenmitten sind selbst wieder die Mittel aus den Ablesungen für die Blasenenden, da man aber nachher a und b zu subtrahiren hat, kann man auch unmittelbar die Ablesungen für die Blasen*enden* mit a und b bezeichnen und subtrahiren.

Im Falle unseres obigen Beispiels wurde in Lage I abgelesen:

	Blasenenden	
$a =$	15,0	28,2
$b =$	10,4	23,5
$a - b =$	+ 4,6	+ 4,7

im Mittel $a - b = + 4{,}65$ Striche (20)

Ist e die Empfindlichkeit der Libelle für 1 Strich, so hat man nun die Neigung

$$i = \frac{a - b}{2}\, e \quad \text{oder} \quad = \frac{e}{2}\,(a - b)$$

Die Azimutcorrection ist also jetzt nach (18):

$$\Delta A = \frac{e}{2}\,(a - b) \tan h \tag{21}$$

und was das Vorzeichen betrifft, so zeigt der Anblick von Fig. 3., dass für positives i, oder positives $a - b$, (O höher als W, Fig. 4.) die Kreisablesung N' für den Stern S zu gross ausfällt, im Vergleich zu der Kreisablesung N, welche man erhalten haben würde, wenn $i = 0$ wäre. Oder man hat an der Kreisablesung für den Stern die negative Correction ΔA nach (21) anzubringen. Das schliessliche Azimut des terrestrischen Zielpunktes ist aber nach (13):

$$W = (a - A) + T$$

Weil hier $- A$ vorkommt, so geht die soeben gefundene negative Correction ΔA von A als positive Correction auf W über, und wir haben nun das Resultat: die von der Horizontalachsenneigung des Theodolits herrührende Correction des Azimutes des terrestrischen Zielpunktes beträgt:

$$\Delta_i = + \frac{e}{2} (a - b) \; tang \; h \qquad (22)$$

wenn a und b die Libellenablesungen nach Fig. 4. und Gleichung (19) und (20) sind.

Die Empfindlichkeit unserer Libelle beträgt 9,5″ auf 1 Strich, wie schon auf S. 44 angegeben wurde, also $\frac{e}{2} = 4{,}75''$ und

$$\Delta_i = 4{,}75'' \, (a - b) \; tang \; h$$

Die Sternhöhe h kann man, wenn sie nicht unmittelber gemessen ist, vielleicht genähert $= \varphi$ nehmen, oder auch genauer nach (5) § 22. S. 118

$$h = \varphi + p \cos t$$

was in unserem Falle für Lage I gibt: $h = 52^0\,23' + 10' = 52^0\,33'$, also mit $(a - b) = + 4{,}65$ nach (20):

$$\Delta_i = 4{,}75'' \, (+ 4{,}65) \; tang \; 52^0\,33' = + 28{,}8''$$

Die Lage II gab in unserem Falle zufällig $a - b = 0$, es ist also jetzt die Fortsetzung von (17):

	Lage I	Lage II
Azimut Wasserthurm	201° 38′ 49,7″	201° 38′ 58,5″
Correction für Horizontalachsen-Neigung Δ_i	+ 28,8	0,0
Corrigirt	201° 39′ 18,5″	201° 38′ 58,5″
Mittel	201° 39′ 8″	(23)

Die Differenz der beiden in dem Resultat (23) zusammenwirkenden Messungen von Lage I und Lage II, nämlich 39′ 18,5″ — 38′ 58,5″ = 20,0″ rührt von verschiedenen Ursachen her, jedenfalls vom Collimationsfehler des Fernrohrs und von einer Ungleichheit der Zapfenenden der horizontalen Achse (vgl. S. 47), da aber diese Fehlerursachen im Mittel aus Lage I und Lage II sich aufheben, haben wir keine dringliche Veranlassung, sie im Einzelnen näher zu untersuchen.

In dieser Weise wurden an 4 aufeinanderfolgenden Tagen, wobei der

Horizontalkreis des Instruments je um 90° gedreht wurde, folgende Resultate erhalten:

Azimut von dem Punkt *E*, Eisenplatte auf der Plattform der technischen Hochschule Hannover, nach dem Punkt Wasserthurm Linden, Flaggenstange, von Nord über Ost:

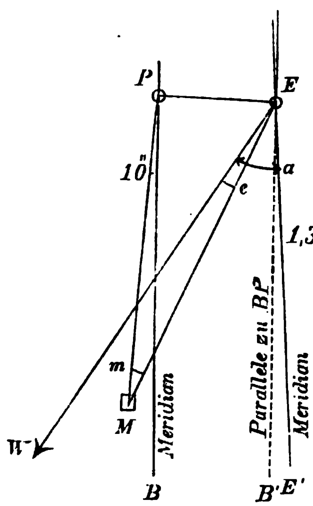
1. April 1884	201° 39′ 16″	
2. „ „	39 8	
3. „ „	39 14	
4. „ „	39 17	
Mittel	201° 39′ 14″ ± 2″	(24)

Mittlerer Fehler einer Bestimmung = ± 4″

Dieses Resultat lässt sich mit einer geodätischen Uebertragung von Göttingen vergleichen, welche 201° 39′ 8″, also eine Uebereinstimmung auf 6″ gab.

Eine zweite Controlle für das Azimut (24) erhalten wir durch Vergleichung mit den Zeitbestimmungen durch das Passage-Instrument und durch correspondirende Sonnenhöhen, welche wir in § 18. S. 96 beschrieben haben.

Fig. 5.
Geodätische Azimutübertragung von *E* nach *P*.



Zu dieser Vergleichung dient Fig. 5., in welcher *E* den Standpunkt der Azimutmessung (24), *P* das Passage-Instrument von § 18., und *M* das zum Passage-Instrument gehörige Meridianzeichen ist. Die Punkte *E* und *P* haben in dem Hannover'schen Coordinatensystem eine Ordinatendifferenz $\Delta y = 32$ Meter (von Ost nach West gezählt), folglich ist die Convergenz der Meridiane *EE′* und *PB*

$$= \frac{\Delta y}{R}\, \varrho \tan \varphi = 1{,}3'' \qquad (25)$$

wenn *R* der Querkrümmungs-Halbmesser der Erde für die Breite $\varphi = 52^\circ\ 23'$ ist. Diese Meridianconvergenz $E'EB' = 1{,}3''$ ist in Fig. 5. eingeschrieben. Nun brauchten nur noch die zwei Winkel *e* und *m* auf den Standpunkten *E* und *M* gemessen zu werden, um das in *E* gemessene Azimut (24) auf *P* zu übertragen, d. h. wir haben:

Gemessenes Azimut in *E* nach (24),	$a = E'EW =$	201° 39′ 14,0″
Meridianconvergenz nach (25)		— 1,3
Differenz	$B'EW =$	201° 39′ 12,7″
geodätisch gemessen: Winkel	$MEW = e =$	5 19 14,6
	$B'EM =$	196° 19′ 58,1″

Die Umkehrung hievon gibt Azimut $(ME) = 16^0\ 19'\ 58{,}1''$
geodätisch gemessen: Winkel $PME = m = 16\ \ 19\ \ 48{,}4$

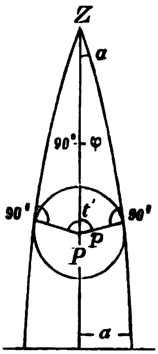
also Azimut $(MP) = +\ 0^0\ \ 0'\ \ 9{,}7''$

Also auch Azimut $(PM) = 180^0\ \ 0'\ \ 9{,}7''$ (26)

d. h. die Visur *PM* vom Passage-Instrument *P* nach der Meridianmarke *M* weicht von dem Meridian *PM* um 10″ ab in dem Sinne, wie in Fig. 5. eingeschrieben ist.

Dieses Resultat stimmt sehr nahe überein mit dem in § 18. S. 96 Fig. 6. auf ganz anderem Wege erhaltenen Resultat 7″.

Fig. 6.
Grösste Ausweichungen des Polarsterns.



G r ö s s t e A u s w e i c h u n g e n d e s P o l a r s t e r n s. Wenn es gelingt, den Polarstern in seinen beiden äussersten Ausweichungen links und rechts vom Pol zu beobachten, so hat man den Meridian im Mittel der zugehörigen Azimutalablesungen ohne weitere Rechnung. Lediglich auf dem Weg des Probirens die grössten Ausweichungen mit dem Theodolit zu verfolgen, ist umständlicher als es auf den ersten Blick scheint. Zudem ist zu beachten, dass im Allgemeinen die eine Ausweichung in den Tag, die andere in die Nacht fallen wird, so dass verschiedene Beobachtungsarten nöthig würden.

Um aus e i n e r grössten Ausweichung den Meridian zu bestimmen, hat man das zugehörige Azimut *a* zu berechnen.

Nach Fig. 6. hat man:

$$\sin a = \frac{\sin p}{\sin\,(90^0 - \varphi)} = \frac{\sin p}{\cos \varphi} \tag{27}$$

$$\text{sehr nahe } a = \frac{p}{\cos \varphi} \tag{27a}$$

und der Stundenwinkel t' für die Ausweichung ergibt sich aus

$$\cos t' = \frac{\tang p}{\tang\,(90^0 - \varphi)} = \tang p\ \tang \varphi$$

oder genähert, für t' in Zeitminuten und p in Bogenminuten:

$$6^h - t' = \left(\frac{p}{15}\right) \tang \varphi$$

für $p = 1^0\ 18'$ erhält man hieraus:

$\varphi =$	0^0	15^0	30^0	45^0	50^0	55^0	60^0	75^0	(28)
$t' =$	$6^h\ 0^m$	$5^h\ 59^m$	$5^h\ 57^m$	$5^h\ 55^m$	$5^h\ 54^m$	$5^h\ 53^m$	$5^h\ 51^m$	$5^h\ 41^m$	

In Breiten über $88^0\ 42'$ kommt der Polarstern überhaupt nicht mehr in grösste Ausweichung (stationäres Azimut), wohl aber in den ersten Vertical (vgl. S. 71).

Die Ausweichungswerthe a selbst werden nach (27) oder (27a) zugleich mit Rücksicht auf die Aenderung des Polabstandes, folgende:

Breite φ	Jahr 1880	Jahr 1890	Jahr 1900
40°	$a =$ 1° 44'	$a =$ 1° 40'	$a =$ 1° 36'
50	2 4	1 59	1 54
60	2 40	2 33	2 27

Da der Stundenwinkel t' der Ausweichung nach (28) nahezu constant für weite Gebiete ist, nämlich etwa $5^h\ 54^m$ für Deutschland, und da auch die Rectascension des Polaris nahezu constant $= 1^h\ 17^m$ ist, so sind auch die Sternzeiten der beiden Ausweichungen nahezu constant, nämlich:

$$\text{links (westlich) } S = +\ 5^h\ 54^m + 1^h\ 17^m = 7^h\ 11^m$$
$$\text{rechts (östlich) } S = -\ 5^h\ 54^m + 1^h\ 17^m = 19^h\ 23^m$$

Wenn ferner T die Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag ist, so hat man nach (9) S. 22 die mittlere Ortszeit der Ausweichung (mit Vernachlässigung von $(\Delta\lambda)$):

$$\text{links } t' = 7^h\ 11^m - T - \Delta\,(7^h\ 11^m - T)$$
$$\text{rechts } t' = 19^h\ 23^m - T - \Delta\,(19^h\ 23^m - T)$$

wo mit $\Delta\,(\ldots)$ der Abzug für Verwandlung der Sternzeit in Sonnenzeit bezeichnet ist. Dieser Abzug beträgt nach S. [4] höchstens 4 Minuten.

Für unsere Breiten hat man hiernach in den nächsten Jahren auf etwa $1-2^m$ genau folgende Ausweichungszeiten:

Jahreszeit	Grösste Ausweichung, westlich, links	Grösste Ausweichung, östlich, rechts.
1. Januar	$12^h\ 26^m$ Nacht	$0^h\ 33^m$ Mittag
1. Februar	10 23	22 32
1. März	8 33	20 41
1. April	6 31 Abend	18 42 Morgen
1. Mai	4 33	16 37
1. Juni	2 31	14 37
1. Juli	$0^h\ 33^m$ Mittag	$12^h\ 40^m$ Nacht
1. August	22 28	10 38
1. September	20 27	8 37
1. October	18 29 Morgen	6 39 Abend
1. November	16 27	4 37
1. December	14 29	2 39
1. Januar	12 24 Nacht	0 15 Mittag

Die Ausweichungszeiten genau abzuwarten, und nur zu diesen Zeiten zu beobachten, um die Reductionsberechnung auf die Formeln (27) oder (27a) beschränken zu können, wäre unpraktisch.

Trotzdem besteht ein Interesse, die Ausweichungszeiten zu kennen, um wenigstens nahezu zu solchen Zeiten zu beobachten, damit bei der Reductionsberechnung nach der Formel (6) S. 122 ein Fehler in der Zeit nicht viel Einfluss auf das Azimut erlangen kann.

§ 24. Breitenbestimmung durch den Polarstern.

Aehnlich wie das Azimut durch Beobachtung des Polarsterns in horizontalem Sinn gefunden wurde, (§ 23.) kann auch die Breite, oder Polhöhe, durch Messung eines Höhenwinkels auf den Polarstern bestimmt werden. Man hat dann nur diese Höhe des Sterns auf die Höhe des Pols zu reduciren, und die Refraction anzubringen, um die wahre Polhöhe als Resultat zu erhalten.

Zur strengen Berechnung hat man nach Fig. 1. § 23. S. 121 zunächst ebenso wie beim Azimut:

$$tang\, u = tang\, p \; cos\, t \tag{1}$$

dann $cos\,(90^0 - h) = cos\,(90^0 - (\varphi + u))\; cos\, v = sin\,(\varphi + u)\; cos\, v$

und
$$cos\, p = cos\, u\; cos\, v$$

woraus zusammen:

$$sin\,(\varphi + u) = \frac{sin\, h}{cos\, p}\; cos\, u \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe.

Um eine Reihenentwicklung bis zur zweiten Potenz zu erhalten, bildet man aus (2):

$$sin\,(\varphi + u) = \frac{sin\, h}{1 - \frac{p^2}{2}}\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) = sin\, h\left(1 + \frac{p^2}{2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)$$

$$= sin\, h\left(1 + \frac{p^2 - u^2}{2}\right)$$

$$sin\,(\varphi + u) - sin\, h = sin\, h\left(\frac{p^2 - u^2}{2}\right)$$

Es ist in erster Näherung nach (1):

$$u = p\; cos\, t, \tag{3}$$

also
$$sin\,(\varphi + u) - sin\, h = sin\, h\; \frac{p^2}{2}\;(1 - cos^2\, t) \tag{4}$$

links kann man, weil $\varphi + u$ und h nahezu gleich sind, ohne weiteren Genauigkeitsverlust setzen:

$$sin\,(\varphi + u) - sin\, h = (\varphi + u - h)\; cos\, h$$

also nach (4):

$$\varphi + u - h = \frac{p^2}{2}\; tang\, h\; sin^2\, t + p^4 \,\ldots. \tag{5}$$

Wenn man u nach (3) einsetzt, so hat man jetzt auf p^2 einschliesslich genau:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2\varrho} \operatorname{tang} h \sin^2 t \tag{6}$$

indem zugleich im quadratischen Glied der Nenner ϱ zugesetzt wurde.

Wenn man bis zur dritten Potenz entwickeln will, so hat man für u, wie schon beim Azimut ((9) S. 123) gefunden wurde:

$$u = p \cos t + \frac{p^3}{3} \cos t \sin^2 t + p^4 \ldots \tag{7}$$

Die Gleichung (5) ist auch auf p^3 einschliesslich genau, es soll aber jetzt in derselben h durch φ ersetzt werden, d. h. nach (6)

$$h = \varphi + p \cos t + \ldots$$

$$\operatorname{tang} h = \operatorname{tang} \varphi + \frac{p \cos t}{\cos^2 \varphi}$$

Setzt man dieses in (5), so hat man

$$\varphi + u - h = \frac{p^2}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin^2 t + \frac{p^3}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sin^2 t \cos t$$

und wenn man hier noch u aus (7) einsetzt, und nach Potenzen von p ordnet, so hat man:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2} \sin^2 t \operatorname{tang} \varphi + \frac{p^3}{6} \sin^2 t \cos t \left(\frac{3}{\cos^2 \varphi} - 2 \right)$$

Die letzte Klammer kann man noch goniometrisch umformen, und zugleich hat man die verschiedenen ϱ zuzusetzen, woraus das Resultat entsteht:

$$\varphi = h - p \cos t + \frac{p^2}{2\varrho} \sin^2 t \operatorname{tang} \varphi + \frac{p^3}{6\varrho^2} \sin^2 t \cos t (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \tag{8}$$

$$p = 1^0\ 18' = 78' = 4680'' \text{ gibt } \log \frac{p^3}{6\varrho^2} = 9.60374$$

$$\varphi = 52^0\ 23' \text{ gibt } \log (1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) = 0.78194.$$

Das letzte Glied der Reihe (8) gibt für $\varphi = 52^0\ 23'$ (Hannover) und $p = 1^0\ 18'$ folgende Werthe:

$t =$	0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h
letztes Glied von (8):	0,00″	0,16″	0,53″	0,86″	0,91″	0,59″	0,00″

Bei Berechnung von Messungen für nautische und ähnliche Zwecke wird dieses Glied vernachlässigt.

In den höheren Gliedern ist bei Anwendung der Reihe (8) für φ, welches selbst erst bestimmt werden soll, eine erste Näherung zu setzen. Man könnte statt φ auch die Höhe h in diesen Gliedern einführen, wie

in der That bei der ersten Formel (6) geschehen ist, indessen ist es bequemer, das unbekannte φ in der Rechnung zu haben als das bekannte h, weil letzteres in einer Beobachtungsreihe stets wechselt.

Für das zweite Glied in (8) hat man in den nächsten 5 Jahren:

Jahr	$\log \frac{p^2}{2\varrho}$	
	in Minuten	in Secunden
1885	9.9498	1.7280
1886	9.9463	1.7245
1887	9.9428	1.7209
1888	9.9392	1.7174
1889	9.9357	1.7138
1890	9.9321	1.7102

Als Beispiel nehmen wir die Polaris-Breitenmessung in der Oase Farafrah vom 30. December 1873 Abends in der Dämmerung mit dem Theodolit Fig. 1. S. 38:

	Chronometer	Fernrohrlage *I*	Fernrohrlage *II*
	$4^h\ 31^m\ 8^s$	Non. links $118^0\ 26'\ 40''$ Non. rechts $298\ \ 21\ \ 20$	
	$4^h\ 34^m\ 4^s$		Non. links $241^0\ 40'\ 0''$ Non. rechts $61\ \ 37\ \ 20$
Mittel	$4^h\ 32^m\ 36^s$	$I = 298^0\ 24'\ 0''$	$II = 241^0\ 38'\ 40''$

$$I - II = 56^0\ 45'\ 20''$$
$$\frac{I - II}{2} = 28^0\ 22'\ 40''$$

Indem die Fernrohrlagen *I* und *II* so verbunden werden, erhält man die Höhe $28^0\ 22'\ 40''$ sofort vom Indexfehler des Höhenkreises befreit.

Das Mittel der Chronometerablesungen $4^h\ 32^m\ 36^s$ wird auf mittlere Ortszeit reducirt durch correspondirende Sonnenhöhen, welche die Standcorrection $+\ 0^h\ 56^m\ 33^s$ ergaben, d. h. die mittlere Ortszeit der Polarismessung ist $= 4^h\ 32^m\ 36^s + 0^h\ 56^m\ 33^s = 5^h\ 29^m\ 9^s$. Solcher Messungen wurden in der Dämmerung 3 vollständige erhalten, wie im Folgenden angegeben ist.

Mittlere Ortszeit	$5^h\ 29^m\ 9^s$	$5^h\ 34^m\ 18^s$	$5^h\ 38^m\ 41^s$	(9)
Scheinbare Höhen Polaris	$28^0\ 22'\ 40''$	$28^0\ 23'\ 12''$	$28^0\ 23'\ 57''$	(10)

Lufttemperatur $= 11^0$ C., Barometer $= 764$ mm, folglich nach S. [7]—[11]:

Mittlere Refraction S. [7]	$1'\ 47''$	$1'\ 47''$	$1'\ 47''$
Correction für 11^0 S. [9]	$-\ 1$	$-\ 1$	$-\ 1$
Correction für 764 mm S. [11]	$+\ 2$	$+\ 2$	$+\ 2$
Wahre Refraction	$1'\ 48''$	$1'\ 48''$	$1'\ 48''$

Wahre Höhen $h =$	$28^0\ 20'\ 52''$	$28^0\ 11'\ 24''$	$28^0\ 22'\ 9''$	(11)

Der Nautical Almanac für 1873 gibt auf S. 223 für 30. December die Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag = $18^h\ 35^m\ 59^s$.

Die Länge von Farafrah ist $\lambda = 1^h\ 52^m$ östlich von Greenwich, also nach der Tafel S. [4] I, $(\varDelta\lambda) = -\ 0^h\ 18^s$, also (nach S. 22.) die Sternzeit im mittleren Farafrah-Mittag = $18^h\ 35^m\ 59^s - 0^m\ 18^s = 18^h\ 35^m\ 41^s$. Der Nautical Almanac für 1883 gibt ferner auf S. 336, 30. December, für den Polarstern:

Rectascension $\alpha = 1^h\ 12^m\ 27^s$ und Declination $\delta = 88^0\ 38'\cdot 33''$, d. h.

$$\alpha = 1^h\ 12^m\ 27^s \qquad p = 90^0 - \delta = 1^0\ 21'\ 27'' = 4887'' \tag{12}$$

Nun rechnen wir mit (9) weiter:

Mittlere Ortszeit $t' =$	$5^h\ 29^m\ 9^s$	$5^h\ 34^m\ 18^s$	$5^h\ 38^m\ 41^s$
Zuschlag für Sternzeit S. [4], I:	0 54	0 55	0 56
Sternzeit im mittleren Far. Mittag (s. o.)	18 35 41	18 35 41	18 35 41
Ortssternzeit	$24^h\ 5^m\ 44^s$	$24^h\ 10^m\ 54^s$	$24^h\ 15^m\ 18^s$
Rectascension nach (12) . . .	1 12 27	1 12 27	1 12 27
Stundenwinkel t	$22^h\ 53^m\ 17^s$	$22^h\ 58^m\ 27^s$	$23^h\ 2^m\ 51^s$
Nach S. [3] in Bogen $t =$ . .	$343^0\ 19'\ 15''$	$344^0\ 36'\ 45''$	$345^0\ 42'\ 45''$
Nach (12) $p = 4887''$ $\log p$.	3.68904	3.68904	3.68904
$\log\cos t$	9.98133	9.98415	9.98636
$\log p \cos t$	3.67037	3.67319	3.67540
$p \cos t =$	$4681'' = 1^0\ 18'\ 1''$	$4712'' = 1^0\ 18'\ 32''$	$4736'' = 1^0\ 18'\ 56''$

Dieses zu (11) genommen gibt:

$$h - p\cos t = \varphi_1 = \ldots\ 27^0\ 2'\ 51'' \qquad 27^0\ 2'\ 52'' \qquad 27^0\ 3'\ 13'' \tag{13}$$

Damit haben wir die zwei ersten Glieder der Formel (6) oder (8) berechnet, und wir können den Mittelwerth $\varphi_1 = 27^0\ 3'$ in dem quadratischen Glied von (8) für φ benutzen. Indessen, da wir das letzte Glied von (8) überhaupt nicht mehr benutzen wollen, könnten wir auch das dritte Glied von (6) nehmen, welches sich von dem quadratischen Glied von (8) nur durch *tang* h statt *tang* φ unterscheidet.

Wir schreiben zur vorübergehenden Abkürzung das quadratische Glied von (8) in die Form $A \sin^2 t$ und berechnen $\log A$:

Nach (12) ist $p = 4887''$ $\quad \log p = 3.6890$

$\log p^2$	7.3780
Erg. $\log 2$	9.6990
Erg. $\log \varrho$	4.6856
$\log tang\ \varphi$	9.7081
$\log A$	1.4707

Damit folgt weiter:

$t =$	$343^0\ 19'$	$344^0\ 37'$	$345^0\ 43'$
$\log \sin t$	9.4580_n	9.4237_n	9.3922_n
$\log \sin^2 t$	8.9160	8.8474	8.7844
$\log A$	1.4707	1.4707	0.4707
$\log III$	0.3867	0.3181	0.2551
$III =$	2,4''	2,1''	1,8''

Diese Correctionen zu (13) hinzugefügt, geben die drei Resultate:

$$\varphi = 27^0\ 2'\ 53'' \qquad 27^0\ 2'\ 54'' \qquad 27^0\ 3'\ 15''$$

$$\text{Mittel } \varphi = 27^0\ 3'\ 1'' \pm 7'' \tag{14}$$

Der beigesetzte mittlere Fehler $\pm$ 7″ ist aus den Abweichungen der drei Einzelwerthe von ihrem Mittel berechnet, und gilt nur vorbehältlich constanter Fehlerquellen, und solche muss man allerdings annehmen, wenn man das Resultat (14) mit dem früheren (14) oder (14a) § 19. S. 103, nämlich $\varphi = 27^0\ 3'\ 50'' \pm 6''$ vergleicht.

Zwölf Breiten der libyschen Expedition gaben ähnliche Verhältnisse, nämlich (Phys. Geogr. und Met. der lib. Wüste S. 13):

Punkt	Breite aus Sonnenhöhen *I*	Breite aus Polarishöhen *II*	Differenz $I - II = d$	Abweichung $d_0 - d$	$(d_0 - d)^2$
1. Hamrah	27° 11′ 20″ ± 4″	27° 10′ 41″ ± 23″	+ 39″	+ 11″	121
2. Marak	27 23 20 ± 7	27 22 31 ± 13	+ 49	+ 1	1
3. Farafrah	27 3 50 ± 6	27 3 1 ± 7	+ 49	+ 1	1
4. Dachel	25 42 14 ± 6	25 41 43 ± 3	+ 31	+ 19	361
5. Einsiedel I	25 37 15 ± 3	25 36 9 ± 4	+ 66	— 16	256
6. Einsiedel II	25 25 36 ± 7	25 24 47 ± 23	+ 49	+ 1	1
7. Regenfeld	25° 11′ 26″ ± 7″	25° 10′ 48″ ± 5″	+ 38″	+ 12	144
8. Sandheim	26 52 57 ± 9	26 52 5 ± 7	+ 52	— 2	4
9. Siuah	29 12 27 ± 6	29 11 32 ± 9	+ 55	— 5	25
10. Beharieh	28 21 27 ± 8	28 20 56 ± 27	+ 31	+ 19	361
11. Chargeh	25 26 53 ± 5	25 25 59 ± 11	+ 54	— 4	16
12. Esneh	25 18 55 ± 5	25 17 31 ± 6	+ 84	— 34	1156
		Mittel d_0 =	+ 50″		2447 (15)

Es ist dieses ein sehr starkes Beispiel des Vorkommens constanter Fehler, deren Hauptursache auch beim Anblick des Instrumentes S. 38 erklärlich ist. Die Libelle, welche unmittelbar vor jeder Einstellung des Fernrohrs auf die Sonne oder auf den Stern mit einer Stellschraube zum Einspielen gebracht wurde (weil auf allgemeine genügende Horizontalstellung unter jenen Umständen nicht gerechnet werden konnte), befindet sich nämlich u n t e r der Bussole, zwischen den Fernrohrträgern, ungünstig angebracht, denn sie musste von vorne sehr schief beobachtet werden. Dadurch entstanden starke Parallaxen bei der Beurtheilung der Stellung der im I n n e r n der Röhre befindlichen Blase gegen die auf der äusseren Glasröhrenwand angebrachten Theilstriche. Die Blase schien einzuspielen, während sie erheblich jenseits der Normalstellung war, d. h. alle Höhenwinkel wurden zu klein erhalten, und zwar nach (15) um den erheblichen Betrag von $\frac{1}{2}\, d_0 = 25''$, weil dieser Fehler bei Sonnenmittagsbreiten positiv, bei Polarisbreiten negativ wirkt.

Bei (15) sind noch die Abweichungen $d_0 - d$ gebildet, deren Quadratsumme = 2447 ist, woraus der mittlere unregelmässige Fehler von d wird

$$(d) = \sqrt{\frac{2447}{11}} = \pm 15'' \qquad \frac{(d)}{2} = \pm 7{,}5''$$

und als mittlerer Fehler eines arithmetischen Mittels aus einer Sonnenbreite und der zugehörigen Polarisbreite braucht jetzt nur noch $\pm$ 8″ angenommen zu werden, was für jene Verhältnisse vollauf hinreichend war.

Nach dieser Erfahrung müsste die Libelle L' Fig. 1. S. 38 für künftige Messungen anders angeordnet werden, indessen können wohl auch noch andere Ursachen mitgewirkt haben, z. B. der starke Sonnenschein über Mittag.

Auch bei feineren Breitenmessungen macht man die Erfahrung constanter Fehler, die sich aber bei Messungen ersten Rangs nur auf Bruchtheile der Secunde zu belaufen pflegen, und gewöhnlich der „Biegung des Fernrohrs" zugeschrieben werden.

Zur Vergleichung mit den Resultaten (28) § 19. S. 108, Breite von Hannover aus Sonnenhöhen, haben wir mit dem alten Meyerstein'schen Instrument Fig. 4. S. 41 auch 3 Polarisbreiten gemessen, nämlich:

4. Juni 1883	$\varphi = 52^0\ 22'\ 57''$	Hannover, Technische Hochschule E.
5. „ „	52 22 44	
16. „ „	52 22 47	
Mittel	$\varphi = 52^0\ 22'\ 49'' \pm 4''$	

Mit Rücksicht auf die mancherlei Mängel des Instruments Fig. 4. S. 41 stimmt dieses hinreichend mit (28) S. 108 $\varphi = 52^0\ 22'\ 55'' \pm 5''$ und wir nehmen daher bis auf Weiteres:

Hannover, Technische Hochschule Punkt E: $\varphi = 52^0\ 22'\ 52'' \pm 3''$ (16)

Die geodätische Uebertragung von Göttingen gibt für diesen Punkt die Breite $52^0\ 23'\ 1''$.

(Eine genauere Messung mit dem neuen Instrument von Bamberg S. 44 liegt noch nicht vor.)

Wenn man die Zeiten für Polarisbreitenmessung auswählen kann, so wird man natürlich die Zeit der oberen oder unteren Culmination wählen, damit der Zeitfehler möglichst wenig ausmacht. Man findet die Culminationszeiten durch die Betrachtungen von S. 119 und S. 131.

Hülfstafeln für Polarisbreiten.

Man hat der Formel (6) entsprechend zuweilen Hülfstafeln zur Berechnung der Breiten aus gemessenen Polarsternhöhen construirt, z. B. gibt der Nautical Almanac für 1884 auf S. 477 — 479 (ähnlich in den folgenden Jahrgängen) 3 Tafeln, von denen die erste das Hauptglied

— $p \cos t$ mit dem Mittelwerth $p_0 = 1^0\ 18'\ 0''$ und mit der Rectascension $\alpha_0 = 1^h\ 17^m\ 0^s$ gibt, die zweite Tafel gibt das Glied $\frac{p^2}{2\varrho}\ tang\ h\ sin^2\ t$ und eine dritte Tafel ist nöthig, um der Jahreszeit entsprechend die Abweichungen der jeweiligen Declination und Rectascension des Sterns von den angenommenen Normalwerthen $1^0\ 18'$ und $1^h\ 17^m$ zu berücksichtigen. Zu beachten ist, dass im Ganzen noch 1′ abzuziehen ist; es ist nämlich der dritte Tafelwerth um 1′ zu gross angesetzt, damit keine Zeichenwechsel nöthig werden. Als Zeitargument ist nicht der Stundenwinkel t, sondern die Sternzeit $S = t + \alpha_0$ angenommen.

Bezeichnet man den jeweiligen Polabstand des Sterns mit $p_0 + dp$ und die jeweilige Rectascension mit $\alpha_0 + d\alpha$, also den jeweiligen Stundenwinkel mit $(S - \alpha_0) - d\alpha$, so kann man die 3 Hülfstafeln des Nautical Almanac durch folgende Gleichungen deuten:

$$\varphi = h - (p_0 + dp)\cos((S - \alpha_0) - d\alpha) + \frac{p^2}{2\varrho}\ tang\ h\ sin^2\ t$$

$$\text{Zweites Glied} = (p_0 + dp)(\cos(S - \alpha_0) + d\alpha \sin(S - \alpha_0))$$
$$= p_0 \cos(S - \alpha_0) + p_0\, d\alpha \sin(S - \alpha_0) + dp \cos(S - \alpha_0)$$

also im Ganzen:

$$\varphi = h - 1' - \underbrace{p_0 \cos(S - \alpha_0)}_{I} + \underbrace{\frac{p^2}{2\varrho}\ tang\ h\ sin^2\ t}_{II}$$
$$\underbrace{+ p_0\, d\alpha \sin(S - \alpha_0) + dp \cos(S - \alpha_0) + 1'}_{III}$$

d. h. $\varphi = h - 1' + I + II + III.$

Diese Tafeln sind für praktische Seefahrer bestimmt. Wenn man aber auch nur auf 1′ genau rechnen will, so verlangt Tafel I mit Intervall von 10^m und Differenzen bis zu 3′ bereits Interpolation, und damit ist die ganze Methode unbequemer als die Ausrechnung der zwei letzten Glieder von (6) mit 4—5stelligen Logarithmen.

Auf der libyschen Expedition maass ich abendlich Polarishöhen, und berechnete das Hauptglied $p \cos t$, wo $t = S - \alpha$ ist, logarithmisch, wozu eine kleine Ephemeride für $\log p$ und α zum Voraus angelegt war; für das Glied II diente ein Hülfstäfelchen von ähnlicher Form wie II des Nautical Almanac, jedoch für den besonderen Fall mit kleineren Intervallen. Diese ganze Rechnung verlangt nur wenige Minuten Zeit.

Wenn man die Tafeln des Nautical Almanac auch nicht unmittelbar benutzen will, so ist immerhin die Tafel II erwünscht, wenn es auf 1″ — 2″ nicht ankommt, und die Haupttafel I kann man mit dazu brauchen, um ein Instrument bei Tag oder in der Dämmerung (unter Umständen auch bei Nacht) auf den Polarstern einzustellen, wie bereits auf S. 119 behandelt worden ist.

§ 25. Höhere Glieder der Reihen für Azimut und Höhe des Polarsterns.

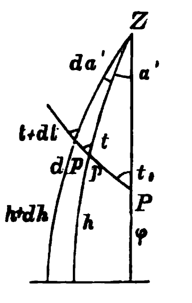
Die Reihenentwicklungen von § 23. und § 24., welche bis zur dritten Potenz des Polabstands geführt sind, reichen unbedingt aus, so lange man nur etwa auf 0,5″ genau rechnen will; und wenn, wie in unseren Messungs- und Berechnungsbeispielen, die tägliche Aberration vernachlässigt wird, welche bis zu 0,3″ beträgt, so ist kein sachlicher Grund vorhanden, genauer zu rechnen.

Indessen, wenn man auch nur bis p^2 und p^3 gehen will, ist unter Umständen statt des schrittweisen Vorgehens, zuerst bis p^2 und dann bis p^3, welches in § 23. und § 24. als elementarste und anschaulichste Methode gewählt wurde, ein allgemeineres Verfahren, welches leicht beliebig weit fortgesetzt werden kann, erwünscht.

Man kann zu diesem Zweck die Gleichung (1) § 23. S. 121 und die Formel für $\sin h$ nach (1) § 24. S. 132 nach der Methode der unbestimmten Coefficienten entwickeln, was, wie wir uns überzeugt haben, ziemlich rasch zum Ziele führt; besser noch ist eine Entwicklung nach dem Maclaurin'schen Satz, welche auch bei der entsprechenden geodätischen Aufgabe, der sphärischen Breiten- und Längenübertragung anzuwenden ist.

Wir betrachten in Fig. 1. den Pol P und das Zenit Z, dann einen mit dem Stundenwinkel t_0 von P ausgehenden Bogen von der Länge p, der in seiner Richtung die Zunahme dp erfährt. Dieser Zunahme dp entspricht eine Azimutänderung da' und eine Höhenänderung dh, ferner eine Aenderung dt des Winkels t zwischen dem Bogen p und dem Höhenkreis h. (t entspricht dem Azimut bei der sphärisch-geodätischen Aufgabe.) Aus der Figur entnimmt man nach Anleitung von S. 50:

Fig. 1. Polaris-Differentiale.



$$dp \cos t = dh \tag{1}$$

$$dp \sin t = da' \sin (90^0 - h) = da' \cos h \tag{2}$$

$$dt = da' \cos (90^0 - h) = da' \sin h \tag{3}$$

oder in Form von Differentialquotienten:

$$\frac{dh}{dp} = \cos t \tag{4}$$

$$\frac{da'}{dp} = \frac{\sin t}{\cos h} \tag{5}$$

$$\frac{dt}{dp} = \sin t \tang h \tag{6}$$

Nun gibt der Maclaurin'sche Satz:

$$h - \varphi = \left.\frac{dh}{dp}\right] p + \left.\frac{d^2 h}{dp^2}\right] \frac{p^2}{2} + \left.\frac{d^3 h}{dp^3}\right] \frac{p^3}{6} + \left.\frac{d^4 h}{dp^4}\right] \frac{p^4}{24} + \ldots \tag{7}$$

$$a' = \left.\frac{da'}{dp}\right] p + \left.\frac{d^2 a'}{dp}\right] \frac{p^2}{2} + \left.\frac{d^3 a'}{dp^3}\right] \frac{p^3}{6} + \left.\frac{d^4 a'}{dp^4}\right] \frac{p^4}{24} + \ldots \tag{8}$$

wo das Zeichen] andeuten soll, dass nach der Ausführung der Differentiirungen $h = \varphi$ und $t = t_0$ gesetzt werde.

Aus (4) und (6) bildet man:

$$\frac{d^2 h}{dp^2} = -\sin t \frac{dt}{dp} = -\sin^2 t \operatorname{tang} h \tag{9}$$

$$\frac{d^3 h}{dp^3} = -2 \sin t \cos t \frac{dt}{dp} \operatorname{tang} h - \sin^2 t \frac{1}{\cos^2 h} \frac{dh}{dp}$$

Dieses gibt mit (4) und (6) zusammengefasst:

$$\frac{d^3 h}{dp^3} = -\sin^2 t \cos t \,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \tag{10}$$

In gleicher Weise wird weiter differentiirt und erhalten:

$$\frac{d^4 h}{dp^4} = \operatorname{tang} h \left\{ \sin^4 t\,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) - 4 \sin^2 t \cos^2 t\,(2 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \right\} \tag{11}$$

Ferner nach (5) mit (4) und (6):

$$\frac{d^2 a'}{dp^2} = \frac{\cos t}{\cos h} \frac{dt}{dp} + \frac{\sin h}{\cos^2 h} \frac{dh}{dp} \sin t$$

$$= 2 \sin t \cos t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h} \tag{12}$$

Auf gleichem Wege erhält man auch:

$$\frac{d^3 a'}{dp^3} = 2 \sin t \cos^2 t \frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 h}{\cos h} - 2 \sin^3 t \frac{\operatorname{tang}^2 h}{\cos h} \tag{13}$$

$$\frac{d^4 a'}{dp^4} = 8 \sin t \cos^3 t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h}(2 + 3 \operatorname{tang}^2 h) - 8 \sin^3 t \cos t \frac{\operatorname{tang} h}{\cos h}(1 + 3 \operatorname{tang}^2 h) \tag{14}$$

Indem wir nun die Reihen (7) und (8) zusammensetzen, nehmen wir wieder, wie früher, zur Abkürzung:

$$p \cos t] = p \cos t_0 = u \qquad p \sin t] = p \sin t_0 = v \tag{15}$$

ferner

$$\operatorname{tang} h] = \operatorname{tang} \varphi \tag{16}$$

Auch schreiben wir noch die Glieder fünfter Ordnung, deren Differentialquotienten oben nicht aufgeführt sind, mit hinzu, weil diese Ausdehnung auf dem angegebenen Wege keine Schwierigkeiten hat.

Die Resultate sind, mit Zufügung der nöthigen ϱ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = h - u &+ \frac{v^2}{2\varrho} \operatorname{tang} \varphi + \frac{u v^2}{6 \varrho^2}(1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \\ &+ \frac{u^2 v^2}{6 \varrho^3} \operatorname{tang} \varphi\,(2 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) - \frac{v^4}{24 \varrho^3}(1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \\ &+ \frac{u^3 v^2}{30 \varrho^4}(2 + 15 \operatorname{tang}^2 \varphi + 15 \operatorname{tang}^4 \varphi) - \frac{u v^4}{120 \varrho^4}(1 + 30 \operatorname{tang}^2 \varphi + 45 \operatorname{tang}^4 \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 360^0 - a' \\ a \cos\varphi = - v - \frac{u\,v}{\varrho}\,tang\,\varphi - \frac{u^2\,v}{3\,\varrho^2}\,(1 + 3\,tang^2\,\varphi) + \frac{v^3}{3\varrho^2}\,tang^2\,\varphi \\ \quad - \frac{u^3\,v}{3\,\varrho^3}\,tang\,\varphi\,(2 + 3\,tang^2\,\varphi) + \frac{u\,v^3}{3\,\varrho^3}\,tang\,\varphi\,(1 + 3\,tang^2\,\varphi) \\ \quad - \frac{u^4\,v}{15\varrho^4}\,(2 + 15 tang^2\,\varphi + 15\,tang^4\,\varphi) - \frac{v^5}{15\,\varrho^4}\,tang^2\,\varphi\,(1 + 3\,tang^2\,\varphi) \\ \quad + \frac{u^2\,v^3}{15\,\varrho^4}\,(1 + 20\,tang^2\,\varphi + 30\,tang^4\,\varphi) \end{array}\right\} (18)$$

Wenn man auf 0,01″ genau rechnen will, so genügt (in unseren Breiten) bei der Breite die vierte Ordnung, beim Azimut die fünfte Ordnung.

Man kann unsere Formeln (17) und (18) durch die Vergleichung mit Helmert, Höhere Geodäsie I S. 298, controlliren, indem man dort $\delta = 0$ setzt, $u = - u$ nimmt, und beim Azimut a auch noch im Ganzen das Zeichen ändert.

§ 26. Gnomon und Dipleidoskop.

Die einfachste und für alle bürgerlichen Zwecke hinreichende tägliche Mittagszeitbestimmung erhält man durch eine unter dem Namen „Gnomon" schon im Alterthum und im Mittelalter bekannte Vorrichtung, welche in den Instrumentensälen in Karlsruhe und in Hannover in folgender einfacher Form von uns angeordnet wurde:

Auf dem Fussboden ist eine 1 cm breite Meridianlinie gezogen (2 mm tief in den Boden mit Nuthobel eingehobelt) und an dem Fenster, welches gegen Süden in diesem Meridian liegt, sind in der Höhe von 4 Meter mehrere aus schwarzem Papier ausgeschnittene Kreise von 10—20 cm Durchmesser in der Anordnung von Fig. 1. auf die Glasscheibe aufgeklebt. Diese Kreise mit ihren Zwischenräumen geben eine symmetrische Schattenfigur, deren Bewegung, über die Meridianlinie hinweg, auf dem Fussboden beobachtet wird. Wenn die Schattenfigur symmetrisch zum Meridian liegt, ist wahrer Mittag.

Fig. 1.
Schattenwerfende Figur.



Allerdings ist die Schattenfigur wegen des Halbschattens sehr verschwommen, doch lässt sich eine Genauigkeit von einigen Zeitsecunden leicht erreichen, wie aus den nachher mitzutheilenden Vergleichungen mit dem Passage-Instrument hervorgehen wird.

Was die Ziehung der Meridianlinie auf dem Fussboden betrifft, so besteht das nächstliegende astronomische Mittel darin, dass man anderwärts, z. B. aus einzelnen Sonnenhöhen oder aus correspondirenden Sonnenhöhen (§ 13. und § 16.), die Zeit bestimmt, mit dieser Zeitbestimmung und mit der Zeitgleichung den Uhrstand berechnet, welcher der Culmi-

nation entspricht, und dann, mit der Uhr in der Hand, die Schattenfigur verfolgt. Im Moment der berechneten Culmination macht man einen Kreidestrich auf den Boden, und schlägt einen Nagel dazu. Hat man mehrere solcher Nägel allmälig in genügend gerader Linie erhalten, so wird man mit einer gespannten Schnur die Punkte gegenseitig ausgleichen, und die Linie definitiv ziehen (mit Nuthobel einhobeln).

Hat man geodätische Orientirung (mit Rücksicht auf Meridian-Convergenz), so ist die Einweisung des Meridians mit einem kleinen Theodolit noch viel einfacher; die astronomische Zeitbestimmung dient dann als Probe.

Zu verschiedenen Jahreszeiten ist die Schattenstelle auf dem Boden sehr verschieden. Für die Mittelbreite 50^0 hat man im Sommer die Sonnenhöhe $90^0 - 50^0 + 23^0 = 63^0$ und im Winter $90^0 - 50^0 - 23^0 = 17^0$, also bei 4 Meter Höhe der schattenwerfenden Figur über dem Boden ist der horizontale Abstand der Schattenfigur im Sommer $= 4^m \, cotg \, 63^0 = 2{,}0^m$ und im Winter $= 4^m \, cotg \, 17^0 = 13{,}1^m$, so dass im Sommer der Schatten nahe ans Fenster, im Winter, wenn der Saal nicht sehr lang ist, an die jenseitige Wand fällt.

Man könnte auch auf den Fussboden, ausser dem Meridian selbst, die Curve für die Zeitgleichung aufzeichnen, um sofort die Zeit des mittleren Mittags abzulesen. Die Curve wird lemniskaten-(∞)förmig, am Anfang und am Ende würde der Gebrauch für den angegebenen Zweck unsicher. Einige so erhaltene Mittagsbestimmungen wurden mit der genaueren Zeitbestimmung durch das Passage-Instrument verglichen, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Tag	Correction des Gnomons
22. Februar 1885	$+ 12^s$
25. „ „	$+ 9$
27. „ „	$+ 4$
8. März „	$+ 12$
10. „ „	$+ 8$
13. „ „	$+ 12$
Mittel	$+ 10^s$

Das Gnomon zeigt den wahren Mittag im Mittel um 10 Secunden zu früh.

Einige andere Vergleichungen dieser Art werden wir nachher zusammen mit den Dipleidoskop-Vergleichungen bringen.

Ein zweites Mittel für populäre Mittags-Zeitbestimmung ist das Dipleidoskop, dessen äusserer Anblick durch die folgenden zwei Zeichnungen gegeben ist, und zwar Fig. 2. ohne Fernrohr, Fig. 3. mit Fernrohr (Seite 143).

Das Dipleidoskop ist ein von dem englischen Mechaniker Dent erfundenes Instrument zur Bestimmung der Sonnen-Culmination. Nach der vom Erfinder hierüber veröffentlichten Schrift: „A description of the Dipleidoscope; or double reflecting meridian and altitude instrument etc.

by Edward J. Dent, F. R. A. S., Assoc. I. C. E. etc. published by the author, London 1860", 24 S. 8⁰, und nach dem in der Hannoveraner

Fig. 2. Dipleidoskop.

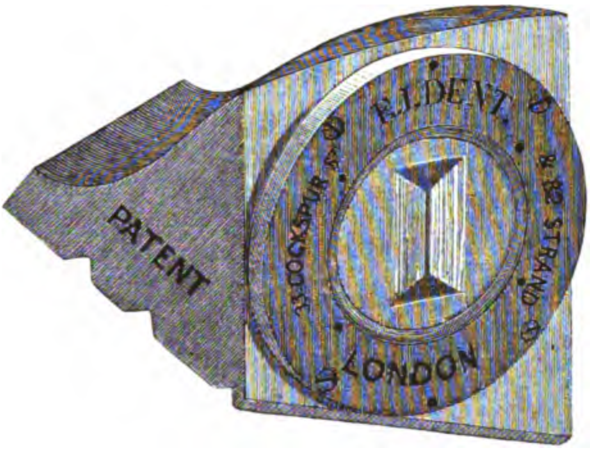
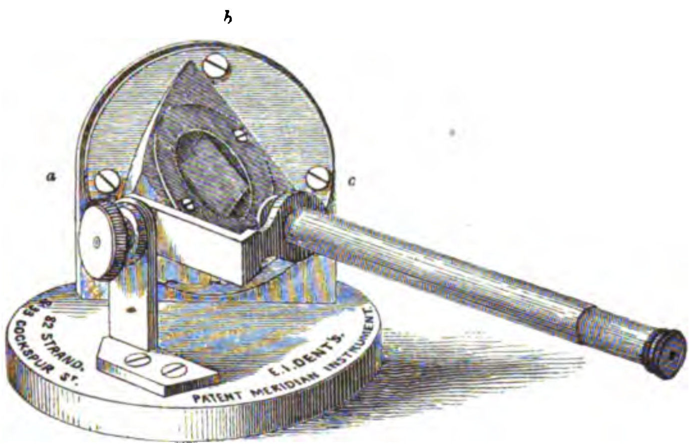


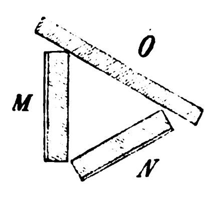
Fig. 3. Dipleidoskop mit Fernrohr.



geodätischen Sammlung befindlichen Exemplar eines Dipleidoskops erhalten wir folgende Darstellung:

Das Instrument besteht aus 3 planparallelen Glasplatten *M N O* Fig. 4., welche in Form eines gleichseitigen Prismas vereinigt sind. *M* und *N* sind aussen mit Staniol belegt, wirken also innen als ebene Spiegel. *O* ist eine hellblaue Glasplatte, welche an der Vorderfläche reflectirt, zugleich aber das Licht durchlässt. *M* wird beim Gebrauch in die Meridianebene gebracht.

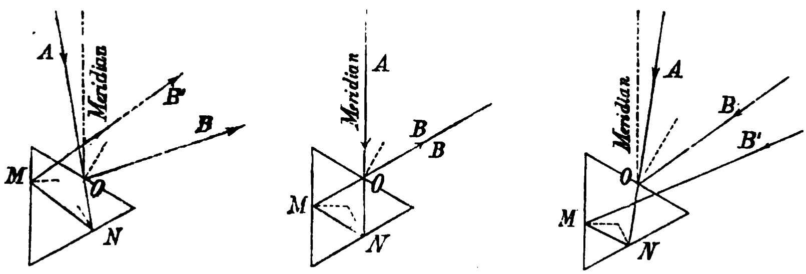
Fig. 4.
Querschnitt des Dipleidoskops
(1/2 natürl. Grösse.)



Die Anwendung des Instruments zur Mittagsbestimmung zeigen die drei Theile von Fig. 5., wo die Ebene *M* in den Meridian gebracht ist.

Fig. 5. Wirkungsweise des Dipleidoskops.

a. vor der Culmination. *b.* während der Culmination. *c.* nach der Culmination.



In Fig. 5*b*. ist der Sonnenstrahl *AO* ebenfalls im Meridian, auch sei der Einfachheit wegen zunächst angenommen, dass alle in Betracht kommenden Strahlen in der Querschnittsebene des Prismas liegen. Nun gibt in 5*b*. der Strahl *AO* auf der Vorderseite von *O* eine Reflexion *OB*; ausserdem geht der Strahl *AO* durch die Glasplatte *O* hindurch, wird auf *N* und *M* reflectirt, und tritt in *OB'* wieder aus, und zwar wegen der einfachen geometrischen Verhältnisse, zusammenfallend, oder wenigstens parallel mit *OB*, so dass ein in *B* befindliches Auge zwei Sonnenbilder in Deckung sieht. Indem somit Fig. 5*b*. den Moment der Culmination vorstellt, gibt Fig. 5*a*. ein Bild der Verhältnisse vor der Culmination und Fig. 5*c*. nach der Culmination. Die eingezeichneten Linien geben zu erkennen, dass ein in der Gegend von *B* und *B'* befindliches Auge vor und nach der Culmination zwei getrennte Sonnenbilder nebeneinander sieht, und zwar vor der Culmination (Fig. 5*a*.) das doppelt reflectirte Bild *B'* rechts von dem einfach reflectirten und nach der Culmination (Fig. 5*c*.) das doppelt reflectirte Bild *B'* links von dem einfach reflectirten Bild *B*.

Im Zusammenhang beobachtet man also folgende Erscheinung: Einige Minuten vor dem wahren Mittag sieht man zwei Sonnenbilder, welche sich einander langsam nähern, berühren, dann übereinander weglaufen, zum zweitenmal berühren und wieder auseinandergehen. Dem Moment der Culmination entspricht die völlige gegenseitige Bedeckung, welche aber weniger genau beobachtet werden kann, als die Berührung, weshalb das arithmetische Mittel der Zeitpunkte für erste und zweite Berührung als beste Bestimmung der Culmination zu betrachten ist.

Die bei der Theorie von Fig. 5. gemachte Voraussetzung, dass die Strahlen in der Querschnittsebene des Prismas liegen, ist nur etwa zur Zeit der Aequinoktien, im Allgemeinen aber nicht, erfüllt, dennoch bleiben die Verhältnisse im Wesentlichen dieselben, es treten jedoch die Strahlen *B* und *B'* im Winter höher und im Sommer tiefer aus als in den Normallagen im Frühling und Herbst. Hierauf ist bei der Aufstellung des In-

strumentes Rücksicht zu nehmen, wenn man z. B. das Instrumentchen auf einer Fensterbank befestigt, so muss man im Hochsommer den Kopf auf diese Bank selbst legen, um die unter kleinen Höhenwinkeln austretenden Strahlen mit dem Auge zu finden. Aus diesem Grunde empfiehlt sich eine nach rechts (Westen) unbeengte Aufstellung.

Bei der Beobachtung braucht man ein Blendglas (welches dem Instrument vom Mechaniker beigegeben ist). Statt mit freiem Auge kann man auch mit einem Fernrohr, z. B. Operngucker, beobachten, wodurch die Genauigkeit gesteigert wird. Ein solches Fernrohr kann in freier Hand gehalten oder auch in feste Verbindung mit dem Dipleidoskop gebracht werden, wie Fig. 3. (s. oben S. 143) nach der Dent'schen Broschüre andeutet.

Die Aufstellung des Dipleidoskops geschieht durch Vermittlung einer anderweitigen Zeitbestimmung. Man wird das Instrument vorläufig befestigen, und mit der Uhr in der Hand den vorausberechneten Moment des wahren Mittags, d. h. der Deckung der Bilder, oder mit Rücksicht auf die halbe Durchgangszeit den Moment der ersten oder zweiten Berührung abwarten, darnach das Instrument rasch einrichten, und endgültig festschrauben. Die Einstellung wird niemals so genau sein können, als die nachfolgende Controlle, mit welcher man dann den übrig gebliebenen Aufstellungsfehler noch in Rechnung bringen kann.

In folgender Tabelle geben wir einige Vergleichungen der Culminationsbestimmung an dem oben S. 141 Fig. 1. beschriebenen Gnomon, und an dem Dipleidoskop, mit den Angaben des Passage-Instrumentes. Die Uhr, an welcher abgelesen wurde, ist von etwa 8 zu 8 Tagen durch das Passage-Instrument controllirt und überträgt somit die wahre Culminationszeit auf die Zwischentage, an welchen das Gnomon und das Dipleidoskop abgelesen wurden, auf 1 Secunde genau. Die Vorzeichen folgender Tabelle sind im Sinne von Verbesserungen angesetzt, d. h. das Gnomon zeigt den wahren Mittag im Mittel um 6 Sekunden zu früh.

Tag	Gnomon	Dipleidoskop
14. Juni 1884	+ 8^s	− 12^s
28. „ „	+ 14	− 2
30. „ „	. .	+ 5
1. Juli „	. .	+ 11
3. „ „	+ 4	+ 7
4. „ „	+ 3	+ 10
5. „ „	+ 4	+ 14
8. „ „	+ 5	+ 15
9. „ „	. .	+ 21
Mittel	+ 6^s	

Der Verlauf der Dipleidoskop-Correctionen deutet auf veränderliche Fehlerursachen.

Dass das Gnomon hier eine um 4^s kleinere Correction hat, als bei der oben S. 142 mitgetheilten Vergleichung, hat in einer veränderten Benützung der Schattenfigur seinen Grund.

Die Vergleichung der gegenseitigen Vorzüge und Nachtheile des Gnomons und des Dipleidoskops fällt nach unserer Ansicht zu Gunsten des Gnomons aus. Die Herstellung einer Einrichtung wie die oben bei Fig. 1. S. 141 beschriebene, kostet so viel wie Nichts, das Dipleidoskop kostet 42 Mark. Die Genauigkeit der Beobachtung ist nahezu die gleiche; die Unveränderlichkeit der Vorrichtung selbst und ihrer Correctionselemente spricht zu Gunsten des Gnomons.

Ausser für den ersten astronomischen Unterricht und für den Liebhaber der Astronomie sind solche Hülfsmittel, die man auch noch in anderer Form herstellen kann (von denen aber eine Meridianlinie auf dem Boden mit einer Schattenmarke das einfachste ist), auch praktisch in mancher Beziehung bequem, z. B. zeigt unser beim Passage-Instrument angebrachtes Fussboden-Schattenbild immer auf einen Blick, wann es Zeit ist, zu einer genauen Sonnenbeobachtung an das Passage-Instrument zu treten.

§ 27. Sonnenuhren.

Die Construction der meisten Sonnenuhren beruht auf der Befestigung einer schattenwerfenden Geraden (Stab oder Kante) parallel der Erdachse, so dass für denselben Stundenwinkel der Schatten dieser Geraden immer in ein und dieselbe Ebene fällt, unabhängig von der Declination der Sonne, d. h. von der Jahreszeit.

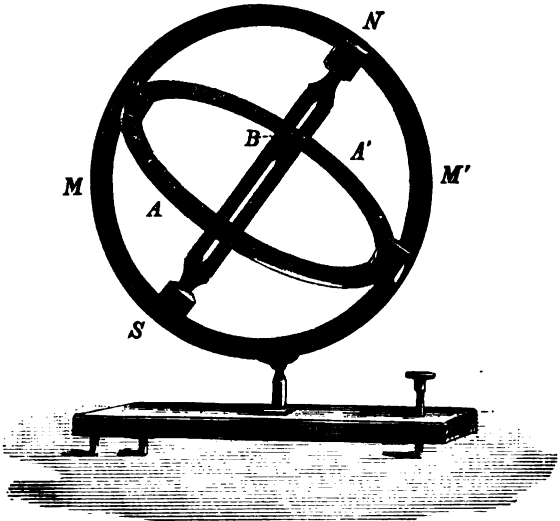
Die schattenauffangende Fläche kann dann beliebig gelegen und gestaltet sein, sie braucht nicht unbedingt eine Ebene zu sein. Hat man den schattenwerfenden Stab richtig nach der Erd- oder Himmelsachse orientirt, so kann man die Theilung des Zifferblattes rein empirisch machen, indem man nach anderweitiger Zeitbestimmung eine Uhr auf wahre Ortszeit stellt, und mit dieser Uhr in der Hand den Schatten verfolgend, etwa von 5 zu 5 Minuten einen Strich macht.

Die Aufstellung des Schattenstabs in der Meridianebene, und unter der Neigung φ gegen die Horizontalebene, ist eine Aufgabe, welche, etwa nach einer Magnetnadel bei bekannter magnetischer Declination und nach der aus einer Karte entnommenen geographischen Breite φ, wohl unmittelbar mechanisch ausgeführt werden kann; und in diesem Falle wird auch die erwähnte empirische Herstellung des Zifferblattes zu empfehlen sein. Wenn aber die Sonnenuhr möglichst genau werden soll, so ist eine mehr mathematisch-astronomische Behandlung am Platze.

Betrachten wir zuerst die theoretisch einfachsten Lagen der schattenauffangenden Ebene, so ist als erste zu nennen die Ebene rechtwinklig zur Erdachse, oder parallel zur Aequatorebene.

Die Schattenstrahlen werden hier für gleiche Zeiten gleiche Winkel bilden, man hat also lediglich den Umfang eines von der Mitte aus gezogenen Kreises in 24 gleiche Theile nebst passenden Unterabtheilungen zu theilen, um ein theoretisch richtiges Zifferblatt zu erhalten. Ist die Zifferblattebene materiell hergestellt (Blech, Kartenpapier etc.) und nicht durchsichtig, so muss sie oben und unten eine Theilung haben. Die obere Theilung wird im Sommerhalbjahr, die untere im Winterhalbjahr gebraucht. Beim Uebergang, zur Zeit der Aequinoctien, wird die Uhr undeutliche Angaben machen.

Fig. 1. Aequatorial-Sonnenuhr. (Durchmesser 20 cm.)



Eine andere Ausführung desselben Princips zeigt Fig. 1., welche nach einem älteren fein gearbeiteten Instrument unserer hannover'schen Sammlung hergestellt ist. (Inschrift: Edm. Culpeper Londini).

SN ist parallel der Himmelsachse, MM' stellt den Meridian und AA' den Aequator vor. Auf SN befindet sich, nach der Jahreszeit verstellbar, und um die Achse SN drehbar, ein Sonnenloch B, von welchem ein kleines Sonnenbildchen auf die Innenfläche des Aequatorringes AA' geworfen wird. Diese Innenfläche trägt die gleichförmige Stundentheilung, auf welcher die Tageszeit von 4 zu 4 Minuten an dem Sonnenbild-Kreischen abgelesen wird.

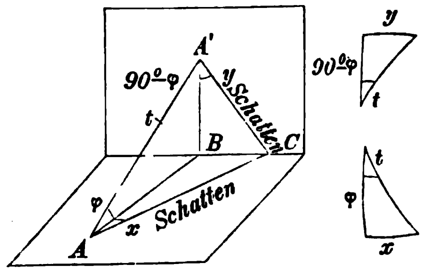
Nach diesem ersten und theoretisch einfachsten Princip betrachten wir eine horizontale und eine verticale von West nach Ost gerichtete Bildebene.

In Fig. 2. sind diese beiden Ebenen vereinigt. ABC ist die horizontale Bildebene und $A'BC$ die verticale Bildebene. AA' ist der

schattenwerfende Stab, dessen Verticalebene ABA' rechtwinklig zur Ebene $A'BC$ ist.

Zur Berechnung der Winkel x und y, welche die Schattenlinien AC und $A'C$ mit dem Meridian ABA' bilden, hat man in A ein rechtwinkliges Dreikant, dessen horizontale Kathete $= x$, dessen verticale Kathete $= \varphi$ und dessen an letzterer Kathete anliegender Winkel $= t$ (Stundenwinkel) ist. Aus diesem Dreikant, (oder dem zur Veranschaulichung gezeichneten entsprechenden sphärischen Dreieck) findet man:

Fig. 2.
Sonnenuhr mit Horizontalebene und mit Verticalebene im ersten Vertical.



$$tang\ t = \frac{tang\ x}{sin\ \varphi},\quad tang\ x = tang\ t\ sin\ \varphi \tag{1}$$

an der verticalen Bildebene hat man entsprechend

$$tang\ t = \frac{tang\ y}{sin\ (90^0 - \varphi)},\quad tang\ y = tang\ t\ cos\ \varphi \tag{2}$$

Mit $\varphi = 50^0$ sind hiernach folgende Hauptwerthe berechnet:

t	x	$tang\ x$	y	$tang\ y$
$0^h = 0^0$	$0^0\ 0'$	0,000	$0^0\ 0'$	0,000
1 = 15	11 36	0,205	9 46	0,172
2 = 30	23 52	0,442	20 22	0,371
3 = 45	37 27	0,766	32 44	0,643
4 = 60	53 0	1,327	48 4	1,113
5 = 75	70 43	2,859	67 22	2,399
6 = 90	90 0	∞	90 0	∞
7 = 105	109 17	− 2,859	112 38	− 2,399
8 = 120	127 0	− 1,327	131 56	− 1,113

Ein System der horizontalen Schattenstrahlen von Fig. 2. für die Breite $\varphi = 48^0\ 47'$ von Stuttgart, findet man auf dem „Astronomischen Netz zur Bestimmung der Zeit etc. von Professor Riess in Stuttgart". Es ist dieses ein Brettchen von 23 cm × 21 cm, welches ausser den Schattenstrahlen noch die (um A Fig. 2. gezogenen) Kreise für constante Höhenwinkel und die Hyperbeln für constante Sonnendeclinationen enthält. Obgleich eine solche Zeichnung zunächst nur für eine gewisse Breite φ_0 gilt, kann man dieselbe Sonnenuhr doch auch für verschiedene Breiten φ brauchen, indem man die Bildebene dann nicht horizontal stellt,

sondern ihr eine Neigung gegen den Horizont $= \varphi - \varphi_0$ in der Richtung AB Fig. 2. gibt.

Eine andere Ausführung des Princips der Horizontalebene von Fig. 2. zeigt Fig. 3., welche wir aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881 S. 165 als Abbildung des „Skiostats von August“ entlehnen. (Verfertiger Ferdinand Ernecke in Berlin.) Die schattenauffangende Ebene KL wird für eine Normalbreite φ_0, welche bei E eingestellt wird, horizontal gemacht (Dosenlibelle bei B) und der schattenwerfende Faden KM wird parallel der Himmelsachse gestellt. Dann haben wir die Verhältnisse wie in Fig. 2. Für andere Breiten kann man die Einstellung bei E ändern, und KL ist dann nicht mehr horizontal, wohl aber KM noch parallel der Himmelsachse (wie bei dem Legebrett von Riess).

Fig. 3. Horizontal-Sonnenuhr.



Als Beigabe dient der Tageszeiger HJ. Da die Scheibe HJ dem Himmelsäquator parallel ist, verschiebt sich ihr Schatten auf der Theilung FG entsprechend der Sonnendeclination, und man kann auf FG eine Monats- und Tagesscala anbringen, die indessen an den Enden bei F und G sehr eng und undeutlich wird. Am 20. März und 23. September wirft die Scheibe JH keinen Schatten, d. h. die Theilung FG wird in H getroffen.

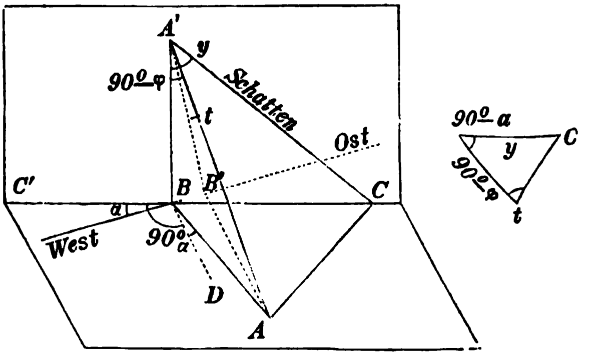
Zwar theoretisch weniger einfach, aber für die praktische Ausführung im Grossen viel mehr geeignet, ist die Aufzeichnung einer Schattenbild-Tafel auf einer verticalen Wand, welche nicht genau, aber ungefähr die Richtung West-Ost hat. Es ist dieses die bekannte Figur mit Schattenstab parallel der Himmelsachse, welche man allenthalben an Kirchenmauern Rathhäusern u. s. w. angebracht sieht.

Die Theorie gibt Fig. 4., in welcher ausser der verticalen Wandebene, auf welcher der Schatten entstehen soll, auch eine horizontale Ebene ABC angenommen ist, in welcher das Azimut a der Wand zur Anschauung kommt.

Es sei nämlich DB in der Horizontalebene die Normale zur Wand

$C' A' C$, in welcher $C' C$ eine Horizontale ist. AA' ist der Schattenstab und AB, BA' sind die Spuren der Meridianebene auf der Horizontal- und Verticalebene. Der Winkel $DBA = a$ ist also die Abweichung der Wandnormalen BD vom Meridian, d. h. das Azimut der Wand selbst, bezogen auf die West-Ost-Richtung. Man wird immer eine Wand aussuchen, bei welcher a möglichst klein ist.

Fig. 4. Sonnenuhr auf verticaler Wand mit dem Azimut a.



Die Richtung y eines Nachmittagsschattens $A' C$ gegen die Verticale $A' B$ erhält man aus einem Dreikant, dessen Spitze in A' und dessen drei Strahlen $A' B$, $A' C$ und $A' A$ sind. Das entsprechende sphärische Dreieck ist in Fig. 4. rechts besonders gezeichnet und gibt durch Anwendung der Formel (8) § 1. S. 2:

$$cotg\ a\ sin\ b = cos\ b\ cos\ \gamma + sin\ \gamma\ cotg\ \alpha$$

$$\begin{aligned} cotg\ y\ sin\ (90^0 - \varphi) &= cos\ (90^0 - \varphi)\ cos\ (90^0 - a) \\ &\quad + sin\ (90^0 - a)\ cotg\ t \end{aligned} \tag{3}$$

$$cotg\ y\ cos\ \varphi = sin\ \varphi\ sin\ a + cos\ a\ cotg\ t$$

$$cotg\ y = + sin\ a\ tang\ \varphi + \frac{cos\ a}{cos\ \varphi}\ cotg\ t \text{ (Nachmittag)} \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt für den Nachmittag, wobei der Stundenwinkel t vom Mittag gegen Abend gezählt ist.

Für den Vormittag gilt eine ähnliche Gleichung, wenn der Stundenwinkel vom Mittag an rückwärts gezählt wird; an Stelle von $90^0 - a$ tritt dann in dem sphärischen Dreieck $90^0 + a$ auf, was in (3) berücksichtigt, statt (4) nun gibt:

$$cotg\ y = -\ sin\ a\ tang\ \varphi + \frac{cos\ a}{cos\ \varphi}\ cotg\ t \text{ (Vormittag)} \tag{5}$$

Wenn das Wandazimut a sein Zeichen ändert, d. h. wenn die Wand nach der anderen Seite, als in Fig. 4. angenommen ist, von der West-

Ost-Richtung abweicht, so bleiben die Formeln (4) und (5) an sich bestehen, gelten dann aber für verwechselten Vormittag und Nachmittag. Man kann auch statt (4) und (5) eine gemeinsame Formel schreiben:

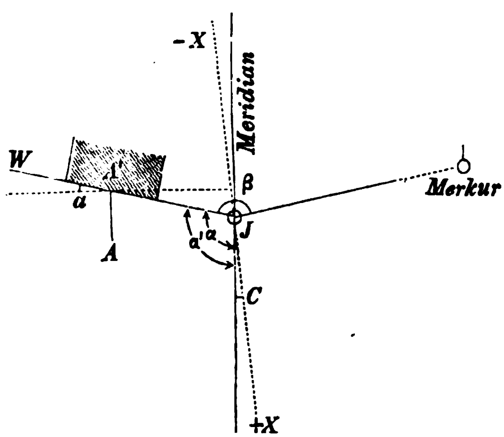
$$cotg\ y = sin\ a\ tang\ \varphi + \frac{cos\ a}{cos\ \varphi}\ cotg\ t \tag{6}$$

wo t Nachmittags positiv, Vormittags negativ und mit entsprechenden Vorzeichen auch y gezählt wird.

Zur weiteren Veranschaulichung aller bei der Ausführung einer solchen Anlage vorkommenden Einzelheiten nehmen wir das Beispiel einer im Jahr 1871 in Baden-Baden an der v. Plessen'schen Villa und einer ähnlichen im Jahr 1877 ebenfalls in Baden-Baden vom Verfasser eingerichteten Sonnenuhr.

Von den beiden astronomischen Elementen, Breite φ und Azimut a der Wand wird man die Breite für den vorliegenden Zweck immer hinreichend genau aus einer topographischen oder auch nur aus einer geographischen Karte abstechen. Für Baden-Baden ergab sich so $\varphi = 48^0\ 46'$.

Fig. 5. Trigonometrische Orientirung der Wand W.



Für die Bestimmung des Azimuts a der Wand hat man zwei Mittel: entweder trigonometrische Orientirung nach der Landesvermessung oder unmittelbare astronomische Messung.

In dem Falle unserer ersten Badener Sonnenuhr gab sich die trigonometrische Orientirung nach Fig. 5. sehr einfach. In die Verlängerung der Wandebene WA' wurde ein Theodolit J gestellt, und mit demselben der Brechungswinkel β zwischen der Wandvisur JW und der Visur JM nach dem trigonometrisch gegebenen 3 Kilometer entfernten Merkur-Thurm gemessen. Die Coordinaten des Standpunktes J wurden aus dem Kataster-Uebersichtsplan in 1 : 10 000 für den vorliegenden Zweck hinreichend genau abgestochen. Wir haben hiernach in dem badischen System, mit dem Ursprung Mannheim, $+\ x$ nach Süden, $+\ y$ nach Westen:

Merkur	$y' = +\ 13170$ m	$x' = +\ 80285$ m
Punkt J	$y = +\ 16125$	$x = +\ 81144$
Differenzen	$y' - y = -\ 2955$ m	$x' - x = -\ \ 859$ m

Man berechnet daraus:

$$tang\,(JM) = \frac{y' - y}{x' - x}, \quad (JM) = 253^0\ 47' \text{ von Süd über West.}$$

Gemessen ist der Brechungsminkel $\beta = 146^0\ 21'$, also ist

$$(JW) = (JM) - \beta = 253^0\ 47' - 146^0\ 21' = 107^0\ 26' = \alpha$$

Das ist der Richtungswinkel der Wand, bezogen auf die X-Achse des Landesvermessungs-Systems; zur Reduction auf das astronomische Azimut braucht man die Meridianconvergenz, welche nach Jordan, Handb. d. Verm. II S. 283 ist:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{y}{R}\,\varrho\ tang\ \varphi, \text{ oder } \alpha - \alpha' = +\frac{y}{R}\,\varrho\ tang\ \varphi = C$$

wo R der Querkrümmungshalbmesser ist; für $\varphi = 48^0\ 46'$ ist $log\ R = 6.80546$, mit dem obigen $y = +\ 16125^m$ gibt dieses $C = +\ 10'$, es ist also jetzt $\alpha' = 107^0\ 26' - 10' = 107^0\ 16'$ im Sinne von Fig. 5., und das Wand-Azimut a im Sinne von Fig. 4. S. 150 ist:

$$a = 17^0\ 16' \tag{7}$$

Zur Controlle wurde noch eine zweite Visur auf den Kirchthurm von Baden-Baden genommen, welche genügende Uebereinstimmnng gab.

Im Falle unserer zweiten Badener Sonnenuhr hätte die trigonometrische Orientirung weit hergeholt werden müssen, weshalb eine unmittelbare astronomische Azimutmessung vorgezogen wurde. Es wurde zu diesem Zweck ein astronomischer Theodolit wieder in die Verlängerung der Wand gestellt, dann abwechselnd Sonnenhöhen und Azimutalwinkel auf die Sonne und auf die Wand gemessen. Die Sonnenhöhen geben nach § 13. die Uhrcorrection, worauf das Sonnenazimut sich für jeden Beobachtungsmoment t nach der Gleichung (2) S. 11 berechnet. Für den vorliegenden Zweck, wo es auf Fehler von $1'$—$2'$ nicht ankommt, ist das eine leichte Messung und Berechnung.

Betrachten wir also die Breite φ und das Wandazimut a als gegeben, und zwar für unser erstes Beispiel, welchem die Figur 4. S. 150 entspricht,

$$\varphi = 48^0\ 46' \qquad a = 17^0\ 16' \tag{8}$$

so hat man die Richtungswinkel y der Schattenstrahlen mit der Verticalen nach den Formeln (4) (5) oder (6) zu berechnen, d. h. man hat mit Einsetzung von (8) in (4) und (5)

$$\text{Vormittags } cotg\ y = -\ 0{,}33866 + 1{,}4488\ cotg\ t$$
$$\text{Nachmittags } cotg\ y = +\ 0{,}33866 + 1{,}4488\ cotg\ t$$

Die Strahlen wurden in ein Rechteck von 1^m horizontaler Breite und $0{,}7^m$ Höhe, als in einen festen Coordinaten-Rahmen, eingetragen und daher nach Fig. 6. (s. unten) die Functionen

$$X = 0{,}7^m \; tang\; y \qquad Y = 0{,}5^m \; cotg\; y$$

soweit sie zum Auftragen brauchbar sind, berechnet, und zwar von 5 zu 5 Zeitminuten. Die Hauptwerthe dieser Berechnung, von Stunde zu Stunde, sind:

Vormittag			Nachmittag		
Zeit	X	Y	Zeit	X	Y
			VII $t = 7^h = 105^0$	. .	— 0,025 m
VI $t = 6^h = 90^0$	. .	. .	VI $t = 6 = 90$	. .	+ 0,169
VII $t = 5 = 75$	. .	0,025 m	V $t = 5 = 75$	. .	0,363
VIII $t = 4 = 60$	. .	0,249	IV $t = 4 = 60$	0,596 m	0,588
IX $t = 3 = 45$	0,631 m	0,555	III $t = 3 = 45$	0,392	0,894
X $t = 2 = 30$	0,323	1,085	II $t = 2 = 30$	0,246	. .
XI $t = 1 = 15$	0,138	. .	I $t = 1 = 15$	0,122	. .
XII $t = 0 = 0$	0,000	. .	XII $t = 0 = 0$	0,000	. .

Nun fehlen nur noch die Bestimmungsmaasse für den Schattenstab. Hiezu diente das Dreikant $AA'BB'$ von Fig. 4. Es ist $A'B = 0{,}800$ m bis zum unteren Rand angenommen, dann wird

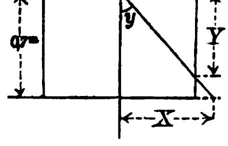
$$BA = 0{,}800 \; cotg\; \varphi = 0{,}7012 \text{ m}, \quad AA' = 0{,}800 \; cosec\; \varphi = 1{,}0637 \text{ m}$$
$$AB' = AB \cos a = 0{,}6696 \text{ m} \qquad BB' = AB \sin a = 0{,}2082 \text{ m}.$$

Zur Controlle noch $A'B'$ als Hypotenuse $= 0{,}8266$ m.

Damit hat der Mechaniker genügende Maasse um dem Stab die richtige Stellung zu geben.

Die mechanische Ausführung geschah auf einer Blechtafel, welche nachher an die Wand angeschraubt wurde.

Fig. 6.
Coordinatennetz zu Fig. 7.

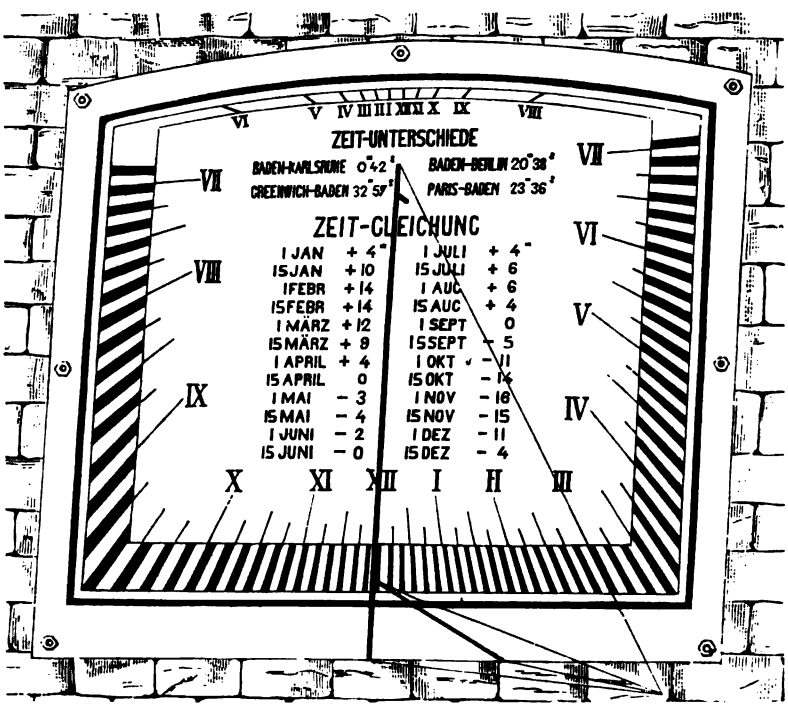


Diese Ausführung ist kostspieliger als die Frescomalung auf die Wand selbst, hat aber den Vortheil, dass alle Constructionen bequemer und damit auch genauer werden.

Fig. 7. zeigt die fertige Sonnenuhr nach einer Photographie. Das Intervall für 5 Minuten ist an der engsten Stelle etwa 1 cm breit, und lässt, trotz der Unsicherheit des Halbschattens, noch Schätzung von 1—2 Minuten zu. Spätere

Vergleichungen haben ergeben, dass die Sonnenuhr allerdings innerhalb dieser Genauigkeit richtig „geht“.

Fig. 7. Sonnenuhr an einer verticalen Wand von W.N.W. nach O.S.O.



§ 28. Der Spiegelsextant.

Geschichtliches. Bohnenberger berichtet in seiner „Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung“, Göttingen 1795, auf S. 57—61 Folgendes: „Da zur See feste Aufstellung von Instrumenten nicht angeht, so sind zur Anstellung astronomischer Beobachtungen auf der See verschiedene Werkzeuge ausgedacht worden. Unter diesen zeichnet sich vorzüglich der nach seinem Erfinder, Johann Hadley, sogenannte Hadley'sche Spiegeloctant oder Spiegelsextant aus. Er bekommt den ersten Namen, wenn er ein Kreisausschnitt von 45°, den zweiten, wenn er ein solcher von 60° (oder auch etwas mehr, meist 70°) ist. Hadley legte die erste Beschreibung von seinem Octanten im Mai 1731 der königlichen Societät in London vor (Philos. Trans. Nr. 420), deren Vicepräsident er war, und erklärte die Grundsätze, auf welche er gebaut ist. Sein erster Octant war von Holz, er liess nachher einen zweiten von Messing machen (Philos. Trans. Nr. 425), mit welchem Versuche zur See angestellt wurden, welche die Brauchbarkeit dieses Instrumentes an den Tag legten. Demungeachtet verflossen wenigstens zwanzig Jahre bis dieses vortreffliche Werkzeug in Gebrauch kam.

Einige Jahre nachher, nämlich im Jahre 1742, wurde unter den hinterlassenen Papieren Hadley's eine Handschrift Newton's gefunden, welche eine Zeichnung und

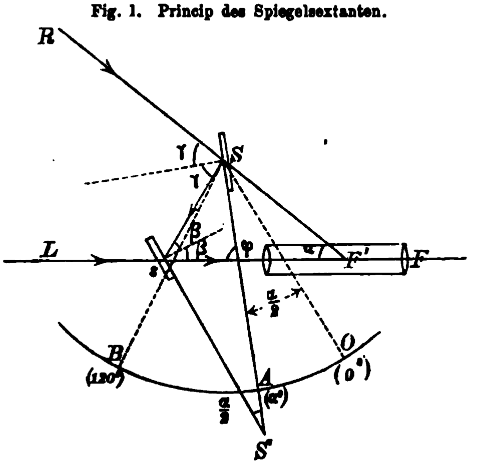
Beschreibung von einem Instrument enthielt, das nicht sehr von dem ersten Instrument Hadley's verschieden war. Seine vorzüglichen Eigenschaften und sein Gebrauch zur See waren ebenfalls angezeigt. Daher, sagt Ludlam (Directions for the use of Hadley's Quadrant, London 1790), scheint es, dass in der That Newton der erste Erfinder von diesem Reflexionsquadranten war, ob es gleich vor 1742 Niemanden als vielleicht dem D. Hadley bekannt war, welcher noch nichts davon gewusst zu haben scheint, als er seinen Octanten der königlichen Societät bekannt machte. Hadley's grosse Geschicklichkeit und besondere Fertigkeit in der Optik (wovon man viele Beweise in den philos. Trans. findet), lassen keinen Zweifel stattfinden, dass er gleichfalls der erste Erfinder war, und demzufolge hat dieses Instrument immer seinen Namen getragen."

„Man suchte nun den Sextanten auch zu Beobachtungen auf dem festen Lande einzurichten. Der Seefahrer findet seinen Horizont in der weiten See, zu Lande muss man sich einen Horizont durch Kunst zu verschaffen wissen. Es wurde daher auch der Hadley'sche Sextant in Deutschland wenig oder gar nicht gebraucht, bis Herr von Zach und Herr Graf Brühl dieses vortreffliche Instrument auch in Deutschland bekannt machten und Mittel erfanden, es zu Beobachtungen auf dem Lande sicher gebrauchen zu können."

Princip des Spiegelsextanten (Fig. 1.).

S und s sind zwei Spiegel („Grosser Spiegel" S, „Kleiner Spiegel" s), deren Ebenen sich in S' schneiden. L und R sind zwei entfernte Zielpunkte (links und rechts), welche beide im Fernrohr F in Deckung gesehen werden, und zwar L unmittelbar über den kleinen Spiegel s hinweg, dagegen R durch doppelte Reflexion auf dem Wege $RSsF$.

Fig. 1. Princip des Spiegelsextanten.



Es lässt sich zeigen, dass der Winkel $SS's$, welchen die beiden Spiegel unter sich bilden, die Hälfte des Winkels $LFR = \alpha$ ist, welchen die beiden Ziellinien nach L und R einschliessen, denn es ist

$$\text{im Dreieck } F'sS\text{:} \quad \alpha + 2\beta + (180^0 - 2\gamma) \quad = 180^0$$
$$\text{im Dreieck } S'sS\text{:} \quad S' + (90^0 + \beta) + (90^0 - \gamma) = 180^0$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha = 2\gamma - 2\beta \tag{1}$$
$$S' = \gamma - \beta$$

$$S' = \frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

In der Figur ist daher $\frac{\alpha}{2}$ bei S' eingeschrieben.

Dieser Satz (2) (welcher mit $\alpha = 90^0$ bekanntlich auch beim Winkelspiegel zur Anwendung kommt) bildet die Grundlage der Theorie des Spiegelsextanten.

Der kleine Spiegel s und das Fernrohr F sind mit dem Sextanten SOB fest verbunden, während der grosse Spiegel S um den Sextantenmittelpunkt drehbar ist, und bei der Drehung eine Alhidade SA mitnimmt, welche auf den Nullpunkt O der Kreisbogentheilung zeigt, wenn beide Spiegel S und s parallel sind (SO parallel dem Spiegel s). Der Bogen OB ist mit einer Theilung versehen, deren beigeschriebene Zahlen das Doppelte des jeweiligen Centriwinkels OSA angeben, d. h. man liest an dem Bogen OB mittelst der Alhidade SA geradezu den zu messenden Winkel α ab, weshalb bei A der Werth (α^0) beigesetzt ist.

Die Entfernung der Zielpunkte L und R wird bei Sextantenmessungen im Allgemeinen als unendlich gross vorausgesetzt, so dass die Sextantendimensionen selbst für diese Zielpunkte keine Parallaxen geben. Bei astronomischen Zielpunkten (Sonne, Mond etc.) ist diese Bedingung weitaus erfüllt, und auch bei terrestrischen Messungen müssen nur selten die Parallaxen berücksichtigt werden, worüber später das Nöthige zu verhandeln sein wird.

Nullstellung der Alhidade. Wenn $\alpha = 0$ ist, so ist nach (2) auch der Winkel $S' = 0$, d. h. wenn der zu messende Winkel Null ist, oder wenn die (als weit entfernt vorausgesetzten) Zielpunkte L und R zusammen fallen, so müssen die beiden Spiegel parallel stehen, und die Alhidade soll Null zeigen. Thut sie dieses nicht, sondern zeigt sie irgend einen anderen Werth i, so werden auch alle anderen Winkel um diesen Betrag zu gross oder zu klein erhalten, oder man hat es mit einem sogenannten „Indexfehler" zu thun, dessen Werth man sofort erhält, wenn man die beiden Bilder eines (entfernten) Punktes zum Zusammenfallen bringt. Die zugehörige Alhidadenablesung gibt den Indexfehler, über welchen des Näheren später verhandelt werden wird (§ 31.).

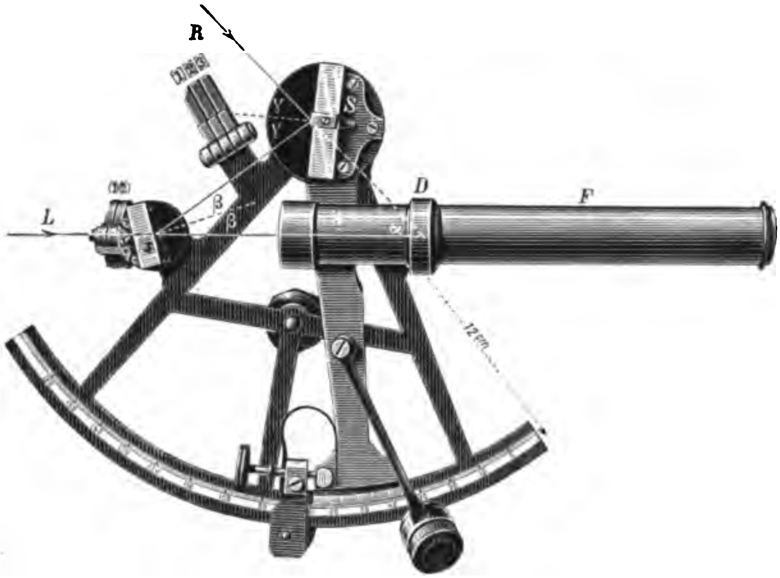
Von der schematischen Fig. 1. zu der Instrumentenzeichnung Fig. 2. übergehend, welche einen kleinen Sextanten von Kinzelbach in Stuttgart vorstellt, mit dem wir zahlreiche Messungen gemacht haben, betrachten wir die Hauptheile besonders.

1. Das Fernrohr wird zum Gebrauch in einen Ring D eingeschraubt, und kann mittelst einer unter dem Sextanten angebrachten Schraube in seiner Höhenlage gegen die Sextantenebene verändert werden. Diese Höhenverschiebung des Fernrohrs hat den Zweck, je nach Umständen einen grösseren oder kleineren Theil des Objectivs dem directen Bilde L oder dem zweifach reflectirten Bilde R zu widmen, wenn diese beiden Bilder verschiedene Helligkeit haben.

Die Fernrohrachse soll der Sextantenebene parallel sein, und es ist bei vielen Instrumenten eine Correctionsvorrichtung, etwa an dem Ring D, in welchen das Fernrohr eingeschraubt ist, vorhanden, mit welcher man die Parallelität des Fernrohrs zur Sextantenebene richtig stellen kann.

Vor dem Ocular des Fernrohrs kann ein stark rothes Blendungsglas aufgeschraubt werden, welches dann gebraucht wird, wenn bei Sonnen-

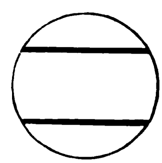
Fig. 2. Spiegelsextant.
(Maassstab 1 : 2,4. Halbmesser = 12 cm.)



beobachtungen beide Strahlen *L* und *R* fürs Auge geschwächt werden müssen.

Ein Fadenkreuz, wie bei einem Theodolitfernrohr, hat das Sextantenfernrohr nicht, man bringt die Bilder nach Schätzung in der Mitte des Gesichtsfeldes zur Deckung. Dagegen hat das Fernrohrocular häufig zwei Parallelfäden, wie Fig. 3. zeigt, welche dazu dienen, die Mitte des Gesichtsfeldes besser schätzen zu können. Meist hat man zwei oder mehr Oculare mit verschieden starken Vergrösserungen, mit verschieden dicken Fäden etc.

Fig. 3.
Gesichtsfeld des Sextanten-Fernrohrs.



Die optischen Verhältnisse eines Sextanten-Fernrohrs sind wesentlich verschieden von denen des Fernrohrs eines Theodolits oder eines ähnlichen festen Instrumentes.

Unser Instrument hat:

Oeffnung des Objectivs 16 mm
Brennweite des Objectivs 17 cm

a) schwache Vergrösserung = 8fach
mit Gesichtsfeld = $3^0\ 36'$

b) starke Vergrösserung = 12fach
mit Gesichtsfeld = $2^0\ 24'$.

Der Halbmesser des Sextanten Fig. 2. ist 12 cm, die Nonienablesung 20″.

Ausser dem Fernrohr mit den beiden Ocularen kann auch ein einfaches Diopterrohr in den Ring *D* geschraubt werden, und beim Verzicht auf Vergrösserung kann man auch direct mit freiem Auge durch den Ring *D* schauen.

2. Der kleine Spiegel *s* steht dem Fernrohr gerade gegenüber. Das Glas des kleinen Spiegels wirkt nur auf der unteren Hälfte reflectirend, die obere Glashälfte ist völlig durchsichtig. Die obere Hälfte gestattet nämlich dem direct gesehenen Bild *L* den geraden Weg ins Fernrohr, während die untere spiegelnde Hälfte für das doppelt reflectirte Bild *R S s F* bestimmt ist. Der kleine Spiegel hat eine Corrections-Vorrichtung, mittelst deren man seine Ebene rechtwinklig zur Sextantenebene stellen kann. Ausserdem gestattet der kleine Spiegel zuweilen eine kleine Drehung um seine rechtwinklig zur Sextantenebene gerichtete Achse, zur Berichtigung des Indexfehlers (§ 31.).

3. Der grosse Spiegel *S* ist sammt der Alhidade drehbar um eine Achse, welche im Mittelpunkt des Sextantenbogens rechtwinklig zur Sextantenebene ist.

Der grosse Spiegel hat meist, wie der kleine, eine Correctionsvorrichtung, mittelst welcher seine Ebene rechtwinklig zur Sextantenebene gemacht werden kann.

4. Die Blendgläser [1] [2] [3] und (1) (2)*) dienen zur Abschwächung von Lichtstrahlen (namentlich bei Sonnenbeobachtungen), welche entweder vom linken Zielpunkt *L* oder vom rechten Zielpunkt *R* herkommen. Unser Instrument besitzt deren 5 von verschiedenen Blendungsstärken und von verschiedenen Farben (roth, grün etc.), nämlich 3 vor dem grossen Spiegel [1] [2] [3] und 2 vor dem kleinen Spiegel (1) (2). Diese Blendungen, welche in Fig. 2. sämmtlich zurückgeschlagen gezeichnet sind, werden nach Bedarf eingeschlagen.

(Weiteres über die Blendgläser s. § 31.)

Handhabung des Sextanten. Um den Winkel zwischen zwei Zielpunkten *L* (links) und *R* (rechts) zu messen, nimmt man das Instrument am Griff frei in die rechte Hand, und visirt mit dem Fernrohr direct nach *L*, wobei der Sextant in die Ebene der zwei Zielpunkte *L* und *R* gebracht wird. Unter Festhaltung der Visur *L* dreht man mit der linken Hand die Alhidade langsam bis auch der rechtseitige Zielpunkt *R* im Gesichtsfeld erscheint, worauf mit der linken Hand die Alhidade geklemmt und die Mikrometerschraube zum scharfen Decken von *L* und *R* benutzt wird. Die Ablesung am Nonius geschieht dann in aller Ruhe.

---

*) Die Blendgläser (1) und (2) Fig. 2. sind rechtwinklig zu *Ls*, die schiefe Ansicht von (1) und (2) in Fig. 2. rührt daher, dass Fig. 2. nach einer Photographie gemacht ist.

Da man nicht im Stande ist, die Sextantenebene scharf in der Ebene der zwei Zielstrahlen nach L und R zu halten, so muss man, während die Visur L festgehalten wird, das Instrument um die Fernrohrachse beständig drehen, so dass man R in flachem Bogen an L vorbeischwingen sieht, und die Deckung während dieses Schwingens erhaschen muss.

Dem Anfänger wird es schwer, die Zielpunkte nur überhaupt zu finden, und zusammen ins Gesichtsfeld zu bringen. Abgesehen von der Anwendung eines Stativs (§ 29.) wird die Messung erleichtert, wenn man den zu messenden Winkel vorher schon auf 1^0—2^0 genau kennt (dieses ist z. B. bei Monddistanzen stets der Fall). Man stellt dann die Alhidade auf den fraglichen Werth, und muss dann beim vorsichtigen Schwingen um L auch R erscheinen sehen. Zum vorläufigen Einstellen auf etwa 1^0 genau ist es oft nützlich, das Fernrohr heraus zu schrauben, und mit freiem Auge direct durch den Ring D zu sehen. Die Handhabung des Sextanten von freier Hand zu lernen, erfordert Geduld und Liebe zur Sache. Während Winkelmessung mit dem Theodolit bequem in wenigen Nachmittagen gelernt werden kann, ist für den Sextanten eine Woche nöthig zur Einübung der nöthigsten Handgriffe; und Messungen mit ungünstigsten Umständen, wenn z. B. bei Monddistanzen der Sextant verkehrt gehalten werden muss (Sonne links, Mond rechts) oder wenn die schwache Mondsichel bei Tage kaum zu sehen ist etc., verlangen jahrelange Uebung. Theodolitmessungen und Sextantenmessungen lassen sich vergleichen mit dem Schiessen aus festen Geschützen und mit der Büchse aus freier Hand. Wie das Freihandschiessen ist die Sextantenmessung aus freier Hand einer stetigen Verfeinerung fähig. Schriftliche Anweisung hiezu lässt sich nicht geben; persönliche Anleitung ist nützlich, aber nicht absolut nöthig, wie Verfasser aus eigener Erfahrung mittheilen kann.

§ 29. Stative für Reflexions-Instrumente.

Obgleich der Sextant seiner Natur nach in freier Hand zu gebrauchen ist, und zur See überhaupt nicht anders gebraucht werden kann, ist es doch oft erwünscht, dem Sextanten und andern Reflexions-Instrumenten eine feste Aufstellung zu geben.

Für manche Zwecke wird es genügen, den Sextanten auf einem Legebrett, das mit drei Stellschrauben versehen ist, oder auf einem Theodolit-Untergestell, irgendwie zu befestigen, denn die Stellschrauben gewähren hinreichend Spielraum, um z. B. Visuren nach terrestrischen Zielpunkten in nicht zu kleinen Entfernungen zu nehmen.

Wir betrachten nun in Fig. 1. ein in der hannover'schen Sammlung befindliches, zunächst zu einem Steinheil'schen Prismenkreis gehöriges Stativ. Unsere Fig. 1. ist verkleinerte Copie der Fig. 213. von Hunäus, „Die geometrischen Instrumente“ S. 522. Der einzige Unterschied besteht in der Zufügung der Stellschrauben A (von welchen nur zwei links und rechts, in Fig. 1., angedeutet sind), die wir nachträglich anbringen liessen.

Die Construction und Anwendung dieses Stativs erklärt sich durch die Figur nahezu von selbst. Der oben bei L aufzuschraubende Sextant

Fig. 1. Stativ für Reflexions-Instrumente.
(Maassstab 1 : 4,8, Höhe = 48 cm.)



oder Reflexionskreis kann, abgesehen von den Stellschrauben A, in dreifachem Sinne Bewegung erhalten:

1. Drehung um die verticale Centralachse, mit Hemmung bei C.
2. Kippung um die horizontale Achse HH mit Hemmung bei O_1 und Messung der Drehung an dem Kreischen O. Bei der Kippung um die Horizontalachse HH dient der Cylinder N als Gegengewicht gegen das oben bei L aufgeschraubte Messinstrument.
3. Neigung um die Achse kK mit Mikrometerschraube M.

Fig. 2. Seite 161 zeigt das neuere, von berliner Mechanikern zu beziehende Bogenstativ, welches erstens Drehung um eine verticale Central-

achse und zweitens Kippung rechtwinklig zur Ebene des Bogens gestattet, dazu noch beliebige kleine Bewegungen mit den drei Stellschrauben.

Fig. 2. Spiegel-Prismenkreis mit Stativ. (Stativhöhe = 35 cm.)



Die Fig. 2., welche wir von S. 134 des „Berichtes über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, herausgegeben von Löwenherz, Berlin 1880", mit Erlaubniss des Herausgebers entlehnen, bezieht sich a. a. O. auf die Ausstellung von Mechaniker Häcke; die Fig. 2. entspricht aber auch dem Instrument, welches wir, 1883, von Mechaniker Bamberg für unsere Sammlung angeschafft haben.

Wir haben mit dem in Fig. 2. dargestellten Instrument einige Monddistanzen gemessen, und gefunden, dass, obgleich die verschiedenen Bewegungen des Stativs ausreichend sind, es doch noch bequemer wäre, wenn auch noch Kippung in der Ebene des Bogens möglich gemacht würde.

Fig. 3. S. 162 zeigt ein Stativ mit noch mehr Beweglichkeit als Fig. 1. und Fig. 2. Wir haben dasselbe nicht in unserer Sammlung, sondern entlehnen die Zeichnung und Beschreibung aus dem oben citirten Werke von Löwenherz S. 27—28.

Die erste Drehachse ist die verticale Centralachse *a* mit Mikrometerklemme *a'*.

Die zweite Achse ist die horizontale Achse *b* mit Klemme *b'*.

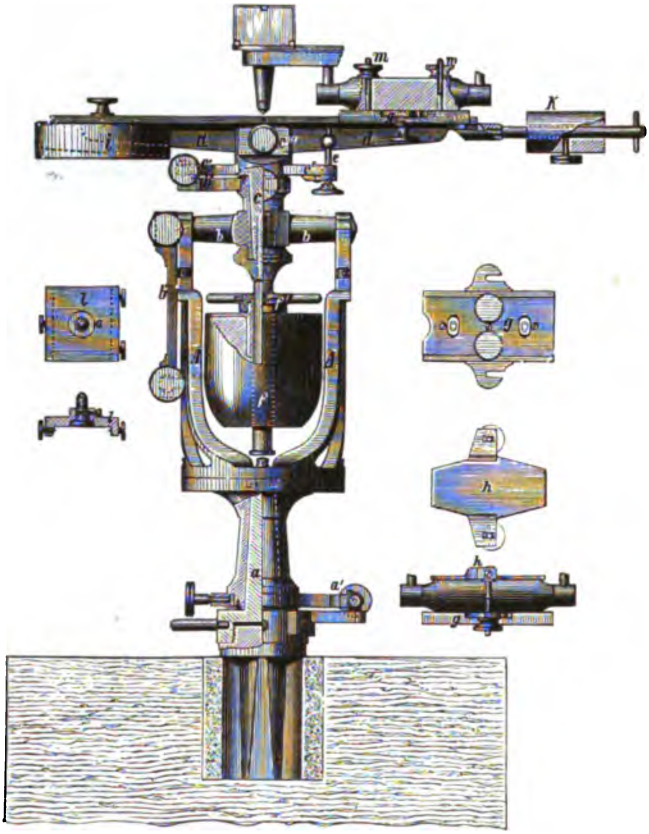
Die dritte zu *b* rechtwinklige Achse ist *c* mit der Mikrometerklemme *b''*.

Für die Einzelheiten, soweit sie sich nicht aus der Figur (s. folgende Seite) begreifen lassen, verweisen wir auf die angegebene Quelle.

Es gibt manche Fälle, in denen das Sextantenstativ vorzügliche Dienste leistet, z. B. terrestrische Winkelmessungen zur Sextantenprüfung, die Untersuchungen von § 37. und § 48., Monddistanzen bei bequemer häuslicher Einrichtung etc., im Uebrigen aber schliessen wir uns dem Urtheil Bohnenbergers an, welcher in seiner „Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, Göttingen 1795", S. 111 sagt: „Ich habe bei einem kleinen vierzölligen Sextanten ein Stativ gebrauchen wollen, aber das Halten in freier Hand bequemer gefunden. Ueber dem Aufstellen des Sextanten geht viele Zeit verloren, ein in der freien Behandlung des

Sextanten etwas geübter Beobachter kann indessen schon mehrere Höhen genommen haben."

Fig. 3. (zu S. 161). Sextantenstativ der deutschen Seewarte nach Neumayer, von Meisner.
(Maassstab 1 : 5, Höhe = 35 cm.)



§ 30. Künstlicher Horizont.

Das schon in § 28. S. 155 angedeutete Mittel, mit dem Sextanten Höhenwinkel auf dem Lande zu messen, besteht darin, dass man sich einen horizontalen ebenen Spiegel $H'H'$ (Fig. 1. S. 163), den sogenannten „künstlichen Horizont" verschafft, und dann mit dem Sextanten den Winkel $\alpha = 2h$ misst, welchen die Strahlen SF und $S'HF$ unter sich bilden. Dabei sei S oder S' ein unendlich weit entfernter Punkt (Sonne, Stern), so dass die Strahlen SF und $S'H$ als parallel gelten.

Es kommt also nur noch darauf an, einen horizontalen ebenen Spiegel

zu finden, und als solcher dient entweder die ruhende Oberfläche einer Flüssigkeit oder eine mittelst Libelle horizontal zu stellende Glasplatte.

Fig. 1. Künstlicher Horizont.

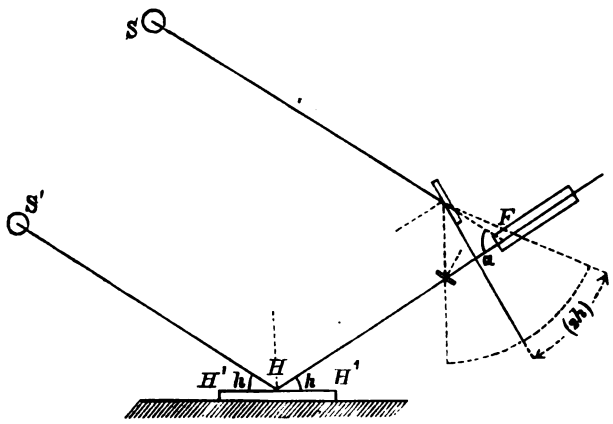


Fig. 2. zeigt die einfachste Vorrichtung dieser Art, mit welcher wir zahlreiche Höhen gemessen haben. Es ist ein flacher Teller von Blech, schwarz angestrichen, mit drei Stellschrauben. Diese letzteren dienen nur dazu, den Teller beiläufig horizontal zu stellen (wozu zuvor eine Dosenlibelle aufgesetzt werden kann). Dann wird irgend eine gefärbte Flüssigkeit eingeschüttet; wir nehmen gewöhnlich Tinte oder Rothwein für Sonnenbeobachtungen; und wenn nun die Luft nicht zu unruhig ist und keine Erschütterungen stattfinden, kann die Messung nach Fig. 1. beginnen.

Fig. 2. Teller für den Flüssigkeitshorizont.
(Durchmesser = 18 cm.)

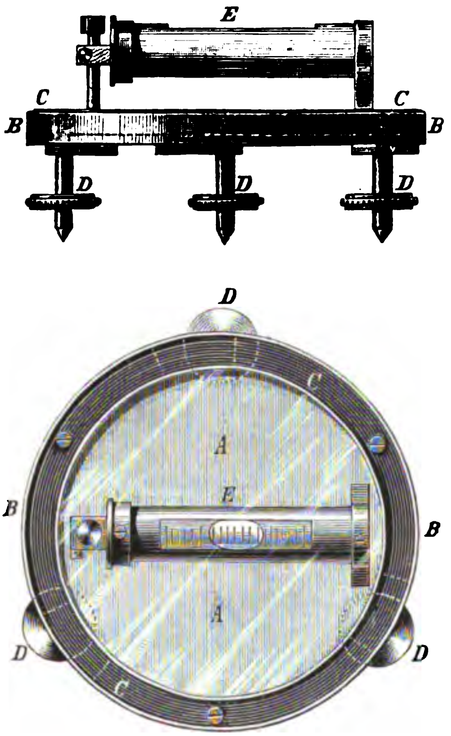


Für Sternbeobachtungen bei Nacht ist die Spiegelung von Tinte, Rothwein, Oel etc. zu schwach, als Flüssigkeit muss dann reines Quecksilber genommen werden, wobei aber der Teller Fig. 2. sehr dicht angestrichen werden muss, damit das Quecksilber nicht mit dem Metall in Berührung kommt, oder besser noch ein hölzernes Gefäss angewendet wird.

Um die offenen Flüssigkeiten, namentlich das Quecksilber, vor dem Winde zu schützen, setzt man zuweilen ein Glasschutzdach darüber, dessen Gläser aber gut planparallel geschliffen sein müssen, damit keine Lichtbrechungen dadurch erzeugt werden können. Statt Glas kann man Glimmerblätter, die von Natur planparallel crystallisirt sind, anwenden.

Als nächst einfachen Apparat nach Fig. 2. betrachten wir den Glashorizont mit Libelle. Fig. 3. zeigt das Instrument unserer Sammlung, nach „Hunäus Die geometrischen Instrumente“ S. 528. Die dunkle Glasplatte *A* ist unten matt geschliffen und mit Harz überzogen, so dass nur die O b e r - fläche reflectirt, und zwar nicht sehr stark, für Tagesbeobachtungen mit der Sonne genügend, für Sterne bei Nacht nicht genügend. Die Libelle *E* wird für sich durch Umsetzen berichtigt mit Benutzung ihrer eigenen Schraube und der Stellschrauben *D*, so dass die Libellenachse parallel der Glasplatte *A* wird. Hat man sich dessen versichert, so erfolgt die Horizontalstellung der oberen Glasebene mit den Stellschrauben *D*. Die Empfindlichkeit der Libelle ist bei unserem Apparat gering, nämlich etwa 1′ auf eine gewöhnliche Strichlänge. Die Empfindlichkeit viel weiter, etwa auf 10″, zu bringen, hat wenig Werth, weil im heissen Sonnenschein die Glasplatte nicht so genau horizontal bleibt, und sogar ihre Form verändert.

Fig. 3. Glashorizont mit Libelle.
Maassstab 1 : 2. *D*, Durchmesser = 10,5 cm.)



Gut e b e n geschliffene Glasplatten, wie man sie zu feinen Horizonten braucht, sind ziemlich theuer; für Uebungszwecke und für Genauigkeit von nur 1′ bis 2′, welche ja auch schon in vielen Fällen ausreicht, kann man aber wohl auch gewöhnliche geschliffene Glasscheiben benützen, welche als Bruchstücke von Spiegelglashändlern leicht zu erhalten sind. Es gibt auch ein einfaches Mittel, die E b e n heit solcher Gläser mit dem Sextanten zu prüfen: Nachdem die Rückseite des zu untersuchenden Glases matt gemacht ist, damit nicht die Rückseite ebenfalls ein Bild gibt, verfährt man so: Es werden mit dem Sextanten die beiden Sonnenbilder, welche man zur Indexfehlerbestimmung einzustellen pflegt (§ 31. S. 169) scharf zur Berührung gebracht, und dann sucht man mit gänzlich ungeändertem Sextanten dieselben Bilder auch in dem Glasreflexe. Berühren sich auch hier die beiden Sonnenbilder, so ist das Glas an der benutzten Stelle eben; greifen dagegen die Bilder über-

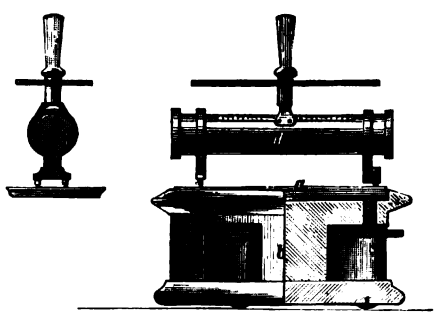
einander, so ist das Glas hohl, und lassen die Bilder einen Zwischenraum, so ist das Glas gewölbt.

Nach unseren Erfahrungen findet man kaum durch Zufall ein Glas, welches dieser Bedingung so scharf genügt, als man mit einem Sextanten die Berührung einstellen kann.

Eine besondere Bedeutung haben die auf der Rückseite mit Folie belegten Spiegel für Nachtbeobachtungen, weil man darin Sterne beobachten kann. Das Bild der Spiegel-Vorderseite kommt dabei, weil viel schwächer, nicht in Betracht. Ob die Rückseite genügend eben ist, kann man durch die soeben erwähnte Sonnenprobe mit dem Sextanten ermitteln; ob aber die beiden Glasebenen genügend parallel sind, ist eine zweite Frage. Es ist zu rathen, einen solchen Spiegel, dessen Vorderseite mit der Libelle eingestellt wird, stets in zwei entgegengesetzten Lagen zum Höhenmessen anzuwenden, wobei die Libelle auf ganz bestimmten Punkten der Glasplatte umgesetzt werden muss. Damit wird die Convergenz zwischen der Vorder- und Rückfläche des Glases eliminirt.

Eine andere Anordnung des Glashorizontes ist in Fig. 4. veranschaulicht (s. Löwenherz, Bericht über die wissenschaftl. Instrumente auf der Berl. Gewerbeausstellung 1879 S. 136). Der Haupttheil ist eine runde, starke, auf der oberen Fläche planpolirte dunkelgefärbte Glasplatte *a*, welche in einer Holzschale *C* eingeschlossen ist. Diese Holzschale enthält drei Stellschrauben mit nach oben gekehrten abgerundeten Spitzen, auf welchen die Platte aufliegt. Die Aufsatzlibelle *d*, nach welcher nun die Horizontirung erfolgt, hat eine Empfindlichkeit von 10″ auf 1 Strich.

Fig. 4. Glashorizont von Häcke.



Quecksilber-Amalgam-Horizont (Fig. 5.).

Ein Mittelding zwischen dem Flüssigkeits- und dem Glashorizont bildet der Quecksilber-Amalgam-Horizont, welcher von Schumacher in Nr. 247 der Astr. Nachr. (11. Band, 1834, S. 109) mit folgenden Worten erwähnt wird: „Jeder Beobachter mit Reflexionsinstrumenten kennt die Schwierigkeiten, welche ein Quecksilberhorizont darbietet, wenn man einen hölzernen oder eisernen Trog braucht. Alle diese Schwierigkeiten verschwinden, und das Quecksilber bietet eine schöne ruhige Spiegelfläche, wenn man es in eine flache sphärische Calotte von reinem Kupfer, das mit Quecksilber und Scheidewasser vorher angequickt ist, giesst. Ich verdanke meinen ersten Horizont dieser Art dem verstorbenen Geheimen Rath v. Behrnauer, der

ihn mir im Jahr 1822 schenkte, und würde ohne ihn schwerlich noch in diesem Augenblicke diese vortreffliche Einrichtung kennen, obgleich sie schon vor 1804 von Herrn von Schönau erfunden, und im Berliner Jahrbuche 1807 p. 158 bekannt gemacht ist. Vielleicht hat frühere Beobachter die Schwierigkeit abgeschreckt, die Oberfläche des Quecksilbers auf diesem Horizonte rein zu erhalten, welches allerdings, wenn man Leder oder Papier gebraucht um die Unreinigkeiten wegzunehmen, nicht leicht ist. Indessen erhält man sehr leicht eine reine Oberfläche, wenn man den Horizont unmittelbar vor der Beobachtung mit etwas übergegossenem Quecksilber abspült. Diesen Handgriff verdanke ich dem ausgezeichneten Mechaniker Herrn Paulsen."

Ein solcher Horizont unserer Hannover'schen Sammlung ist in Fig. 5. (nach Hunäus, Die geometrischen Instrumente S. 200) dargestellt. *AABBB* ist ein messingener Dreifuss mit Stellschrauben. Auf drei Ansätze *aaa* desselben wird eine schwach concave Kupferplatte *C* aufgelegt, welche mit einem nur etwa 1 mm hohen Rande versehen ist. Durch Aufsetzen einer kleinen Dosenlibelle und mit Benutzung der drei Stellschrauben *B* wird die Kupferplatte *C* nahezu horizontal gestellt. Nun hat man ein hölzernes Quecksilbergefäss, aus welchem auf die Platte *C* Quecksilber durch eine enge Oeffnung geschüttet wird. Wenn dieses Quecksilber den Raum innerhalb des 1 mm hohen Randes ausfüllt, so hat man zunächst einen ähnlichen Horizont wie Fig. 2., der aber dem Wind und sonstigen Erschütterungen noch sehr zugänglich ist.

Fig. 5.
Quecksilber-Amalgam-Horizont.
(Maassstab 1 : 4, Durchmesser = 12 cm.)



Nun soll aber das Quecksilber nicht unmittelbar auf die Platte *C* gebracht werden, sondern es soll die Oberfläche dieser Kupferplatte zuvor durch eine Auflösung von salpetersaurem Quecksilber angequickt werden. Wenn dann das aufgefüllte Quecksilber sich mit der Platte breiartig als Amalgam verbindet, streicht man es mit einem beinernen Lineal glatt ab, wobei der Ueberschuss des Amalgams in den untergestellten Holzteller *F* fällt. Wer, wie z. B. Verfasser, mit den Chemikalien wenig Bescheid weiss, wird allerdings die oben von Schumacher citirten Schwierigkeiten bei diesem Verfahren finden.

Eine weitere Mittelconstruction zwischen dem Flüssigkeits- und dem Glashorizont besteht in einer auf Quecksilber schwimmenden Glasplatte, worüber in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1885 S. 82—83 Weiteres mitgetheilt ist.

Aus eigener Erfahrung können wir das einfachste Mittel, den Flüssigkeitsteller Fig. 2., am besten empfehlen. Die Glashorizonte lassen immer ein Gefühl der Furcht vor constanten Fehlern bei dem Beobachter zurück. Ausser zu Uebungen, wo die Gläser vorzüglich sind, indem sie wenigstens immer ein ruhiges Bild geben, haben wir den bequemen rückseitig belegten Folienglasspiegel namentlich zu Nachtbeobachtungen angewendet.

Ueber eine andere Art von künstlichem Horizont, welcher, an dem Sextanten selbst angebracht, dem Seemann bei Nacht die Kimm ersetzen soll, findet man Mittheilungen in dem „Handbuch der nautischen Instrumente" S. 326—327, in den österreichischen „Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens", 1884, S. 248 und S. 636 und in der Patentschrift Nr. 17827, Klasse 42 (Erfindung von Reitz in Hamburg). Ferner in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1885, S. 84 u. ff. Gelcich, Künstliche Horizonte.

§ 31. Allgemeine Prüfung und Berichtigung des Spiegelsextanten. Indexfehler.

Die Theorie von § 28. S. 155 hat vorausgesetzt, dass das Fernrohr parallel der Sextantenebene sei, und dass die beiden Spiegel rechtwinklig zur Sextantenebene stehen. Wenn die Spiegelnormalen und die Fernrohrachse nur wenigstens innerhalb $^1/_2{}^0$ parallel der Sextantenebene sind, so kann man mit dem Instrument schon einigermaassen brauchbare Messungen machen, jedoch wird als Nebenbedingung noch verlangt, dass in der Alhidaden-Nullstellung die beiden Spiegel genau parallel seien.

Wir behandeln diese drei Bedingungen einzeln und zwar zunächst ganz summarisch, nur soweit als nöthig ist, um die ersten Messungen mit dem Instrument machen, und seine Wirkungsweise verstehen zu können. Die genauere Untersuchung dieser Bedingungen und die zahlenmässige Bestimmung der Fehler werden wir später vornehmen.

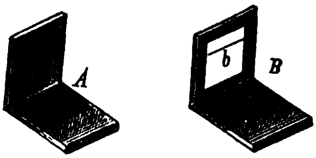
1) Parallelität der Fernrohrachse mit der Sextantenebene.

Man stellt den Sextanten horizontal fest, etwa auf einem Stativ, visirt mit dem Fernrohr nach einer verticalen Skale, etwa einer Nivellirlatte, und visirt dann mit freiem Auge über die Sextantenebene hinweg nach derselben Richtung. Man wird dann finden, ob die Fernrohrvisur die Latte über oder unter der Sextantenebene trifft.

Statt über die Sextantenebene unmittelbar hinzuvisiren, kann man

kleine Diopter Fig. 1. *A* und *B* auf die Sextantenebene stellen, und diese zum Visiren benutzen (wobei das Ocularloch *a* und der Faden *b* genau gleich hoch über der Grundebene sein müssen). Man kann auch noch bequemere und genauere Hülfsmittel zu diesem Zweck construiren, von welchen in § 34. die Rede sein wird.

Fig. 1. Diopter.



2) Neigung des grossen Spiegels.

Summarisch kann man die Rechtwinkligkeit des grossen Spiegels zur Sextantenebene dadurch untersuchen, dass man in diesem Spiegel das Bild des Limbus betrachtet, und zusieht, ob dieses reflectirte Bild in den Limbus selbst ohne Knickung übergeht. Es wird wohl immer eine Alhidadenstellung geben (bei unserem Instrument etwa 30°), bei welcher das reflectirte Limbusbild und ein Theil des Limbus in gegenseitiger Fortsetzung ohne die Störung durch andere Instrumententheile gesehen werden können.

Die Neigung des grossen Spiegels ist streng genommen mit der Drehung der Alhidade veränderlich, wenn nicht die Alhidadenachse gut rechtwinklig zur Sextantenebene gebohrt ist. Dieses darf man aber wohl annehmen, denn andernfalls müsste der Nonius beim Bewegen der Alhidade an verschiedenen Stellen gegen den Limbus klaffen oder pressen, d. h. wenn man mit dem Instrument überhaupt ordentlich messen kann, so kann die Neigung des grossen Spiegels als constant angenommen werden.

3) Neigung des kleinen Spiegels.

Wie schon zu Anfang dieses Paragraphen erwähnt wurde, wird der kleine Spiegel nicht für sich rechtwinklig zur Sextantenebene, sondern in der Alhidaden-Nullstellung parallel zum grossen Spiegel gestellt. Wenn in der Nähe dieser Nullstellung die Alhidade langsam bewegt wird, so sieht man von e i n e m Zielpunkt, auf den das Fernrohr gerichtet wurde, z w e i Bilder ruhig an einander vorbei, oder durch einander hindurchziehen. Findet dieses in gleicher Höhe statt, (der Sextant als horizontal vorausgesetzt), so sind die beiden Spiegel parallel, geht aber das eine Bild über oder unter dem andern vorbei, so muss an den Correctionsschrauben des kleinen Spiegels nachgeholfen werden, bis völlige Deckung erzielt werden kann.

Indexfehler.

Wenn beide Spiegel parallel sind, fallen die beiden Bilder eines unendlich entfernten Punktes, das directe und das zweifach reflectirte, im

Fernrohr zusammen, und die Ablesung am Kreis soll Null sein. Wenn diese Ablesung nicht Null, sondern etwa $= i$ ist, so misst man mit dem Sextanten alle Winkel um den Werth i zu gross, d. h. man hat den Indexfehler i oder die Indexcorrection $- i$. Man kann diesen Fehler wegschaffen durch Drehen des kleinen Spiegels, allein dieses ist nur dann zu empfehlen, wenn man nichts weiter beabsichtigt, als mit dem Sextanten Messungen auf beiläufig 1' genau zu machen. Will man die volle Messungsschärfe ausnützen, so muss man den Index zu jeder Messung neu bestimmen, weil er beständigen Aenderungen innerhalb 1' ausgesetzt ist, welche sich durch Erschütterungen, Temperaturänderungen etc. erklären. Es ist dann auch gar nicht nützlich, den Index nahezu = Null zu machen, weil das Schwanken mit wechselndem Vorzeichen zu Irrungen Veranlassung gibt. Ich pflege den Index stets im positiven Theil der Theilung etwa = 5' zu halten, damit er nicht zufällig zu nahe an die Null kommt, und doch keinen zu grossen absoluten Werth hat. Man muss sich sehr hüten, in die Benennungen Verwechslung zu bringen. Wenn etwa beim Einstellen auf einen unendlich fernen Punkt die Ablesung 5' 20'' gemacht wird, so ist es sprachlich richtig, zu sagen: der Indexfehler ist = + 5' 20'', und die Indexcorrection ist = — 5' 20''. Man thut aber am besten, die Bezeichnung „Indexfehler" mit einem Vorzeichen ganz zu vermeiden, weil es zu leicht vorkommt, dass bei der Angabe Indexfehler = + 5' 20'' Jemand die 5' 20'' zu der Messung addirt.

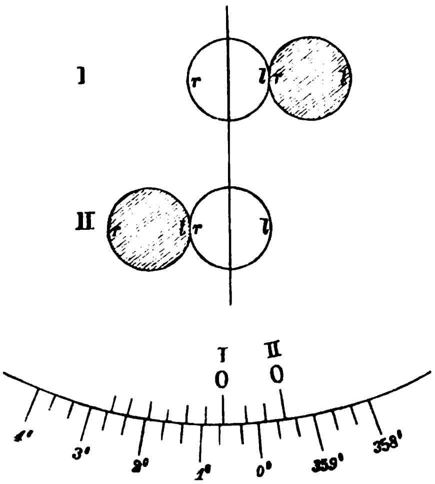
Mit Festhaltung der Regel, dass für Einstellung eines fernen Zielpunktes die Ablesung stets positiv $= i$ sei, haben wir bei einer Ablesung α den wahren Winkelwerth:

$$= \alpha - i$$

ebenso wie bei der Theodolitmessung ein Winkel stets = Ablesung rechts — Ablesung links berechnet wird.

Man bestimmt den Index am besten durch Beobachten der Sonne, erstens weil sich die Berührung zweier Sonnenbilder ungemein scharf beobachten lässt, und zweitens, weil man dabei eine Messungsprobe in dem Sonnendurchmesser hat.

Fig. 2.
Bestimmung des Indexfehlers durch Sonnenbeobachtung.



Wenn man, nach Vorschieben der Ocularblendung, mit nahezu auf Null gestellter Alhidade, die Sonne anvisirt, so sieht man zwei Sonnenbilder, welche man zunächst durch Auf- oder Niederschrauben des Fernrohrs gleich

hell macht. Dann bringt man mit der Mikrometerschraube beide Bilder zur Randberührung, was der Fig. 2. und, als Zahlenbeispiel folgenden Ablesungen entspricht:

	I	II
	0° 39′ 20″	359° 36′ 20″
	39 30	36 30
	39 40	36 30
	39 30	36 20
	39 20	36 30
Mittel	I = 0° 39′ 28″	II = 359° 36′ 26″

$$\text{Nun ist } i = \frac{I + II}{2} = 7' \ 57''$$

$$2r = \frac{I - II}{2} = 31' \ 31''$$

Nach dem Jahrbuch ist der Sonnenhalbmesser für diesen Tag (4. Aug. 1883) $r = 15' \ 48''$, also $2r = 31' \ 36''$, was mit der Messung auf 5″ stimmt.

Dass diese Rechnung und die Fig. 2. zusammen der Wirklichkeit entsprechen, davon überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass das direct gesehene Sonnenbild durch das Fernrohr einmal umgekehrt wird (links und rechts vertauscht) und dass das zweifach reflectirte Sonnenbild (in Fig. 2. schraffirt) durch jeden Spiegel und durch das Fernrohr, also im Ganzen 3mal umgekehrt wird, so dass auch hier links und rechts gegen die Wirklichkeit vertauscht sind.

Man misst also bei I den Winkel vom linken zum rechten Sonnenrand, im Sinne der Sextantentheilung, und bei II den Winkel vom rechten zum linken Sonnenrand, gegen die Sextantentheilung, weshalb man hier mit der Ablesung meistens in die Uebertheilung (359° etc.) gewiesen wird.

Als Beispiel für die A e n d e r u n g e n der Indexcorrection legen wir eine Anzahl solcher Werthe von der libyschen Expedition vor:

1873	26. December	— 7′ 45″		1874	23. Februar	— 6′ 51″
„	28. „	— 7 42		„	24. „	— 6 55
1874	2. Januar	— 7 21		„	9. März	— 7 0
„	9. „	— 7 17		„	12. „	— 6 53
„	24. „	— 7 31		„	21. „	— 7 0
„	29. „	— 7 23		„	29. „	— 7 9
„	31. „	— 7 30		„	1. April	— 7 15
„	4. Februar	— 7 16		„	4. „	— 7 4

Die einzelne Bestimmung ist gewöhnlich durch 10 Sonneneinstellungen gemacht, und auf 5″—10″ sicher, es ist also die Aenderung, welche auch durch die Erschütterungen des Kameeltransports wohl erklärlich ist, zweifellos. Es hat sich aus der Gesammtheit der auf jener Expedition gemachten Erfahrungen die unweigerlich zu befolgende Regel ergeben, zu jeder Gruppe von Monddistanzen, oder sonstigen wichtigen Messungen, den Index vor und nach der Messung besonders zu bestimmen.

Der betreffende Sextant blieb nach jener Zeit jahrelang ungeändert und meist unbenutzt, hat aber bis zum Jahr 1883, als er wieder in Thätigkeit kam, den Index allmälig auf 5′ vermindert.

Als ein Beispiel der Misslichkeiten, welche aus unklarer Ausdrucksweise betreffs des Index entstehen können, führen wir Folgendes an: In Petermann's Mittheilungen, Ergänzungsband II, 1862—63 Seite (91), sind von dem in Wadai ermordeten Moritz von Beurmann Prismenkreismessungen von den Oasen Dschalo und Sella mitgetheilt, wobei für ersteren Ort „Indexfehler + 40″", für letzteren „Indexcorr. + 30″" und Aehnliches angegeben ist. Für die Sonnenhöhen kommt es auf ± 30″ nicht an, dagegen für die Monddistanzen ist der Zweifel ± 40″ entsprechend einem Zweifel von etwa $^{3}/_{4}{}^{0}$ der Länge. Ich hatte Veranlassung, die dortige Berechnung zu wiederholen, und mit dem Itinerar zu vergleichen (Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin 1876, Nr. 62 S. 142—145), wobei die Annahme „Indexfehler + 40′" als Indexcorrection = + 40″, welche der erste Berechner gemacht hat, sich mit anderem Material viel schwerer vereinigen liess, als die Annahme Indexcorrection = — 40″, zu welcher ich mich entschloss. Wäre das fragliche Instrument nicht nahezu auf Index = 0 justirt gewesen, sondern auf 5 bis 10′, so hätte jener Zweifel trotz der unklaren Ausdrucksweise auch nach dem Tode des Beobachters sicher gelöst werden können.

§ 32. Untersuchung der Blendgläser.

Wenn die Blendgläser nicht durch planparallele Ebenen begrenzt sind, so werden durch deren Zwischentreten die Richtungen der Lichtstrahlen abgelenkt, und die Ablesung am Sextanten verändert.

Dieses bezieht sich nur auf die hinter dem kleinen Spiegel und vor dem grossen Spiegel einzuschaltenden Gläser, welche entweder den directen oder den zweifach reflectirten Strahl ablenken; die Ocularblendung dagegen, welche b e i d e zusammenfallende Strahlen vor dem Eintritt ins Auge ablenkt, kann die Sextantenablesung nicht beeinflussen.

Man hat daher als erstes Mittel der Gläseruntersuchung die Bestimmung des Indexfehlers (durch Anvisiren der Sonne) mit Ocularblendung und dann mit 2 Spiegelblendungen. Wir nehmen hiezu für den Sextanten von Seite 157, welcher 5 Blendungsgläser hat, folgende Bezeichnungen an:

vor	dem	grossen	Spiegel	dunkelroth,	Correction	= [1]
„	„	„	„	hellroth,	„	= [2]
„	„	„	„	grün,	„	= [3]
hinter	„	kleinen	„	dunkelroth,	„	= (1)
„	„	„	„	grün,	„	= (2)

d. h., wenn man mit dem ersten Glas eine Ablesung α macht, so würde man ohne dieses Glas eine Ablesung α + [1] gemacht haben, oder es ist + [1] die Blendungscorrection für das fragliche Glas.

Es wurde eine Indexbestimmung durch Sonnenbeobachtung nach S. 170 gemacht am 14. Juli 1883 mit Ocularblendung und dann mit Vorschieben der Gläser [1] und (1)

	mit Ocularblendung		mit [1] und (1)	
	0° 37′ 20″	359° 33′ 40″	0° 37′ 20″	359° 34′ 10″
	37 10	33 40	37 20	34 10
	37 0	34 0	37 20	34 0
	36 30	33 30	37 20	34 0
	37 10	33 50	37 30	34 0
Mittel	0° 37′ 2″	359° 33′ 44″	0° 37′ 22″	359° 34′ 4″

$2i = 10' \, 46''$ $\qquad 2i' = 11' \, 26''$

$i = 5 \;\; 23$ $\qquad i' = 5 \;\; 43$

$i - i' = -20''$

Um den Einfluss der Blendungen zu eliminiren, hat man also von jeder Ablesung den Werth 20″ zu subtrahiren, oder es ist nach den obigen Bezeichnungsfestsetzungen:

$$[1] + (1) = -20''$$

Fig. 1.
Blendung + [1].

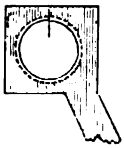
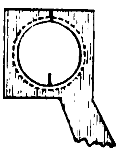


Fig. 2.
Blendung — [1].



Wenn man nun nichts weiter im Sinn hat, als beiläufig zu untersuchen, ob die Blendungsfehler gewisse Grenzen, z. B. 20″ oder 30″ nicht übersteigen, dann genügt diese Methode. Wenn man aber die einzelnen Fehler so genau als möglich bestimmen will, so muss man die vorstehende Untersuchung mit verschiedenen Combinationen der Gläser wiederholen. Dabei ist es besonders wichtig, die Blendungen in entgegengesetztem Sinne wirken zu lassen, zu welchem Zwecke man sie in ihren Fassungen umdreht. Auch wenn die Fassungen scharf angepresst sind, wird es doch gelingen, die Gläser vorsichtig zum Drehen zu bringen. Man macht dann an der Fassung und an dem Glase eine Marke, welche die Normalstellung bezeichnet; so sei in Fig. 1. die Correction = + [1], folglich in Fig. 2. die Correction = — [1]. Eine auf diese Weise erhaltene Bestimmung von [1] zeigt folgendes Beispiel:

Index durch Sonnenbeobachtung

mit (1) und + [1]	mit (1) und — [1]	Differenz
359° 33′ 40″	359° 32′ 40″	— 1′ 0″
0 37 0	0 36 40	— 0 20
359 33 40	359 33 0	— 0 40
0 37 0	0 36 30	— 0 30
359 33 40	359 33 0	— 0 40
	Mittel	— 0′ 38″
	Hälfte [1] =	— 0′ 19″

Die Vorschiebung von Fig. 1. vergrössert die Ablesung, die Vorschiebung von Fig. 2. verkleinert dieselbe, im Mittel um 19″, nach unserer Bezeichnungsfestsetzung ist also die Correction für Fig. 1.

$$[1] = -19''$$

Die 4fache Wiederholung dieser Reihe gab im Mittel — 20,2″.

Statt die Gläser in ihren Fassungen zu drehen (Fig. 1. und Fig. 2.), kann man bei den neueren Reflexionsinstrumenten die Fassungen sammt

den Gläsern um verticale Achsen drehen, was in bequemerer Weise die gleiche Wirkung gibt.

Es ist nicht immer leicht, die nöthigen Gläsercombinationen zu erhalten, weil nur nahezu gleich starke Gläser zusammen gebraucht werden können. Ich habe daher das grüne Glas mit Lampenruss geschwärzt, um es mit einem starkrothen Glas zusammen nehmen zu können. Ferner war es möglich, (1) dunkelroth mit [2] und [3] (hellroth und grün) zusammenzunehmen, auch liefert der wechselnde Beleuchtungszustand des Himmels, hochstehende und untergehende Sonne, verbunden mit der Helligkeitsregulirung durch hoch- und tiefgeschraubtes Fernrohr, wohl die Möglichkeit, nach und nach alle nöthigen Combinationen zu erhalten. In dieser Weise habe ich für den Sextanten von S. 157 die Blendungscorrectionen zweimal unabhängig durch Reihen von sehr vielen Ablesungen bestimmt, mit folgenden Resultaten:

Jahr 1874:	[1] = − 24,1″		[3] = + 10,0″	(1) = + 3,0″	
„ 1883:	[1] = − 20,2	[2] = + 5,5″	[3] = + 13,2″	(1) = + 2,8	(2) = + 0,7″
Mittel	[1] = − 22″	[2] = + 6″	[3] = + 12″	(1) = + 3″	(2) = + 1″

Die Blendungscorrectionen dürften hiernach wohl auf etwa 1″—2″ sicher sein.

Die Anwendung zeigen zwei Beispiele:

Am 11. März 1874 Vorm. wurde in der Oase Farafrah die Monddistanz 79° 37′ 50″ gemessen, mit dem starkrothen Glas vor dem grossen Spiegel. Die Indexcorrection mit Ocularblendung ergab sich = − 6′ 53″. Wegen Blendung kommt noch die Correction [1] = − 22″ hinzu, also die für Index und Blendung corrigirte Distanz

$$= 79^\circ\ 37'\ 50'' - 6'\ 53'' - 22'' = 79^\circ\ 30'\ 35''.$$

Ein Beispiel mit 4 Blendungen ist dieses: Am 15. Juli 1883 Nachm. wurde in Niendorf die Sonnen-Monddistanz gemessen = 127° 39′ 30″, mit grünem Glas [3] vor der Sonne am grossen Spiegel. Der Index wurde bestimmt vor der Distanzmessung = 5′ 40″ mit beiden rothen Blendungen [1] und (1), dagegen nach der Distanz = 4′ 47″ mit hellroth (2) und grün [3], weil inzwischen die Sonne tiefer gesunken war, und die starken Blendungen nicht mehr ertragen konnte. Nun hat man:

Index vorher		Distanz		Index nachher	
	+ 5′ 40″		127° 39′ 30″		+ 4′ 47″
[1] =	− 22	[3] =	+ 12	(2) =	+ 1
(1) =	+ 3		127° 39′ 42″	[3] =	+ 12
i =	+ 5′ 21″	Mittel − i =	− 5 10	i =	+ 5′ 0″
			127° 34′ 32″		

Statt [3] an der Distanz kann man auch − [3] am Index anbringen, d. h. $i = 5'\ 10'' - 12'' = 4'\ 58''$ also $D = 127^\circ\ 39'\ 30'' - 4'\ 58'' = 127^\circ\ 34'\ 32''$. Ein Glas, das etwa bei der Distanz und beim Index gleich vorkommt, fällt aus der Rechnung fort.

§ 33. Der Schärfungswinkel des Sextanten.

Der Winkel β, welchen die Fernrohrachse mit der Normalen des kleinen Spiegels bildet, ist für manche Sextantenuntersuchung von Wichtigkeit.

Zunächst ist ersichtlich, dass β klein sein muss, wenn man grosse Winkel mit dem Sextanten messen will. Der Winkel γ in Fig. 1. und Gl. (1) § 28. S. 155 muss offenbar kleiner als 90° bleiben, und setzt man für den Grenzfall $\gamma = 90^0$, so ist der Grenzfall des noch messbaren Winkels α nach Gleichung (1) § 28. S. 155

$$\alpha_{max} = 180^0 - 2\beta \tag{1}$$

Aus constructiven Gründen kann man β nicht wohl kleiner als 14° machen, wonach $\alpha_{max} = 152^0$ wäre, was aber in Wirklichkeit auf etwa 140° sich beschränkt.

Man nennt einen Sextanten „scharf" oder „stumpf" construirt, je nachdem β klein oder gross ist, und entsprechend nennen wir β den „Schärfungswinkel" des Sextanten. Wenn die verschiedenen Constructiontheile, das Fernrohr und die Spiegel, keine Dicke oder Breite hätten, so könnte man einen idealen Sextanten mit $\beta = 0$ construiren.

Auf etwa 1° genau kann man den Winkel β (oder besser $90^0 - \beta$) am Instrumente mechanisch abmessen. Zur genaueren Bestimmung von β und damit verwandten Untersuchungen übergehend, fassen wir zunächst den Winkel φ ins Auge, welchen die Ebene des grossen Spiegels mit der Fernrohrachse bildet. Nach Fig. 1. § 28. S. 155 ist

$$\varphi + 2\beta + (90^0 - \gamma) = 180^0$$

$$\text{also } \varphi = 90^0 + \gamma - 2\beta$$

Es ist aber immer $\gamma = \beta + \frac{\alpha}{2}$

$$\text{also } \varphi = 90^0 - \beta + \frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

oder, indem wir den Winkel α, welcher $\varphi = 90^0$ entspricht, mit α_0 bezeichnen, haben wir:

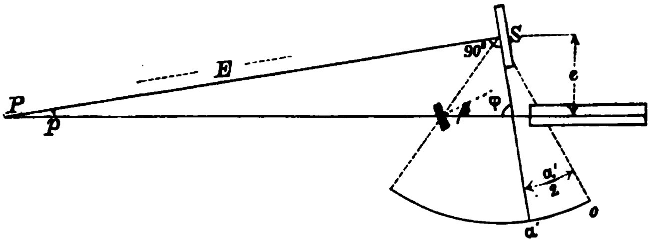
$$\beta = \frac{\alpha_0}{2} \text{ oder } \alpha_0 = 2\beta \tag{3}$$

d. h. in Worten: Wenn der grosse Spiegel rechtwinklig zum Fernrohr steht, so liest man an der Alhidade den doppelten Schärfungswinkel ab (vorbehältlich Indexcorrection).

Ein diesem Falle verwandter Fall, bei welchem φ zwar nicht $= 90^0$, aber nahezu $= 90^0$ ist, ist in Fig. 1. (S. 175) gezeichnet. Ein Punkt P liegt in der Fernrohrachse, und seine Verbinduugslinie PS mit der Mitte

des grossen Spiegels steht rechtwinklig auf diesem grossen Spiegel, so dass also der Punkt P sich im grossen Spiegel in sich selbst reflectirt. Ist p

Fig. 1. Bestimmung des Schärfungswinkels β.



die Parallaxe des Punktes P in Bezug auf den Abstand e der Spiegelmitte vom Fernrohr, so ist

$$\varphi = 90^0 - p$$

was in Verbindung mit (2) für α' in Fig. 1. gibt:

$$\varphi = 90^0 - p = 90^0 - \beta + \frac{\alpha'}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha'}{2} + p = \frac{\alpha'}{2} + \frac{e}{E}\,\varrho \qquad (4)$$

wo mit α' die Ablesung am Sextanten bezeichnet ist, welche dem fraglichen Falle entspricht.

Mit $E = \infty$ geht (4) in (3) über.

Bei unserem Instrument ist $e = 0{,}037^m$ und gibt für $E = 1^m$ die Parallaxe $p = 127' = 2^0\ 7'$, für $E = 2^m$, $p = 1^0\ 4'$ etc. Mit $E = 2^m$ wurde ein Versuch nach Fig. 1. gemacht, wobei P durch einen verticalen Signalstab von 5 mm Dicke dargestellt war. Nachdem das Fernrohr auf P eingestellt ist, lässt man durch einen Gehülfen die Alhidade so lange in der Gegend von 25° bis 35° drehen, bis das beobachtende Auge in P das Spiegelbild von P in der Mitte des grossen Spiegels sieht. Es ergab sich die Ablesung 30° 3′ — 5′ Index = 29° 58′, also nach (4) wegen $E = 2^m$

$$\beta = 14^0\ 59' + 1^0\ 4' = 16^0\ 3' \qquad (5)$$

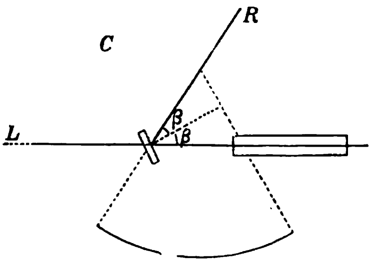
Man kann sich zu dieser Untersuchung auch eines in P aufgestellten Hülfsfernrohrs bedienen.

Eine zweite Methode, den Schärfungswinkel β zu bestimmen, besteht (nach dem „Handbuch der nautischen Instrumente" S. 302) darin, dass man das einfach reflectirte Bild eines Punktes R (Fig. 2. S. 176) im kleinen Spiegel aufsucht, und die zugehörige Fernrohrvisur L irgendwie vorwärts markirt, worauf man den Winkel $LR = 180^0 - 2\beta$ misst und zwar,

weil dieser Winkel für den Sextanten zu gross ist, durch Einschaltung eines beliebigen Punktes C, d. h. man hat die Summe $LC + CR = 180^0 - 2\beta$ zu messen.

Um dieses einfach reflectirte Bild von R im kleinen Spiegel zu sehen, muss man den grossen Spiegel ausser Thätigkeit setzen, d. h. die Alhidade ganz auf die Grenze bei 140° hinausdrehen; reicht auch dieses nicht aus, so müsste man den grossen Spiegel gänzlich abschrauben. Wenn letzteres nicht nöthig wird, ist diese Methode der Bestimmung von β sehr bequem, wenn aber Abschrauben des grossen Spiegels erfordert würde, um das Reflexbild von R überhaupt zu sehen, so wird man die Methode nicht gerne anwenden.

Fig. 2. Bestimmung des Schärfungswinkels β.



Bei Reflexions-Vollkreisen, bei welchen die Limbustheilung von 0° auch rückwärts geht, und die Alhidade auch rückwärts gedreht werden kann, werden wir noch ein weiteres vorzügliches Mittel zur Bestimmung von β in der Beobachtung des dreifach reflectirten Fadenbildes kennen lernen. (§ 44.)

§ 34. Directe Messung der Fernrohrneigung und der Spiegelneigungen bei Reflexionsinstrumenten.

Nachdem wir bereits in § 31. die summarische Untersuchung der Neigungen der Fernrohrachse und der Spiegelnormalen gegen die Sextantenebene behandelt haben, gehen wir nun näher auf diese Neigungen ein, und suchen sie zahlenmässig zu bestimmen. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten nicht blos für den Sextanten, sondern auch für andere Reflexionsinstrumente.

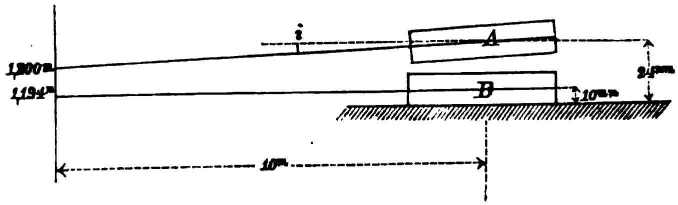
Neigung der Fernrohrachse gegen die Sextantenebene.

Wenn man mit den auf S. 167—168 angegebenen einfachen Hülfsmitteln die Parallelität der Fernrohrvisur mit der Sextantenebene prüft, so kann man im Falle einer gefundenen Nichtparallelität wohl auch deren Betrag in Zahlen bestimmen.

Statt über die Sextantenebene unmittelbar oder durch aufgesetzte Diopter zu visiren, kann man auch das Fernrohr selbst, sofern es auf genügende Länge, ohne störende Ringe etc., cylindrisch gearbeitet ist, unmittelbar lose auf die (mittelst Dosenlibelle horizontal gestellte) Sextantenebene auflegen.

Fig. 1. skizzirt einen solchen Versuch, wobei die links geschriebenen Zahlen 1,200 m und 1,194 m die Ablesungen an einer 10 m entfernten Latte andeuten.

Fig. 1. Fernrohrneigung i.



	A Fernrohr angeschraubt	*B* Fernrohr aufgelegt und um seine Achse gedreht.	
Oberfaden	1,059 m	1,050 m	1,056 m
Unterfaden	1,341	1,333	1,338
Mittel	1,200 m	1,194	

Differenz 0,006 m

Das eingeschraubte Fernrohr ist um 24 — 10 = 14 mm höher als das aufgelegte, es visirt aber nur um 6 mm höher, d. h. es visirt relativ um 8 mm zu tief, und man hat eine Fernrohrneigung

$$i = \frac{0{,}008}{10}\,\varrho = 8' \text{ nach vorne abwärts}$$

$$\text{oder } i = -\,8' \tag{1}$$

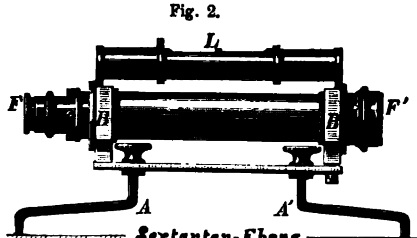
Aehnliche Resultate, wenige Minuten um Null schwankend, wurden durch Wiederholung gefunden, wir dürfen daher das Instrument in Bezug auf Parallelität des Fernrohrs mit der Sextantenebene als gut berichtigt annehmen.

In ähnlicher Weise wurde die Fernrohrneigung für einen Pistor-Martins'schen Reflexionskreis, mit dem wir uns später genauer beschäftigen werden, bestimmt:

$$i = -\,32' \tag{2}$$

Um die Bestimmung der Fernrohrneigung bei Reflexions-Instrumenten möglichst bequem und genau zu machen, haben wir das in Fig. 2. gezeichnete Instrumentchen, mit Benutzung der Bestandtheile eines kleinen Nivellirinstrumentes, anfertigen lassen, d. h. es war für das

Fig. 2.



Fernrohr F lediglich ein einfaches Gestell mit drei Fussspitzen A und A' (A endigt in zwei, A' in eine Spitze) herzustellen.

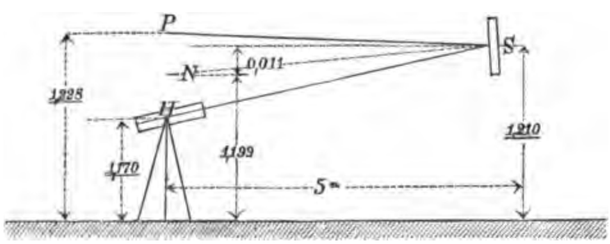
Die Libelle L braucht man zunächst überhaupt nicht. Man wird das Fadenkreuz des Fernrohrs durch Umdrehen des Rohrs in seinen Lagerringen B centiren, und kann dann eine der Sextantenebene parallele Visur erhalten als Mittel der beiden mit vertauschten A und A' erhaltenen Ablesungen.

Die Stützen A und A' lassen sich für verschiedene Formen der Unterlagsebene verschieden eng und weit stellen, und wenn man eine solche Stellung längere Zeit beibehalten kann, und an den Stützen A oder A' eine Höhen-Correctionsvorrichtung hat, so empfiehlt es sich, um sofort durch eine Visur (ohne Umsetzen von A und A') die Untersuchung zu beenden, die Fernrohrachse der Unterlagsebene parallel zu machen. Hiezu kann man am bequemsten die Aufsatzlibelle L benutzen, indem man das Ganze auf einem Lagebrett durch Umsetzen richtig stellt.

Neigung des grossen Spiegels.

Bei einem Pistor-Martins'schen Reflexionskreis haben wir folgende durch Fig. 3. veranschaulichte Methode zur Bestimmung der Spiegelneigung

Fig. 3. Neigung der Spiegelnormalen N.



angewendet: Der Kreis wurde in S horizontal aufgestellt, und zwar die Ebene des Kreises in der Richtung nach H und P mittelst einer Röhrenlibelle. In H steht ein Hülfsfernrohr (Theodolit), mit welchem nach dem grossen Spiegel S des Reflexions-Instrumentes visirt wird. Der Spiegel S wird durch einige Versuche quer zur Richtung SH gestellt, so dass man im Fernrohr H einen Punkt P reflectirt sieht, welcher entweder über oder unter H liegen wird. Um die Höhe von P über H, und überhaupt alle erforderlichen Höhenverhältnisse zu erhalten, wurden mittelst eines seitlich aufgestellten Nivellirinstrumentes die in Fig. 3. eingeschriebenen Höhen 1,228 m, 1,170 m, 1,210 m über einer gemeinsamen Horizontalen gemessen. (Der Reflexpunkt P ist im Fernrohr H an einer neben dem Objectiv von H aufgestellten Nivellirlatte unmittelbar abgelesen.) Man hat also:

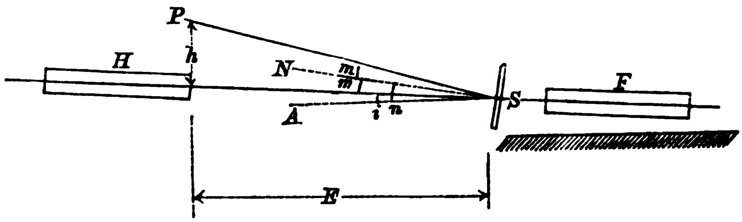
$$\text{Höhe } HP = 1{,}228 \text{ m} - 1{,}170 \text{ m} = 0{,}058 \text{ m}$$

und die Mittellinie SN, d. h. die Spiegelnormale hat die Höhe 1,170 $+ \frac{0,058}{2} = 1,199$ m über dem Vergleichshorizont, d. h. $1,210 - 1,199 = 0,011$ m unter S. Da die Kreisebene in S horizontal gestellt war, haben wir also jetzt bei 5 m Entfernung die Spiegelneigung:

$$n = \frac{-0,011}{5}\,\varrho = -8' \tag{3}$$

Eine relative Bestimmung der Neigung der Spiegelnormalen gegen die Fernrohrachse erhält man auf folgende Weise (Fig. 4.): Der Sextant

Fig. 4.
Fernrohrneigung = i
Spiegelneigung = $m + i = n$



mit seinem Fernrohr F und seinem grossen Spiegel S wird nebst einem Hülfsfernrohr H in der Lage aufgestellt, welche bereits in Fig. 1. § 33. S. 175 zum Zweck der Bestimmung des Schärfungswinkels β angegeben worden ist.

Nachdem der Sextant auf einem Stativ mit einer Dosenlibelle beiläufig horizontal gestellt ist, wird sein Fernrohr F mit dem Hülfsfernrohr H (Theodolit) gegenseitig eingerichtet. Dann wird das Fernrohr H durch eine kleine Horizontaldrehung auf den grossen Spiegel des Sextanten gerichtet, wobei die Alhidade auf den Winkel $\alpha' = 2(\beta - p)$ (vgl. (4) § 33. S. 175) eingestellt sein muss. Wenn dieses alles richtig gestellt ist, so wird man beim Herausschrauben des Oculars des Fernrohrs H (Einstellen auf die doppelte Entfernung E) als Reflexbild in dem Spiegel S entweder das Objectiv von H oder einen anderen darüber oder darunter liegenden Punkt P sehen, welcher über der Mitte von H die Höhe h habe. Dann ist der Winkel m:

$$m = \frac{h}{2E}\,\varrho \tag{4}$$

Ein solcher Versuch mit unserem Sextanten gab:

$$h = 10,0 \text{ cm, wobei } E = 10 \text{ m war,}$$

es ist also

$$m = \frac{0,05}{10}\,\varrho' = 17' \tag{5}$$

ein Resultat, welches durch einige ähnliche Versuche innerhalb einiger Minuten bestätigt wurde.

Dieser Winkel m ist nun nicht der Winkel zwischen der Normalen des grossen Spiegels und der Sextantenebene, sondern der Winkel zwischen dieser Spiegelnormalen und der Fernrohrachse; nachdem aber die Fernrohrneigung i bereits bestimmt ist, hat man nun auch die reine Spiegelneigung

$$n = m + i$$

d. h. nach (5) und (1) hat man für unseren Fall:

$$n = 17' - 3' = + 14' \tag{6}$$

§ 35. Geneigter Spiegel und geneigte Lichtstrahlen.

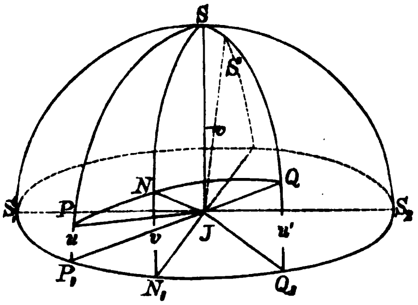
Als Vorbereitung der Fehlertheorie des Sextanten, in Bezug auf die Neigungen der Spiegel und der Fernrohrachse, betrachten wir in Fig. 1. den Weg eines Lichtstrahls, welcher unter einem kleinen Winkel u gegen die Sextantenebene geneigt, auf einen Spiegel trifft, welcher selbst um den kleinen Winkel v gegen die Normallage geneigt ist.

Es ist zunächst für ein fehlerfrei angenommenes Instrument

$S_1 N_0 S_2$ die Sextantenebene,
$S_1 S S_2$ die Ebene eines darauf rechtwinkligen Spiegels, und
$J N_0$ die in der Sextantenebene liegende Spiegelnormale.

Nun soll aber der Spiegel rückwärts nach S' geneigt werden, wodurch die Spiegelnormale $J N_0$ nach $J N$ gehoben wird, dabei kommt die Spiegelneigung v als Bogen $S S'$ oder als $N_0 N$ zur Anschauung. Ferner treffe ein Lichtstrahl $P J$ mit einer Neigung u auf den geneigten Spiegel, und werde von demselben nach Q reflectirt. Dann liegen nach dem Reflexionsgesetze JP und JQ in einer Ebene mit der Spiegelnormalen $J N$, weshalb in unserer Hülfskugel Fig. 1. PNQ ein grösster Kreisbogen sein muss, auf welchem $PN = NQ$ ist.

Fig. 1.
Spiegelneigung = v
Strahlenneigungen = u und u'



Es interessirt uns nun, zu wissen:

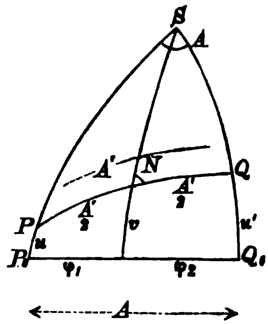
1) Welche Differenz zwischen dem Bogen PQ und seiner Projection $P_0 Q_0$ besteht.

2) Unter welcher Neigung u' der Strahl JQ austritt.

3) Welche Differenz zwischen $P_0 N_0$ und $N_0 Q_0$ besteht, denn es ist zwar $PN = NQ$, aber die Projectionen $P_0 N_0$ und $N_0 Q_0$ sind im Allgemeinen einander nicht gleich.

Zur Beantwortung dieser drei Fragen zeichnen wir in Fig. 2. die in Betracht kommenden Theile von Fig. 1. nochmals besonders heraus, und fügen die Bezeichnungen A A' φ_1 φ_2 bei. Nun ist zuerst:

Fig. 2. Mitteltheil von Fig. 1.



$$\cos PQ = \cos A' = \cos(90^0 - u)\cos(90^0 - u') + \sin(90^0 - u)\sin(90^0 - u')\cos A$$
$$\cos A' = \sin u \sin u' + \cos u \cos u' \cos A$$

bis zur zweiten Potenz entwickelt:

$$\cos A' = uu' + \left(1 - \frac{u^2 + u'^2}{2}\right)\cos A$$
$$\cos A' - \cos A = uu' - \frac{u^2 + u'^2}{2}\cos A$$

Andererseits ist genähert:

$$\cos A' - \cos A = (A - A')\sin A, \text{ also}$$
$$A - A' = \frac{uu'}{\sin A} - \frac{u^2 + u'^2}{2}\operatorname{cotg} A \qquad (1)$$

worin rechts auch A' statt A gesetzt werden darf.

Diese Formel (1) lässt sich auch noch weiter umformen,

$$\begin{aligned}(u + u')^2 &= u^2 + 2uu' + u'^2\\ (u - u')^2 &= u^2 - 2uu' + u'^2\\ \hline 2(u^2 + u'^2) &= (u + u')^2 + (u - u')^2\\ 4uu' &= (u + u')^2 - (u - u')^2\end{aligned}$$

Dieses in (1) eingesetzt gibt:

$$A - A' = \frac{1}{4\sin A}\left\{(u + u')^2 - (u - u')^2 - (u + u')^2\cos A - (u - u')^2\cos A\right\}$$
$$A - A' = \frac{1}{4\sin A}\left\{(u + u'^2)(1 - \cos A) - (u - u')^2(1 + \cos A)\right\}$$

Wegen $1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$, $1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$, $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

geht dieses über in:

$$A - A' = \left(\frac{u + u'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{A}{2} - \left(\frac{u - u'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \qquad (2)$$

worin rechtseitig auch A' statt A gesetzt werden darf.

Die Formel (2) enthält dieselben Beziehungen wie die bekannte Reduction eines schiefgemessenen Winkels auf den Horizont, welche wir in § 40. behandeln werden.

Um zu der Beziehung zwischen u und u' zu gelangen, nehmen wir nochmals den Cosinussatz mit Fig. 2.:

$$\cos(90^0 - u) = \cos(90^0 - v)\cos\frac{A'}{2} + \sin(90^0 - v)\sin\frac{A'}{2}\sin N$$

wenn mit N der Winkel am Punkt N bezeichnet wird, also:

$$\sin u = \sin v \cos\frac{A'}{2} + \cos v \sin\frac{A'}{2}\cos N$$

Macht man dieselbe Rechnung für den rechtseitigen Theil von Fig. 2., so geht u in u' und N in $180^0 - N$ über, also:

$$\sin u' = \sin v \cos\frac{A'}{2} - \cos v \sin\frac{A'}{2}\cos N$$

woraus in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$\sin u + \sin u' = 2\sin v \cos\frac{A'}{2}$$

oder, da u, u' und v sehr klein sind:

$$u + u' = 2\,v\cos\frac{A'}{2} \tag{3}$$

Zur Beantwortung der dritten Frage, betreffend die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ wenden wir die Formel (1) auf den linkseitigen und auf den rechtseitigen Theil von Fig. 2. getrennt an, und erhalten:

$$\varphi_1 - \frac{A'}{2} = \frac{u\,v}{\sin\varphi_1} - \frac{u^2 + v^2}{2}\,cotg\,\varphi_1$$

$$\varphi_2 - \frac{A'}{2} = \frac{u'\,v}{\sin\varphi_2} - \frac{u'^2 + v^2}{2}\,cotg\,\varphi_2$$

Man kann hier, ebenso wie bei (1) und (2), rechts statt φ_1 und φ_2 auch $\frac{A'}{2}$ setzen oder auch schlechthin einen Mittelwerth φ annehmen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{(u - u')\,v}{\sin\varphi} - \frac{u^2 - u'^2}{2}\,cotg\,\varphi$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{u - u'}{\sin\varphi}\left(v - \frac{u + u'}{2}\cos\varphi\right) \tag{4}$$

Nun sind aber u v u' durch die Gleichung (3) verbunden, was wir dazu benutzen, um u' zu eliminiren, (3) gibt für uns:

$$u + u' = 2v\cos\varphi \qquad u' = -u + 2v\cos\varphi$$

also

$$u - u' = 2\,(u - v\cos\varphi)$$

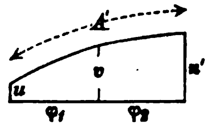
Die Einsetzung in (4) gibt:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\,(u - v\cos\varphi)}{\sin\varphi}\,(v - v\cos^2\varphi)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2v\sin\varphi\,(u - v\cos\varphi) \tag{5}$$

Zur Veranschaulichung der Resultate (3) und (5) ist Fig. 3. gezeichnet.

Fig. 3. (zu S. 182.)
Spiegelneigung = v.
Strahlenneigungen = u und u'.



Als einfachsten Fall der Formel (3) betrachten wir $A' = 0$, dieses gibt:

$$u + u' = 2v \quad \text{oder} \quad \frac{u + u'}{2} = v$$

d. h. eine Beziehung, deren Richtigkeit unmittelbar eingesehen wird

§ 36. Fehlertheorie der Fernrohr- und Spiegelneigungen des Sextanten.

Wenn die Fernrohrachse parallel der Sextantenebene ist, und die beiden Spiegel rechtwinklig zur Sextantenebene sind, so bleiben alle bei Messungen in Betracht kommenden Lichtstrahlen parallel der Sextantenebene; oder da es sich nur um Richtungen handelt, kann man sagen: alle Strahlen bleiben in einer durch die Fernrohrmitte parallel zur physischen Sextantenebene gelegten Messungsebene, welche wir für unsere Theorie die wahre Sextantenebene nennen wollen.

Wenn dagegen jene Voraussetzungen nicht erfüllt sind, so treten die Messungsstrahlen aus dieser Sextantenebene heraus und alle Winkel dieser Strahlen ändern sich.

Die drei Formeln (2), (3) und (5) des vorigen § 35. (S. 181—182) geben vollständigen Aufschluss über den Weg des dort betrachteten Lichtstrahls PQ, und da der Weg eines Lichtstrahls bei der Sextantenmessung nichts anderes ist als die zweifache Reflexion von derselben Art wie bei PQ, so können wir jetzt zur Sextantenfehlertheorie übergehen.

In Fig. 1. (welche im Wesentlichen dieselben Bezeichnungen enthält, wie die Sextantenfigur S. 155) bedeutet S den grossen Spiegel, s den kleinen Spiegel, F das Fernrohr, L und R sind die Strahlen nach dem linken und rechten Zielpunkt, N und N' sind die Normalen des grossen und des kleinen Spiegels.

Wenn ein Winkel α zwischen L und R gemessen wird, so macht R den Weg $RSsF$ und fällt im letzten Theil mit Ls zusammen. Da es uns nur auf die Richtungen ankommt, denken wir uns alle Strahlen mit sich selbst parallel in einen Punkt verlegt, und zwar in die Mitte des grossen Spiegels S, in welcher ohnehin schon die Mehrzahl der Linien sich schneidet. Es wird also sL nach $S(L)$ und sN' nach $S(N')$ verlegt, dabei bleiben auch die Neigungen gegen die Sextantenebene ungeändert. Diese in Fig. 1. durch Pfeile bezeichneten Neigungen sind: a b und i die Neigungen der Lichtstrahlen, n und n' die Neigungen der Normalen der beiden Spiegel. Der Pfeil soll jeweils die Neigung der Geraden von der Sextantenebene aufwärts bezeichnen.

Fig. 2. ist eine Veranschaulichung der Neigungsverhältnisse von derselben Art wie in § 35. $R_0 B_0$ ist die Sextantenebene und $RB(L)$ der Weg des von R herkommenden Lichtstrahls bis zum Zusammenfallen mit dem Strahle von L bezw. (L). $R(L) = \alpha'$ in Fig. 2. ist der Winkel, welchen die Strahlen SR und sL bezw. $S(L)$ von Fig. 1. im Raume bilden, d. h. $R(L) = \alpha'$ ist der Winkel, welchen man messen will. Auf der Sextantentheilung wird ein Winkel $\frac{\alpha}{2}$ abgelesen (oder wegen Verdopplung der Bezifferung sofort α), welcher in Fig. 2. als der Winkel zwischen den Projectionen N_0 und (N_0') der beiden Spiegelnormalen erscheint.

Fig. 1.

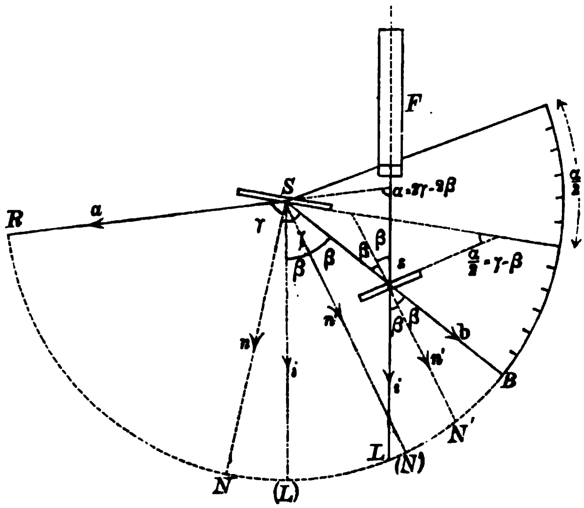
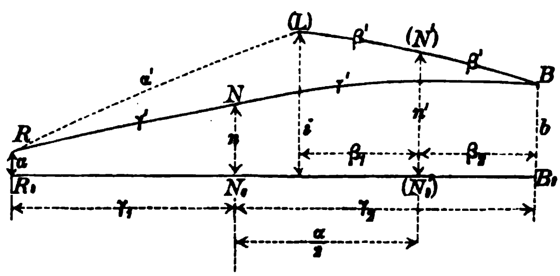


Fig. 2.



Die Normale N' des kleinen Spiegels ist vom Spiegel nach rückwärts gerichtet eingeführt, weil dadurch die Figur 2. übersichtlicher wird. Dieses ist bei der späteren Untersuchung der Beziehung zwischen n und n' zu beachten.

Wir haben also erkannt, dass der Sextantenmessungsfehler $\alpha - \alpha'$ aus Figur 2. erhalten werden muss, wenn man nur unsere Vorbereitungsformeln (2) (3) (5) § 35. S. 180—181 zur Verfolgung der verschiedenen Strahlenwege anwendet.

Aus Fig. 2. hat man:

$$\frac{\alpha}{2} = \gamma_2 - \beta_2, \qquad \alpha = 2\,\gamma_2 - 2\,\beta_2 \tag{1}$$

Die Projection von α' ist: $(\gamma_2 + \gamma_1) - (\beta_2 + \beta_1)$, die begrenzenden Neigungen sind a und i, also nach dem Projectionssatz (2) S. 180:

$$(\gamma_2 + \gamma_1) - (\beta_2 + \beta_1) - \alpha' = \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 tang\,\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 cotg\,\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) bildet man $(\alpha - \alpha')$:

$$(\alpha - \alpha') = (\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) + \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 tang\,\frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 cotg\,\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Nach (5) § 35. S. 182 ist:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\,n \sin\gamma\,(a - n\cos\gamma) \tag{4}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\,n' \sin\beta\,(i - n'\cos\beta) \tag{5}$$

und durch doppelte Anwendung von (3) S. 182 kann man a eliminiren:

$$a + b = 2\,n\cos\gamma$$
$$i + b = 2\,n'\cos\beta$$

$$a = i + 2\,n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta = i + 2\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{6}$$

Indem man diesen Werth a in (4) einsetzt, hat man:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\,n\sin\gamma\,(i + n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta) \tag{7}$$

Hiezu das Frühere (4) und (5), gibt den ersten Theil von (3):

$$(\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) = 2\,n'\sin\beta\,(i - n'\cos\beta) - 2\,n\sin\gamma\,(i + n\cos\gamma - 2\,n'\cos\beta)$$
$$(\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) = 2(i - n'\cos\beta)(n'\sin\beta - n\sin\gamma) - 2n\sin\gamma(n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{8}$$

Mittelst (6) kann man auch die zwei letzten Glieder von (3) bilden, nämlich:

$$\frac{a+i}{2} = i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{9}$$

$$\frac{a-i}{2} = (n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{10}$$

Jetzt hat man alle Bestandtheile von (3), setzt man daher (8) nebst (9) und (10) in (3), so hat man das Resultat:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha' = 2(i - n' \cos\beta)(n' \sin\beta - n \sin\gamma) - 2n \sin\gamma\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta) \\ \quad + \Big(i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta)\Big)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \Big(n\cos\gamma - n'\cos\beta\Big)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} (11)$$

Die Spiegelneigungen n und n' sind bis jetzt verschieden eingeführt worden, wir wissen aber von § 31. S. 168, dass, wenn man mit dem Sextanten überhaupt messen will, für die Nullstellung der Alhidade beide Spiegel parallel sein müssen. Wir setzen daher jetzt in (11) $n' = n$, wozu übrigens nicht blos die sachliche Betrachtung, sondern auch die Formel (11) selbst auffordert. Setzt man nämlich $\alpha = 0$, so ist nach Fig. 1. $\alpha = 2\gamma - 2\beta = 0$, also $\gamma = \beta$ womit (11) gibt:

$$\begin{array}{r} [\alpha - \alpha']_0 = 2(i - n'\cos\beta)\sin\beta\,(n' - n) - 2n\sin\beta\cos\beta\,(n - n') \\ - 2\cos^2\beta\,(n - n')^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \end{array}$$

dieses kann nur verschwinden, wenn $n' = n$ ist (im letzten Glied wird zwar mit $\alpha = 0$, $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \infty$, aber $(n - n')^2 = 0 \times 0$, also das Ganze doch wieder $= 0$).

Indem wir also $n' = n$ in (11) einsetzen, erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha' = 2n(i - n\cos\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) - 2n^2 \sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta) \\ \quad + \Big(i + n(\cos\gamma - \cos\beta)\Big)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - n^2\Big(\cos\gamma - \cos\beta\Big)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} (12)$$

Wenn man nach Potenzen von i und n ordnet, so erhält man:

$$\begin{array}{l} \alpha - \alpha' = i^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + 2in\Big((\sin\beta - \sin\gamma) + (\cos\gamma - \cos\beta)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\Big) \\ \quad + n^2\Big(-2\cos\beta\,(\sin\beta - \sin\gamma) - 2\sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta) \\ \qquad + (\cos\gamma - \cos\beta)^2 (\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2})\Big) \end{array}$$

und wenn man die Funktionen von α anders zusammenfasst:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha' = i^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \dfrac{2in}{\cos\frac{\alpha}{2}}\Big(\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\gamma - \sin\beta) + \sin\frac{\alpha}{2}(\cos\beta - \cos\gamma)\Big) \\ \quad + \dfrac{2n^2}{\sin\alpha}\Big(\sin\alpha\cos\beta\,(\sin\gamma - \sin\beta) + \sin\alpha\sin\gamma\,(\cos\beta - \cos\gamma) \\ \qquad - \cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\gamma)^2\Big) \end{array}\right\} (13)$$

Hier kommt noch der Reflexionswinkel γ des grossen Spiegels vor, welcher mittelst der Beziehung zu α und γ eliminirt werden muss, nämlich nach Fig. 1.:

$$\alpha = 2\gamma - 2\beta \qquad \gamma = \frac{\alpha}{2} + \beta \tag{14}$$

$$\frac{\gamma+\beta}{2} = \beta + \frac{\alpha}{4} \qquad \frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{\alpha}{4} \tag{15}$$

$$\sin\gamma - \sin\beta = 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) \tag{16}$$

$$\cos\beta - \cos\gamma = 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) \tag{17}$$

es empfiehlt sich auch, β und γ selbst in (15) auszudrücken, d. h. zu setzen:

$$\beta = \left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) - \frac{\alpha}{4} \qquad \gamma = \left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) + \frac{\alpha}{4}$$

also:

$$\cos\beta = \cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4} \tag{18}$$

$$\sin\gamma = \sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{4} + \cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4} \tag{19}$$

ferner

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2} \tag{20}$$

Setzt man nun (16) bis (20) in (13), so ergeben sich in dem Glied mit n^2 einige Zusammenziehungen, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' = i^2 \tan\frac{\alpha}{2} - \frac{4\,i n}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\right) \\ + \frac{8n^2}{\sin\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\right. \\ \left. - \cos\alpha\,\sin^2\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In der Klammer von n^2 lassen sich das erste und das letzte Glied so zusammensetzen:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4} - \cos\alpha\sin^2\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)$$

Die beiden letzten Glieder geben mit dem Mittelglied der letzten Klammer von (21) ein volles Quadrat, nämlich das Quadrat von:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{4}\right)$$

und dieser Ausdruck, welcher auch im zweiten Glied von (21) vorkommt, hat die goniometrische Bedeutung

$$cos\left((\beta+\frac{\alpha}{4})-\frac{\alpha}{2}\right)=cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right),$$

der Ausdruck (21) ist also jetzt umgeformt in:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2\, tang\,\frac{\alpha}{2} - 4\,in\, sec\,\frac{\alpha}{2}\, sin\,\frac{\alpha}{4}\, cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ +8\,n^2\, cosec\,\alpha\, sin^2\frac{\alpha}{4}\left(cos\,\frac{\alpha}{2}+cos^2\,(\beta-\frac{\alpha}{4})\right)\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2\, tang\,\frac{\alpha}{2} - 2\,i\,n\, tang\,\frac{\alpha}{2}\, sec\,\frac{\alpha}{4}\, cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ +2\,n^2\, sec\,\frac{\alpha}{2}\, tang\,\frac{\alpha}{4}\left(cos\,\frac{\alpha}{2}+cos^2\,(\beta-\frac{\alpha}{4})\right)\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Diesen nach Potenzen von i und n geordneten Ausdruck kann man auch noch in folgende mehr geschlossene Form überführen:

$$\alpha-\alpha' = 2\,sec\,\frac{\alpha}{2}\; tang\,\frac{\alpha}{4}\left\{n^2\, cos\,\frac{\alpha}{2}+\left(n\, cos\,(\beta-\frac{\alpha}{4})-i\, cos\,\frac{\alpha}{4}\right)^2\right\}^{*)}\quad(24)$$

Dabei ist α' der wahre zu messende Winkel, α die Sextantenmessung, also $\alpha-\alpha'$ der Messungsfehler, i die Neigung der Fernrohrachse gegen die Sextantenebene und n die Neigung der Normalen beider Spiegel gegen die Sextantenebene (vgl. Fig. 1.).

Schon vor Einführung von Zahlenwerthen geben die Formeln (22) (23) und (24) Manches zu erkennen: Aus (24) geht wegen der quadratischen Formen hervor, dass der Fehler $\alpha-\alpha'$ stets positiv ist, d. h. dass der Sextant die Winkel unter allen Umständen zu gross misst. Das zweite Glied in (22) und (23) oder das letzte Glied (24) zeigt, dass es günstig ist, n und i mit gleichem Vorzeichen zu haben, das heisst aber (nach dem Anblick von Fig. 1., wo die Pfeile die Neigung von der Sextantenebene aufwärts bedeuten), es soll die Fernrohrachse möglichst rechtwinklig zu den Spiegelebenen stehen.

Zur Zusammenfassung der Coefficienten schreiben wir (23) in folgende Form:

$$\alpha-\alpha' = [1]\, i^2 + [2]\, i\,n + [3]\, n^2 \quad(25)$$

Wenn dabei $\alpha-\alpha'$ in Secunden, dagegen i und n in Minuten verstanden werden, so haben die Coefficienten folgende Bedeutungen:

$$[1] = \frac{60}{\varrho'}\, tang\,\frac{\alpha}{2} \qquad \left(log\,\frac{60}{\varrho'} = 8.24188\right)$$

$$[2] = -\frac{60}{\varrho'}\, 2\, tang\,\frac{\alpha}{2}\, sec\,\frac{\alpha}{4}\, cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$[3] = \frac{60}{\varrho'}\, 2\, sec\,\frac{\alpha}{2}\, tang\,\frac{\alpha}{4}\left(cos\,\frac{\alpha}{2}+cos^2\,(\beta-\frac{\alpha}{4})\right)$$

---

*) Diese Formel stimmt mit derjenigen überein, welche Encke im Berliner astron. Jahrbuch für 1830, Seite 292 (*B*) auf andere Weise zuerst abgeleitet hat.

Damit ist folgendes berechnet:

Coefficienten-Logarithmen der Formel (23) oder (25).

α	*log* [1]	*log* [2]				*log* [3]			
		$\beta = 0^0$	$\beta = 15^0$	$\beta = 20^0$	$\beta = 25^0$	$\beta = 0^0$	$\beta = 15^0$	$\beta = 20^0$	$\beta = 25^0$
10^0	7.1838	7.4849_n	7.4748_n	7.4647_n	7.4509_n	7.4844	7.4545	7.4647	7.4518
20	7.4882	7.7892_n	7.7842_n	7.7748_n	7.7639_n	7.8863	7.7826	7.7265	7.7628
30	7.6699	7.9710_n	7.9710_n	7.9643_n	7.9541_n	7.9672	7.9672	7.9605	7.9505
40	7.8029	8.1040_n	8.1090_n	8.1040_n	8.0956_n	8.0972	8.1023	8.0972	8.0587
50	7.9106	8.2116_n	8.2216_n	8.2183_n	8.2116_n	8.2008	8.2112	8.2077	8.2008
60	8.0033	8.3043_n	8.3194_n	8.3178_n	8.3128_n	8.2885	8.3043	8.3026	8.2973
70	8.0871	8.3881_n	8.4083_n	8.4083_n	8.4050_n	8.3584	8.3877	8.3877	8.3840
80^0	8.1657	8.4667_n	8.4921_n	8.4937_n	8.4921_n	8.4370	8.4648	8.4667	8.4648
90	8.2419	8.5429_n	8.5736_n	8.5769_n	8.5769_n	8.5040	8.5386	8.5424	8.5424
100	8.3181	8.6191_n	8.6552_n	8.6602_n	8.6618_n	8.5691	8.6110	8.6171	8.6191
110	8.3966	8.6977_n	8.7393_n	8.7460_n	8.7493_n	8.6344	8.6846	8.6930	8.6971
120	8.4804	8.7815_n	8.8289_n	8.8373_n	8.8423_n	8.7023	8.7616	8.7726	8.7793
130	8,5732	8.8742_n	8.9276_n	8.9378_n	8.9446_n	8.7757	8.8457	8.8597	8.8690
140^0	8.6808	8.9818_n	9.0415_n	9.0534_n		8.9597	8.9422	8.9596	
150	8.8138	9.1149_n	9.1810_n			8.9634	9.0612		
160	8.9956	9.2966_n				9.1081			
170	9.2999	9.6010_n				9.3645			
180	∞	∞				∞			

Der Grenzfall $\beta = 0^0$ ist nur zur Vergleichung beigezogen, die Coefficienten sind bis zur theoretischen Grenze $180^0 - 2\beta$ des messbaren Winkels α ausgerechnet.

Nun sind auch noch die wirklichen Fehlerwerthe $\alpha - \alpha'$ nach der Formel (23) oder (24) mit Benutzung der vorstehenden Coefficienten für verschiedene Werthe von α, i und n und für einen constanten Werth $\beta = 15^0$ ausgerechnet, und in den Tabellen auf S. 190 zusammengestellt worden.

Der Fehler $\alpha - \alpha'$ ist immer positiv, d. h. der an dem Sextanten abgelesene Winkel α ist immer zu gross.

Diese Tabellen auf S. 190 geben zu erkennen, dass die von den Spiegelneigungen und von der Fernrohrneigung herrührenden Sextantenfehler unter Umständen erheblich werden, und auch bei nahezu corregirtem Instrument den reinen Messungsfehler überschreiten, wenn der zu messende Winkel gross ist. Insbesondere wirken die Instrumentenfehler schädlich, wenn n und i ungleiches Zeichen haben, was schon ohne Rechnung aus den Formeln erkannt wurde.

Diesen Umstand und das rasche Wachsen bei grossem α zeigt eine zweite nach α geordnete Zusammenstellung; oben auf S. 192:

Fehler $\alpha - \alpha'$ der Sextantenmessung wegen Fernrohrneigung i und Spiegelneigung n,

berechnet nach der Formel (23) oder (24) bzw. (25). S. 188.

Gemessener Winkel $\alpha = 30^0$ $\beta = 15^0$

	$n = -30'$	$n = -20'$	$n = -10'$	$n = 0'$	$n = +10'$	$n = +20'$	$n = +30'$
$i = -30'$	4,1″	2,3″	2,3″	4,2″	7,9″	13,5″	21,0″
$i = -20$	4,6	1,8	0,9	1,9	4,7	9,3	15,8
$i = -10$	6,0	2,2	0,5	0,5	2,3	5,9	11,6
$i = 0$	8,3	3,7	0,9	0,0	0,9	3,7	8,3
$i = +10$	11,6	5,9	2,3	0,5	0,5	2,2	6,0
$i = +20$	15,8	9,3	4,7	1,9	0,9	1,8	4,6
$i = +30$	21,0	13,5	7,9	4,2	2,3	2,3	4,1

Gemessener Winkel $\alpha = 60^0$ $\beta = 15^0$

	$n = -30'$	$n = -20'$	$n = -10'$	$n = 0'$	$n = +10'$	$n = +20'$	$n = +30'$
$i = -30'$	8,4″	4,6″	4,8″	9,1″	17,3″	29,6″	46,0″
$i = -20$	9,6	3,7	1,9	4,0	10,2	20,4	34,7
$i = -10$	12,9	4,9	0,9	1,0	5,1	13,2	25,4
$i = 0$	18,1	8,1	2,0	0,0	2,0	8,1	18,1
$i = +10$	25,4	13,2	5,1	1,0	0,9	4,9	12,9
$i = +20$	34,7	20,4	10,2	4,0	1,9	3,7	9,6
$i = +30$	46,0	29,6	17,3	9,1	4,8	4,6	8,4

Gemessener Winkel $\alpha = 90^0$ $\beta = 15^0$

	$n = -30'$	$n = -20'$	$n = -10'$	$n = 0$	$n = +10'$	$n = +20'$	$n = +30'$
$i = -30'$	13,1″	7,1″	7,9″	15,7″	30,4″	52,0″	1′ 21″
$i = -20$	15,6	5,8	2,9	7,0	17,9	35,8	1 1
$i = -10$	21,6	8,1	1,5	1,7	8,9	23,1	44,1
$i = 0$	31,1	13,8	3,5	0,0	3,5	13,8	31,1
$i = +10$	44,1	23,1	8,9	1,7	1,5	8,1	21,6
$i = +20$	1′ 1	35,8	17,9	7,0	2,9	5,8	15,6
$i = +30$	1 21	52,0	30,4	15,7	7,9	7,1	13,1

Gemessener Winkel $\alpha = 120^0$ $\beta = 15^0$

	$n = -30'$	$n = -20'$	$n = -10'$	$n = 0$	$n = +10'$	$n = +20'$	$n = +30'$
$i = -30'$	18,5″	9,8″	12,7″	27,2″	53,2″	1′ 31″	2′ 20″
$i = -20$	23,6	8,2	4,4	12,1	31,4	1 2	1 45
$i = -10$	34,8	12,6	2,1	3,0	15,5	39,6	1 15
$i = 0$	52,0	23,1	5,8	0,0	5,8	23,1	52,0
$i = +10$	1′ 15	39,6	15,5	3,0	2,1	12,6	34,8
$i = +20$	1 45	1′ 2	31,4	12,1	4,4	8,2	23,6
$i = +30$	2 20	1 31	53,2	27,2	12,7	9,8	18,5

Gemessener Winkel α	Fehler der Sextantenmessung (a) $i = \pm 30'$, $n = \pm 30'$	(b) $i = \pm 30'$, $n = \mp 30'$	Mittel $\frac{(a) + (b)}{2}$
0°	0''	0''	0''
30	4,1	21,0	13
60	8,4	46,0	27
90	13,1	1' 21	47
120	18,5	2 20	1' 19

Die in der dritten Spalte stehenden Mittelwerthe haben zugleich die Bedeutung der mittleren Fehler für die Annahme, dass man über die Vorzeichen von n und i und insbesondere darüber, ob dieselben gleich oder entgegengesetzt sind, nichts weiss.

Um auch noch den Einfluss verschiedener Schärfungswinkel β zu untersuchen, berechnen wir den Fall $n = 30'$ und $i = 30'$ für 4 verschiedene Werthe von β, und finden folgende Fehlerwerthe $\alpha - \alpha'$:

α	$i = \pm 30'$ $n = \pm 30'$				α	$i = \pm 30'$ $n = \mp 30'$			
	$\beta = 0°$	$\beta = 15°$	$\beta = 20°$	$\beta = 25°$		$\beta = 0°$	$\beta = 15°$	$\beta = 20°$	$\beta = 25°$
0°	0,0''	0,0''	0,0''	0,0''	0°	0,0''	0,0''	0,0''	0,0''
30	4,1	4,1	4,1	4,1	30	21,0	21,0	20,7	20,3
60	8,4	8,4	8,4	8,4	60	44,7	46,0	45,8	45,4
90	13,0	13,1	13,1	13,1	90	1' 15,8	1' 20,5	1' 21,0	1' 21,1
120	18,1	18,5	18,6	18,8	120	2 7,0	2 19,9	2 22,4	2 23,9
150	24,1	26,7			150	4 18,6	4 58,8		

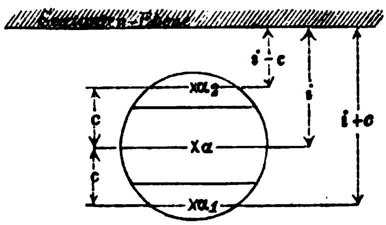
Die Aenderung von β hat, innerhalb der gewöhnlichen Grenzen, nur einen sehr geringen Einfluss auf die Genauigkeit. Immerhin erscheint es auch hier günstig, β möglichst klein zu machen, was mit der Bedingung, möglichst grosse Winkel α mit dem Sextanten zu messen, zusammentrifft. (Vgl. Fig. 1. S. 184 $\alpha = 2\gamma - 2\beta$, wo für γ der Grenzwerth $= 90°$ ist.)

§ 37. Indirecte Bestimmung der Fernrohr- und Spiegelneigung.

Nachdem der theoretische Zusammenhang zwischen den Neigungen n und i der Spiegel und des Fernrohrs mit dem gemessenen Winkel ermittelt ist, kann man durch Messungen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes, d. h. durch Aenderung der Neigung i, den Mittelwerth i und die Spiegelneigung n rückwärts berechnen.

Fig. 1. zeigt die Anordnung der Beobachtungen: In der Mitte des Gesichtsfeldes wird ein Winkel gemessen mit dem Resultat α, bringt man dann die beiden Bilder im unteren Segment des Gesichtsfeldes zur Deckung, so werde α_1 erhalten, und entsprechend oben α_2. Die Höhenlagen von α α_1 α_2 sind nur geschätzt, als Mitten der betreffenden Gesichtsfeldabschnitte. Zählt man die Neigung i von der Sextantenebene nach aufwärts, so hat man, nach der Annahme von Fig. 1. S. 184 die drei Neigungen $i - c$, i, $i + c$, im Ocular von Oben nach Unten zu zählen, wie in Fig. 1., welche den unmittelbaren Anblick im Fernrohr vorstellt, angegeben ist. Die Sextantenebene ist über das ganze Gesichtsfeld gelegt, damit alle drei Werthe $i - c$, i, $i + c$ in der Figur positiv erscheinen. Den Winkelabstand c zwischen je zwei Beobachtungsstellen kann man, wie den Fadenabstand selbst, entweder durch Visuren nach einer in bekannter Entfernung aufgestellten getheilten Latte, oder auch dadurch bestimmen, dass man, mit vertical gestellten Fäden, die beiden Bilder eines Zielpunktes an die Stellen von α_2 und α_1 bringt und dabei die Alhidade abliest. In unserem Falle fand sich so im Mittel die Ablesung $2^0\ 43' - 5'$ Index $= 2^0\ 38'$, also

Fig. 1. Gesichtsfeld des Sextantenfernrohrs.



$$c = 1^0\ 19' \tag{1}$$

Die Messungen α (bereits vom Indexfehler befreit) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Jeder Werth α_1 α α_2 ist das Mittel aus 8 Einzelablesungen. Als Zielpunkte dienten Kirchthürme, Kamine, Blitzableiter etc. der Stadt Hannover.

Nummer	unten α_1	mitten α	oben α_2	$\alpha_1 - \alpha = d_1$	$\alpha_2 - \alpha = d_2$
1.	53° 44′ 25″	53° 43′ 46″	53° 44′ 38″	+ 39″	+ 52″
2.	68 31 19	68 30 49	68 32 31	+ 30	+ 1′ 42
3.	90 17 35	90 16 49	90 18 52	+ 46	+ 2 3
4.	109 43 41	109 41 58	109 45 35	+ 1′ 43	+ 3 37
5.	120 38 33	120 37 9	120 41 33	+ 1 24	+ 4 24
6.	124 20 5	124 18 2	124 22 56	+ 2 3	+ 4 54
7.	132 5 22	132 3 11	132 8 42	+ 2 11	+ 5 31
8.	136 7 20	136 4 36	136 10 52	+ 2 44	+ 6 16

(2)

Nun hat man nach Gleichung (23) § 36. S. 188:

$$\alpha - \alpha' = n^2 (\ldots) + i^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2\, n\, i\, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \tag{3}$$

Der Coefficient (. . .) ist ohne Belang, weil das Glied mit n^2 in den Differenzen d fortfällt.

Diese Formel (3) gelte für die Mitte des Gesichtsfeldes, dann hat man für die Messungen α_1 unten und α_2 oben, nach Fig. 1.:

$$\alpha_1 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i+c)^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2n\,(i+c) \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (4)$$

$$\alpha_2 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i-c)^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2n\,(i-c) \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (5)$$

Subtrahirt man (3) von (4) und von (5), so erhält man:

$$\alpha_1 - \alpha = d_1 = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} + 2ic \, tang \frac{\alpha}{2} - 2nc \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (6)$$

$$\alpha_2 - \alpha = d_2 = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2ic \, tang \frac{\alpha}{2} + 2nc \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (7)$$

(6) und (7) subtrahirt geben:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = d_1 - d_2 = 4ic \, tang \frac{\alpha}{2} - 4nc \, tang \frac{\alpha}{2} \, sec \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (8)$$

was auch unmittelbar aus (4) und (5) erhalten würde.

Zwei Gleichungen von der Form (8), mit möglichst verschiedenen Werthen α, würden hinreichen, die zwei Unbekannten i und c zu bestimmen. Da wir aber 8 Bestimmungsgleichungen dieser Art haben, fassen wir alle miteinander in eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, und lassen dann die Gleichungen (4) und (5) getrennt, behandeln sie auch als unabhängig, was insofern nicht ganz streng ist, als die Mittemessung α in beiden gemeinsam vorkommt. Es ist aber diese Messung α viel genauer als die aus der Mitte gerückten Messungen α_1 und α_2, weshalb das angegebene Verfahren wohl zulässig ist.

Wir bilden also aus (6) und (7) die Fehlergleichungen

$$v_1 = \quad ai - bn + l_1 \quad (9)$$

$$v_2 = -ai + bn + l_2 \quad (10)$$

wo a b und l folgende Bedeutungen haben:

$$a = 2c \, tang \frac{\alpha}{2} = \frac{120}{\varrho'} c \, tang \frac{\alpha}{2} = [log = 0.440531] \, tang \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

$$b = 2c \, tang \frac{\alpha}{2} sec \frac{\alpha}{4} cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) = [log = 0.440531] \, tang \frac{\alpha}{2} sec \frac{\alpha}{4} cos \left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) \quad (12)$$

$$l_1 = D - d_1 \qquad l_2 = D - d_2 \quad (13)$$

wo $D = c^2 \, tang \dfrac{\alpha}{2} = 60 \dfrac{c^2}{\varrho'} \, tang \dfrac{\alpha}{2} = [log = 2.03713] \, tang \dfrac{\alpha}{2}$

Die Coefficienten sind so ausgerechnet, dass v d und l in Secunden, i und n in Minuten zu nehmen sind. Nach (1) ist $c = 79'$ eingesetzt worden.

Der Schärfungswinkel ist für unseren Sextanten nach § 33. S. 175 $\beta = 16^0$. Dieser Werth ist in (12) einzusetzen.

Hiernach ist Folgendes berechnet, und sofort auch die **nach** der Ausgleichung übrigbleibenden Fehler v_1 und v_2 beigefügt. Zugleich ist ein System v_1' v_2' beigesetzt, dessen Bedeutung nachher behandelt werden wird.

Nummer	a	b	D	d_1	d_2	l_1	l_2	v_1	v_2	v_1'	v_2'
1_1 und 1_2	1,40	1,43	55″	39″	52″	+ 16″	+ 3″	− 3″	+22″	− 4″	+23″
2_1 „ 2_2	1,88	1,96	74	30	102	+ 44	−28	+17	− 1	+17	− 1
3_1 „ 3_2	2,77	2,98	109	46	123	+ 63	−14	+19	+30	+21	+28
4_1 „ 4_2	3,92	4,32	155	103	217	+ 52	− 62	−10	− 0	− 8	− 2
5_1 „ 5_2	4,84	5,42	191	84	264	+107	−73	+29	+ 5	+31	+ 3
6_1 „ 6_2	5,22	5,88	206	123	294	+ 83	−88	− 2	− 3	+ 6	− 6
7_1 „ 7_2	6,20	7,07	245	131	331	+114	−86	+11	+17	+16	+12
8_1 „ 8_2	6,84	7,84	270	164	376	−106	+106	− 8	+ 8	− 4	+ 4
								$(v\,v) = 3561$		$(v'\,v') = 3602$	

(14)

Mit diesen Coefficienten a, b, l sind die 16 Fehlergleichungen von der Form (9) und (10) nach der M. d. kl. Q. behandelt worden, die Normalgleichungen wurden:

$$\begin{array}{rrrr} + 328{,}88\,i & - 370{,}52\,n & + 5267{,}63 & = 0 \\ & + 417{,}64\,n & - 5938{,}81 & = 0 \\ & & + 87973 & \end{array}$$

Die Auflösung gab:

$$i = +\,6' \pm 38' \qquad n = +\,20' \pm 34' \tag{15}$$

$$(l\,l\,.\,2) = 3518 \qquad m = \sqrt{\frac{3518}{16-2}} = \pm\,16'' \tag{16}$$

Dann die einzelnen v wie schon bei (14) angegeben mit einer Summe $(v\,v)$, welche hinreichend mit $(l\,l\,.\,2)$ übereinstimmt. (Die v der Tabelle (14) sind etwas schärfer als mit den auf 1′ abgerundeten Werthen i und n von (15) berechnet.)

Während der mittlere Fehler $m = \pm\,16''$ für **eine** Bestimmung von α wohl den Verhältnissen entspricht, denn die Messungen α_1 und α_2 (vgl. Fig. 1.) unten und oben im Gesichtsfeld, sind aus vielen Gründen viel unsicherer als die Messungen in der Mitte, könnte es auf den ersten Blick überraschend scheinen, dass die Neigungen i und n selbst nach (15) mit so grossen mittleren Fehlern $\pm$ 38′ und $\pm$ 34′ behaftet sind.

Diese Neigungen wurden in § 34. S. 177 und 180 direct bestimmt mit den Resultaten

$$i = -\,3' \qquad n = +\,14' \tag{17}$$

also beide erheblich kleiner als die Werthe (15), was der unvermeidlichen Unsicherheit des Systems (15) und (17) nicht widerspricht.

Man kann nun einen Versuch machen, dieses System (17) ebenfalls in

die Fehlergleichungen (9) und (10) einzusetzen, und man findet dabei das in der Tabelle (14) mit v_1' v_2' bezeichnete Fehlersystem, welches von dem System v_1 v_2 wenig abweicht und fast dieselbe Quadratsumme gibt.

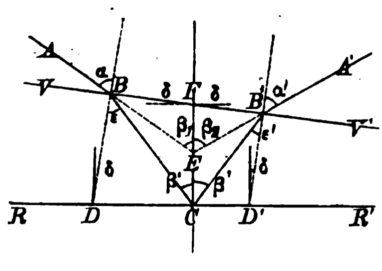
Auch die Fehlerberechnung nach der Formel (25) § 36. S. 188 gibt für beide Systeme von i und n nahezu dasselbe, z. B. für $\alpha = 90^0$ bzw. $\alpha - \alpha' = 10''$ und $8''$.

Die bedeutenden mittleren Fehler $\pm$ 38′ und $\pm$ 34′ des Systems (15) führen zu dem Schluss, dass die indirecte Methode der Bestimmung von i und n durch Messungsvergleichungen in verschiedenen Theilen des Gesichtsfeldes auch bei der sorgfältigsten Behandlung nach der Methode der kl. Q. die erhebliche dazu nöthige Beobachtungs- und Rechnungsmühe nicht wohl lohnt, dass man vielmehr auf dem directen Wege nach § 34. die Neigungen i und n rascher und genauer erhält. Zur weiteren theoretischen Bestätigung dieses Ergebnisses haben wir auch ausser den mittleren Fehlern von i und n den mittleren Fehler der Funktion von i und n berechnet, welche man nach (25) § 36. S. 188 zur Sextanten-correction braucht. Da das Resultat von derselben Art ist, wie die mittleren Fehler bei (15), theilen wir diese weiteren Rechnungen nicht mehr mit.

§ 38. Prismatischer Fehler des grossen Spiegels des Sextanten.

Die einfachen Reflexionsgesetze, welche für einen planparallelen an der Rückseite belegten Spiegel gelten, treffen nicht mehr zu, wenn die beiden Spiegelflächen nicht mehr eben und parallel sind. Wir untersuchen den Fall, dass die beiden Glasflächen zwar eben, aber nicht parallel seien.

Fig. 1. Convergenz der Spiegelebenen δ.



In Fig. 1. sei VV' die Vorderfläche und RR' die mit Metall belegte Rückfläche eines solchen prismatischen Spiegels, dessen Convergenzwinkel $= \delta$ sei. $ABCB'A'$ sei der Weg eines an der Rückfläche reflectirten Lichtstrahls. Dann hat man mit den eingeschriebenen Winkeln α ε α' ε' und mit dem Brechungs-Coefficienten μ zunächst die zwei Gleichungen:

$$\text{Brechung in } B \qquad \sin\alpha = \mu \sin\varepsilon \tag{1}$$
$$\text{„ „ } B' \qquad \sin\alpha' = \mu \sin\varepsilon' \tag{2}$$

Mit dem an verschiedenen Stellen eingeschriebenen Convergenzwinkel δ hat man weiter:

aus Dreieck BDC $\quad \varepsilon + (90^0 - \delta) + (90^0 - \beta') = 180^0$
„ „ $B'D'C$ $\quad \varepsilon' + (90^0 + \delta) + (90^0 - \beta') = 180^0$

hieraus $\quad \varepsilon - \varepsilon' = 2\,\delta$ (3)

aus Dreieck BEF $\quad (90^0 - \alpha) + \beta_1 + (90^0 + \delta) = 180^0$
„ „ $B'EF$ $\quad (90^0 - \alpha') + \beta_2 + (90^0 - \delta) = 180^0$

hieraus $\quad \beta_1 - \beta_2 = (\alpha - \alpha') - 2\,\delta$ (4)

Um für gegebene Verhältnisse $\alpha - \alpha'$ oder $\beta_1 - \beta_2$ zu berechnen, könnte man ein gegebenes α in (1) einsetzen, und mit μ, das etwa $= 1{,}5$ ist, ε berechnen, dann $\varepsilon' = \varepsilon - 2\,\delta$ nach (3) und α' aus (2) berechnen; indessen da $\alpha - \alpha'$ immer ein kleiner Werth ist, empfiehlt es sich, eine Näherungsformel hiefür zu entwickeln:

Die Gleichungen (2) und (3) geben:

$$\sin \alpha' = \mu \sin (\varepsilon - 2\,\delta) = \mu \sin \varepsilon - 2\,\mu\,\delta \cos \varepsilon$$

Dieses mit (1) verglichen gibt:

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = 2\,\mu\,\delta \cos \varepsilon$$

Andererseits ist:

$$\sin \alpha - \sin \alpha' = (\alpha - \alpha') \cos \alpha$$

also zusammen

$$\alpha - \alpha' = 2\,\mu\,\delta\,\frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha} \tag{5}$$

um hierin auch ε in α auszudrücken, hat man nach (1)

$$\cos \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\mu^2}}$$

Dieses in (5) eingesetzt gibt nach kurzer Umformung:

$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \sec^2 \alpha} \tag{6}$$

Der Brechungs-Coefficient ist für Glas in runder Zahl $\mu = 1{,}5$, also $\mu^2 - 1 = 1{,}25$, folglich:

$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2 \alpha} \tag{7}$$

und nach (4):

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha - \alpha' - 2\,\delta = 2\,\delta \left(\sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2 \alpha} - 1\right) \tag{8}$$

Zur Uebersicht sind folgende Werthe berechnet, mit der Annahme $\delta = 1'$.

α	$\alpha - \alpha'$	$\beta_1 - \beta_2$	α	$\alpha - \alpha'$	$\beta_1 - \beta_2$
0°	3,0′	1,0′	60°	4,9′	2,9′
10	3,0	1,0	70	6,9	4,9
20	3,1	1,1	80	13,0	11,0
30	3,3	1,3	85	25,7	23,7
40	3,5	1,5	89	2° 8,1	2° 6,1
50	4,0	2,0	90	∞	∞

(9)

Diese Werthe $\alpha - \alpha'$ oder $\beta_1 - \beta_2$ zeigen die Unsymmetrie der Reflexion, denn bei einem planparallelen Spiegel wäre sowohl $\alpha - \alpha'$ als auch $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Ob man den einen oder anderen Werth als Maass des prismatischen Einflusses nimmt, ist für die nachher zu machende Anwendung gleichgültig, weil sich beide nur um eine Constante $2\,\delta$ unterscheiden, $\alpha - \alpha'$ bezieht sich auf die Normale der Vorderfläche, $\beta_1 - \beta_2$ auf die Normale der Hinterfläche. Die Tabelle (9) zeigt, dass die Unsymmetrie der Reflexion, namentlich bei flachem Auffallen der Lichtstrahlen, sehr erheblich werden kann.

Wenn der Sextant planparallele Spiegel hat, so besteht die Gleichung:

$$\alpha = 2\gamma - 2\beta \tag{10}$$

wenn dagegen die Spiegel prismatisch sind, so soll nach Fig. 2. eine Gleichung bestehen:

$$\alpha' = \gamma + \gamma' - (\beta + \beta') \tag{11}$$

Die Differenz zwischen (10) und (11) ist:

$$\alpha - \alpha' = \gamma - \gamma' - (\beta - \beta') \tag{12}$$

Nun ist nach (6):

$$\gamma - \gamma' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\,\gamma} \tag{13}$$

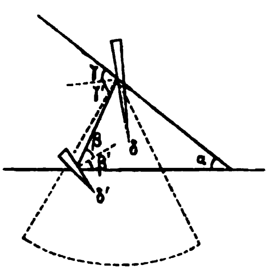
$$\beta - \beta' = 2\,\delta' \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\,\beta} \tag{14}$$

Diese Werthe (13) und (14) in (12) gesetzt geben:

$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\,\gamma} - 2\,\delta' \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\,\beta} \tag{15}$$

Am kleinen Spiegel ist β constant, und da ein constanter Fehler in den Indexfehler eingeht, den wir überhaupt hier ausser Betracht lassen, so kann man das zweite Glied von (15) weglassen. Ausserdem ist von (15) noch so viel zu subtrahiren, als das erste Glied für $\alpha = 0$, d. h. für $\gamma = \beta$, ausmacht, d. h. die Correctionsformel lautet, indem zugleich $\gamma = \beta + \frac{\alpha}{2}$ gesetzt wird:

Fig. 2. Sextant mit prismatischen Spiegeln.



$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} - 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2\,\beta} \tag{16}$$

wo $\mu = 1{,}5$, $\mu^2 - 1 = 1{,}25$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet, mit $\beta = 15^0$ und $\delta = 1'$:

α	$2\sqrt{\ldots}$	$(\alpha-\alpha')_1$	Differenz	α	$2\sqrt{\ldots}$	$(\alpha-\alpha')_1$	Differenz
0°	3′ 3,6″	0″	3	70°	4′ 0,7″	57″	22
10	3 6,5	3	4	80	4 22,9	1′ 19	31
20	3 10,4	7	5	90	4 54,0	1 50	46
30	3 16,0	12	7	100	5 39,4	2 36	71
40	3 23,0	19	10	110	6 50,3	3 47	122
50	3 32,3	29	12	120	8 52,1	5 49	249
60	3 44,5	41	16	130	13 1,9	9 58	762
70	4 0,7	57		140	25 44,0	22 40	
				150	∞	∞	

(17)

Man kann den Prismenwinkel δ des grossen Spiegels durch Umsetzen dieses Spiegels in seiner Fassung bestimmen, indem man einen grossen Winkel zuerst mit der Normallage des Spiegels und dann mit der umgekehrten Lage misst. Die Differenz beider Messungen ist dann der doppelte Fehlereinfluss des Prismenwinkels δ. Die Operation des Spiegelumsetzens ist etwas umständlich, weil man nachher auch den Indexfehler wieder von Neuem bestimmen muss, und auch die Parallelität beider Spiegel in verticalem Sinn, welche durch das Umsetzen wohl verloren geht, wieder herstellen muss. Folgendes ist ein solcher Versuch mit unserem Sextanten:

Index = 5′ 15″
Winkelmessung I = 109° 14′ 55″
Index = 5′ 20″

Spiegel umgesetzt.

Index = 5′ 50″
Winkelmessung II = 109° 15′ 30″
Index = 5′ 35″
Winkelmessung II = 109° 15′ 35″
Index = 5′ 40″

Spiegel wieder zurück in die Normallage.

Index = 5′ 40″
Winkelmessung I = 109° 15′ 20″
Index = 5′ 35″

Jeder der hier beschriebenen Messungswerthe ist selbst das Mittel aus je zwei unmittelbar hintereinander genommenen Ablesungen.

Subtrahirt man von jeder Messung das Mittel derjenigen zwei Indexbestimmungen, zwischen welche sie fällt, so hat man:

		I	II	II—I
I = 109° 14′ 55″	— 5′ 17,5 =	109° 9′ 37,5″		
II = 109 15 30	— 5 42,5 =		109° 9′ 47,5″	+ 10,0″
II = 109 15 35	— 5 37,5 =		109 9 57,5	
I = 109 15 20	— 5 37,5 =	109 9 42,5		+ 15,0

Mittel II—I = + 12″

Dieser Versuch wurde mit 4 verschiedenen Winkeln wiederholt, wie folgende Reihe zeigt, in welcher $(\alpha - \alpha')_1$ den aus der Tabelle (17) interpolirten Werth der Funktion (16) für $\delta = 1'$ bedeutet.

α	II—I	$(\alpha-\alpha')_1$	$\frac{\text{II—I}}{(\alpha-\alpha')_1}$
81° 40′	+ 37″	1′ 24″	0,44
93 52	+ 8	2 7	0,06
109 10	+ 12	3 40	0,05
113 3	+ 32	4 24	0,12
		Einfaches Mittel	0,16

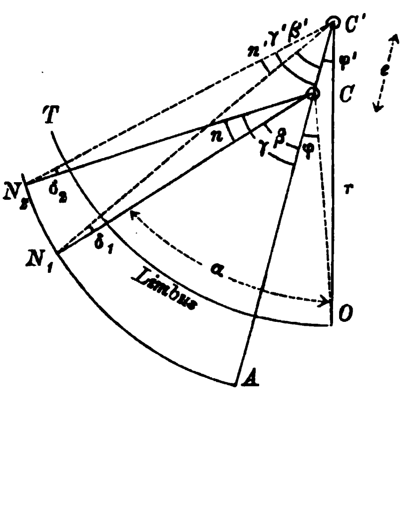
Wenn man keine grösseren Differenzen bekommt, als diese, II — I, so kann man den Spiegel für gut planparallel erklären. Der hiezu noch ausgerechnete Mittelwerth des Quotienten (II — I) : $(\alpha - \alpha')_1 = 0{,}16$ deutet an, dass der Prismenwinkel δ nur etwa $0{,}08' = 5''$ beträgt. (Zu genauerer Bestimmung sollten den Differenzen II — I Gewichte gegeben werden, welche mit α wachsen.)

§ 39. Excentricität und Theilungsfehler des Sextanten.

Die Ablesungen an dem Nonius des Sextanten sind mit dem Fehlereinfluss der Excentricität der Alhidade behaftet, welcher trotz aller Sorgfalt der mechanischen Centrirung leicht auf 1′ anwachsen kann.

An dem Sextanten selbst, ohne Hülfe von Messungen mit anderen Instrumenten, hat man nur ein Mittel, die Excentricität einigermaassen zu bestimmen, nämlich die Führung des Nonius durch die ganze Theilung, und Beobachtung der Nonienübertheilung von Strecke zu Strecke. Zwar ist dieses Mittel für den Zweck genauer Excentricitätsbestimmung, wie wir sehen werden, nicht genügend; allein da man dadurch immerhin rasch einen ersten Aufschluss über die Grössenordnung der Excentricitätseinflüsse erhält, und da man zugleich auf diesem Wege einen Einblick in die Güte der Theilung gewinnt, so behandeln wir diese Methode ausführlich an dem Beispiel unseres Sextanten (S. 157).

Fig. 1. Excentricität des Sextanten.



In Fig. 1. ist C' der Limbusmittelpunkt des Sextanten, und C der Alhidadendrehpunkt; die Excentricität ist $C' C = e$. Die Verbindungslinie $C' C$ macht mit dem Nullhalbmesser $C' O$ der Theilung den Winkel φ' und

mit CO den Winkel φ. Wegen der Excentricität beschreibt die Alhidade CA einen Bogen AN_1N_2, welcher sich mit dem Theilkreisbogen OT nicht deckt, da aber in radialer Richtung diese beiden Bögen höchstens um den kleinen Betrag e (weniger als 0,1 mm) gegen einander abstehen, so kann man dennoch mit dem Nonius $N_1 N_2$ die Striche der Theilung OT ablesen.

Wir betrachten nun die Stellung des Nonius $N_1 N_2$ gegen die Theilung CT, der Nullstrich N_1 des Nonius stehe auf dem Limbusstrich mit der Bezifferung 2α, was dem in Fig. 1. eingeschriebenen Winkel α entspricht.

Ausserdem betrachten wir die Stellung des Nonius gegen die Centrallinie $C'C$ sowohl in C als auch in C'. Zieht man von C' aus Radien nach dem Anfangsstrich und nach dem Endstrich des Nonius, so bilden diese Radien die Winkel β und γ mit der Centrallinie CA, und in C' hat man entsprechend die Winkel β' und γ', wie in Fig. 1. eingeschrieben ist. Diese Winkel $\beta\ \beta'$, $\gamma\ \gamma'$ unterscheiden sich um die kleinen Beträge δ_1 und δ_2, welche bei N_1 und N_2 eingeschrieben sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\beta - \beta' &= \delta_1 = \frac{e\,\varrho}{r}\sin\beta' = \varepsilon\sin\beta' \\ \gamma - \gamma' &= \delta_2 = \frac{e\,\varrho}{r}\sin\gamma' = \varepsilon\sin\gamma'\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo zur Abkürzung, wie künftig immer, gesetzt ist:

$$\frac{e\,\varrho}{r} = \varepsilon \tag{2}$$

Subtrahirt man die beiden Gleichungen (1), so erhält man:

$$(\gamma - \beta) - (\gamma' - \beta') = \varepsilon\,(\sin\gamma' - \sin\beta') \tag{3}$$

Nun ist $\gamma - \beta$ gleich der Nonienlänge n und $\gamma' - \beta' = n'$ ist der Centriwinkel des vom Nonius überdeckten Limbusintervalls, womit (3) wird:

$$n - n' = \varepsilon\,(\sin\gamma' - \sin\beta')$$

oder indem hier rechts γ statt γ' und β statt β' gesetzt wird, was bei der Kleinheit von ε immer erlaubt ist,

$$n - n' = 2\,\varepsilon\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\cos\frac{\gamma + \beta}{2}$$

oder nach dem Anblick von Fig. 1.:

$$n - n' = 2\,\varepsilon\sin\frac{n}{2}\cos\left(\alpha - \varphi + \frac{n}{2}\right) \tag{4}$$

Die Differenz $n - n'$ kann mit Hülfe der Uebertheilung des Nonius gemessen werden.

In Fig. 2. (nächste Seite) ist der Fall gezeichnet, dass der Nonius $N_1 N_2$ das ihm theoretisch zugewiesene Limbusintervall $N_1 N_2'$ nicht völlig

bedeckt; und es soll das nicht etwa von falscher Länge des Nonius oder von Theilungsfehlern des Limbus, sondern lediglich von der Excentricität herrühren, durch welche der Nonius $N_1 N_2$ auf den Theilstrichen des Limbus zu weit hinausgeschoben wird und deswegen die von C' aus divergirenden Limbus - Theilstriche nicht mehr zu fassen vermag. Die Differenz $N_2 N'_2$ sei $= u'$. Um der gewöhnlichen Ablesung zu folgen, wollen wir jedoch setzen

$$u' = -u$$

d. h. $+u$ sei das Uebergreifen des Nonius über das theoretisch zugehörige Limbusintervall und $-u = u'$ sei das Zurückbleiben.

Um jeden Irrthum im Vorzeichen zu vermeiden, haben wir in Fig. 3., 4. und 5. den Anblick des Nonius mit Uebertheilung in drei verschiedenen Fällen gezeichnet.

Fig. 3. zeigt das normale Verhalten, indem sowohl der Nonius - Nullstrich, als auch der Nonius-Endstrich (mit der Ziffer 20) je mit einem Limbusstrich zusammentreffen.

In Fig 4., welche Fig. 2. entspricht, bleibt die Nonienlänge $0 - 20 = N_1 N_2$ gegen den Limbustheil $N_1 N_2'$ zurück, und man findet die Coincidenz rechts vom 20-Strich z. B. bei 19′ und wir würden in diesem Falle sagen $(u) = -1'$.

In Fig. 5. findet das Gegentheil von Fig. 4. statt; man wird an der Uebertheilung des Nonius, links vom 20-Strich ablesen, etwa 21′, und wir sagen dann $(u) = +1'$.

Fig. 2. Uebertheilung des Nonius.

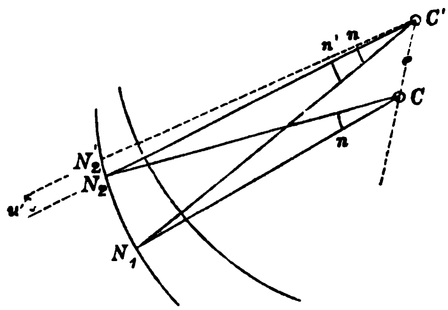


Fig. 3. Nonienlänge normal.

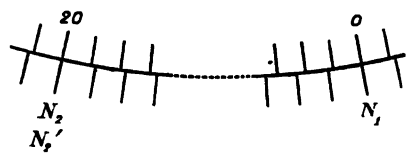


Fig. 4. Nonienlänge zurückbleibend.

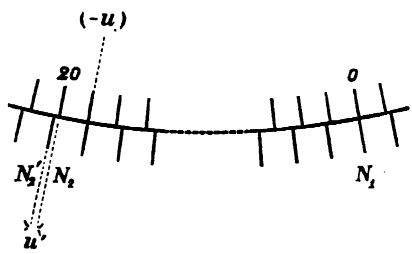
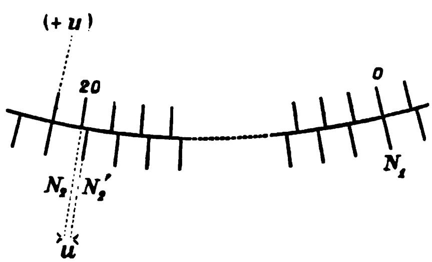


Fig. 5. Nonienlänge übergreifend.



Wir haben also jetzt allgemein:

$$n - n' = u' = - u \tag{5}$$

und damit wird (4):

$$0 = u + 2\varepsilon \sin \frac{n}{2} \cos (\alpha + \frac{n}{2} - \varphi) \tag{6}$$

Nun kann aber die Nonienlänge n, welche wir bisher als richtig vorausgesetzt haben, selbst fehlerhaft sein, und zwar aus zwei Gründen: erstens wegen eigentlicher Theilungsfehler und zweitens wegen Excentricität des Nonientheilungs-Mittelpunktes gegen den Alhidadendrehpunkt C (Fig. 1. und Fig. 2.). Den constanten Fehler der Nonienlänge, welchen wir mit z bezeichen wollen, haben wir in (6) zu u hinzuzusetzen, und den unregelmässigen Fehler bei einer Bestimmung von u mit v (im Sinne der Methode der kl. Q.) bezeichnend, erhalten wir nun aus (6) folgende Fehlergleichung:

$$v = z + u + 2\varepsilon \sin \frac{n}{2} \cos (\alpha + \frac{n}{2} - \varphi) \tag{7}$$

Es ist hiebei:

$$\cos\left(\alpha + \frac{n}{2} - \varphi\right) = \cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \cos\varphi + \sin\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \sin\varphi, \text{ also}$$

$$v = z + u + 2\varepsilon \sin\frac{n}{2} \cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \cos\varphi + 2\varepsilon \sin\frac{n}{2} \sin\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \sin\varphi$$

Abgekürzt:

$$v = z + a\,x + b\,y + u \tag{8}$$

$$\text{wo } a = 2\cos\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \qquad x = \varepsilon \sin\frac{n}{2} \cos\varphi \tag{9}$$

$$b = 2\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}\right) \qquad y = \varepsilon \sin\frac{n}{2} \sin\varphi \tag{10}$$

Damit haben wir zugleich die Aufgabe zur Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorbereitet.

Vor Anwendung auf ein Zahlenbeispiel sind die wirklichen in Fig. 1. — 2. eingeschriebenen und in den Formeln (8) (9) (10) benützten Winkelwerthe α, n, u, zu den an dem Sextanten abgelesenen Zahlen in Beziehung zu setzen. Die letzteren seien mit (α) (n) (u) bezeichnet, also:

$$(\alpha) = 2\alpha,\ (n) = 2n,\ (u) = 2u, \text{ auch } (z) = 2z,\ (v) = 2v \tag{11}$$

also nach (8) (9) und (10):

$$\frac{(v)}{2} = \frac{(z)}{2} + a x + b y + \frac{(u)}{2}$$

$$\text{wo } a = 2\cos\left(\frac{(a)}{2} + \frac{(n)}{4}\right) \qquad x = \varepsilon \sin\frac{(n)}{4} \cos\varphi$$

$$b = 2\sin\left(\frac{(a)}{2} + \frac{(n)}{4}\right) \qquad y = \varepsilon \sin\frac{(n)}{4} \sin\varphi$$

oder, was dasselbe ist, mit Aenderung der Bedeutungen von a und b:

$$(v) = (z) + ax + by + (u) \tag{12}$$

$$\text{wo } a = \cos\left(\frac{(\alpha)}{2} + \frac{(n)}{4}\right) \qquad x = 4\,\varepsilon \sin\frac{(n)}{4} \cos\varphi \tag{13}$$

$$b = \sin\left(\frac{(\alpha)}{4} + \frac{(n)}{4}\right) \qquad y = 4\,\varepsilon \sin\frac{(n)}{4} \sin\varphi \tag{14}$$

Für den Winkel φ, welcher in den Beobachtungen nicht auftritt, ist kein entsprechendes (φ) eingeführt worden.

Wenn man aus einer Reihe von Beobachtungen (u) die Excentricitätselemente x und y, und dann daraus ε und φ bestimmt hat, kann man die Sextantencorrection für Excentricität bestimmen, womit wir uns nun beschäftigen: Der Winkel, den man messen will, ist derjenige, welchen die Alhidade (mit der sich der grosse Spiegel dreht) von der Nullstellung bis zur Stellung N_1 durchläuft, er sei (α); der wegen der Excentricität falsch abgelesene Winkel sei (α'), also:

$$(\alpha) = (\alpha') + ((\alpha) - (\alpha')),$$

$$\text{d. h. Winkelcorrection} = (\alpha) - (\alpha') \text{ oder } = 2\alpha - 2\alpha' = 2(\alpha - \alpha') \tag{15}$$

wenn (α) und α, (α') und α' in gleicher Beziehung stehen wie bei (11) angegeben ist. Nun ist nach Fig. 1.:

$$\alpha = \varphi + \beta \qquad \alpha' = \varphi' + \beta'$$
$$\alpha - \alpha' = +\ (\beta - \beta') + (\varphi - \varphi')$$

$\beta - \beta'$ ist schon bei (1) angegeben, und für $\varphi - \varphi'$ gilt eine ähnliche Gleichung, also:

$$\alpha - \alpha' = \varepsilon \sin\beta' + \varepsilon \sin\varphi' \tag{16}$$

Statt β' und φ' kann auch β und φ genommen werden, und es ist $\beta = \alpha - \varphi$, also nach (15) und (16):

$$(\alpha) - (\alpha') = 2\,\varepsilon\left(\sin\left(\frac{(\alpha)}{2} - \varphi\right) + \sin\varphi\right) \tag{17}$$

Man kann durch eine Näherungsannahme dieser Formel noch eine andere Gestalt geben. Der Winkel α ist allerdings in Fig. 1. von O bis N_1 gezählt, dagegen die durch Excentricität entstellte Ablesung α' wird nicht gerade am Anfang des Nonius bei N_1 ihre Stelle haben, sondern ebensogut am Ende oder in der Mitte, es wird daher gestattet sein, in dem hierauf bezüglichen Gliede $\sin\left(\frac{(\alpha)}{2} - \varphi\right)$ in (17) den Winkel (α) um die halbe Nonienlänge zu vermehren, und daher statt (17) zu schreiben:

$$(\alpha) - (\alpha') = 2\,\varepsilon\left(\sin\left(\frac{(\alpha)}{2} + \frac{(n)}{4} - \varphi\right) + \sin\varphi\right) \tag{18}$$

oder entwickelt:

$$(\alpha) - (\alpha') = 2\,\varepsilon\left(\sin\left(\frac{(\alpha)}{2} + \frac{(n)}{4}\right)\cos\varphi - \cos\left(\frac{(\alpha)}{2} + \frac{(n)}{4}\right)\sin\varphi\right) + 2\,\varepsilon\sin\varphi$$

Hier kommen wieder die Producte von (13) und (14) vor, deren Benutzung gibt:

$$(\alpha) - (\alpha') = \frac{1}{2} \, cosec \, \frac{(n)}{4} \left(b\,x - a\,y \right) + 2\,\varepsilon \, sin \, \varphi \tag{19}$$

Man muss also die an sich schon unsicheren x und y noch mit $\frac{1}{2} \, cosec \, \frac{(n)}{4}$ multipliciren, um zu der Winkelcorrection $(\alpha) - (\alpha')$ zu gelangen, z. B. für $(n) = 19^0\,40'$ wird $= \frac{1}{2} \, cosec \, \frac{(n)}{4} = 5{,}8$, d. h. die Fehler von $b\,x$ und $a\,y$, welche nach (12) von der Grössenordnung der Beobachtungsfehler sind, gehen etwa 6fach vergrössert in die Winkelcorrection ein; dieses erscheint insofern gar nicht überraschend, als von den Erscheinungen des nur 20° umfassenden Nonius auf die ganze 120° umfassende Theilung geschlossen werden muss.

Zu einem Zahlenbeispiel nehmen wir den Sextanten von S. 157. Das Uebergreifen (u) des Nonius wurde an 29 Stellen beobachtet, nämlich während die Noniusnull in der Gegend von 0° 5° 10° . . . 140° stand. An jeder dieser Stellen wurden 20 Ablesungen, also im Ganzen 580 Ablesungen gemacht. (Diese Zahl von Ablesungen ist übertrieben gross, sie entstand aus der nachher doch nicht verwirklichten Hoffnung, auf diesem Wege eine brauchbare Correctionsformel zu gewinnen.) Die arithmetischen Mittel jener je 20 Ablesungen sind in der nachfolgenden Tabelle vereinigt, und sie sind hier abermals in 5 Gruppenmittel zusammengezogen, mit welchen wir nachher weiter rechnen werden.

	(α)	(u)	(α)	(u)	(α)	(u)	(α)	(u)	(α)	(u)
	0°	11,0″	30°	27,8″	60°	36,8″	90°	33,5″	120°	37,5″
	5	2,4	35	22,8	65	30,5	95	30,0	125	40,0
	10	27,2	40	30,5	70	32,0	100	24,5	130	26,0
	15	28,2	45	30,5	75	30,0	105	25,0	135	28,5
	20	34,0	50	34,5	80	44,5	110	27,0	140	22,0
	25	50,5	55	37,0	85	35,5	115	38,0		
Mittel	12,5°	25,6″	42,5°	30,5″	72,5°	34,9″	102,5°	29,7″	130,0°	30,8″

(20)

Betrachtet man diese Zahlen, oder besser noch eine graphische Darstellung derselben, so kommt man zu der Ueberzeugung, dass die Theilung des Sextanten erhebliche Fehler hat. Gleich zu Anfang bei 5° ist das Uebergreifen 2″ und bei 25° ist es 50″. Solche Sprünge werden durch Excentricität nicht erklärt.

Die nominelle Nonienlänge ist bei unserem Instrument $(n) = 19^0\,40'$ und damit bilden wir aus (20) nach Anleitung von (12) (13) (14) folgende neue Tabelle:

	(α)	$\left(\frac{(\alpha)}{2}+\frac{(n)}{4}\right)=\psi$	$\cos\psi=a$	$\sin\psi=b$	(u)
1.	12° 30′	11° 10′	0,98	0,19	25,6″ = 0,43′
2.	42 30	26 10	0,90	0,44	30,5 = 0,51
3.	72 30	41 10	0,75	0,66	34,9 = 0,58
4.	102 30	56 10	0,56	0,83	29,7 = 0,50
5.	103 0	69 55	0,34	0,94	30,8 = 0,51

(21)

Die Uebergreifungen (u) (welche nach Fig. 5. sämmtlich positiv beobachtet wurden) haben wir von Secunden in Minuten verwandelt, damit bei der numerischen Weiterrechnung die a b und (u) weniger ungleich werden. Damit sind von hier an auch (δ) und (ε) in Minuten zu rechnen.

Die zu (21) gehörigen Fehlergleichungen heissen:

$$\left.\begin{array}{l}
(v)_1 = (z) + 0{,}98\,x + 0{,}19\,y + 0{,}43 \\
(v)_2 = (z) + 0{,}90\,x + 0{,}44\,y + 0{,}51 \\
(v)_3 = (z) + 0{,}75\,x + 0{,}66\,y + 0{,}58 \\
(v)_4 = (z) + 0{,}56\,x + 0{,}83\,y + 0{,}50 \\
(v)_5 = (z) + 0{,}34\,x + 0{,}94\,y + 0{,}51
\end{array}\right\} \qquad (22)$$

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{5{,}0000\,(z)} + 3{,}5300\,x + 3{,}0600\,y + 2{,}5300 = 0 \\
\qquad\qquad \underline{2{,}7621\,x} + 1{,}8616\,y + 1{,}7688 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{2{,}2378\,y} + 1{,}5833 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{1{,}2915} = \quad ((u)\,(u))
\end{array}\right\} \qquad (23)$$

Die Auflösung gibt:

$$\left.\begin{array}{lll}
(z) = +\,0{,}082' & x = -\,0{,}439' & y = -\,0{,}455' \\
\quad\;\; \pm\,0{,}296 & \quad\;\; \pm\,0{,}242 & \quad\;\; \pm\,0{,}208
\end{array}\right\} \qquad (24)$$

Mittlerer Fehler einer Bestimmung von (u), $= \pm\,0{,}039' = \pm\,2{,}3''$

Schaut man zurück nach (13) und (14), wo die Bedeutung von x und y angegeben ist, so findet man:

$$tang\;\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = 226^\circ\;1' \qquad (25)$$

$$4\,\varepsilon\,\sin\frac{(n)}{4} = \frac{y}{\sin\varphi} \text{ oder } = \frac{x}{\cos\varphi} = 0{,}632' = 37{,}9''$$

$$(n) = 19^\circ\;40' \qquad \varepsilon = 1{,}844'$$

Dieses kann man in (17) setzen und darnach berechnen:

Sextantenablesung (α') =	0°	30°	60°	90°	120°	
Correction $(\alpha) - (\alpha')$ =	0″	− 45″	− 1′ 38″	− 2′ 34″	− 3′ 32″	(26)

Was die Zuverlässigkeit dieser Correctionstabelle betrifft, so ersehen wir aus (24), dass x und y, auf welche es hauptsächlich ankommt, nur etwa auf 50 % ihres Werthes sicher sind, und da diese Fehler sich auch auf (26) fortpflanzen, haben wir diese Correctionen, sobald der Winkel grösser wird, kaum auf 1′ verbürgt.

Es mag hier auch noch eine andere Berechnung ihre Stelle finden, welche auf die 29 einzelnen Werthe (u) von (20) gegründet wurde (Phys. Geogr. und Met. d. lib. Wüste S. 24). Dieselbe gab folgende Correctionswerthe:

Sextantenablesung (α')	=	0°	30°	60°	90°	120°	
Correction (α) — (α')	=	0″	— 41″	— 1′ 31″	— 2′ 25″	— 3′ 22″	(27)

Dieses stimmt mit (26) ziemlich überein.

Trotzdem führt die ganze Untersuchung und die Vergleichung ihrer Resultate mit anderen Fehlerbestimmungen zu dem Schluss, dass der eingeschlagene Weg der Excentricitätsbestimmung bei den grösseren Winkeln kaum auf 1′ sichere Correctionen liefern kann.

Bei der Frage, ob dieses Urtheil sich auch auf andere Instrumente ausdehnen lässt, ist zwar zuzugeben, dass unser Instrument eine mangelhafte Theilung hat, wie aus den Ablesungen (20) zu ersehen ist, dass aber auch bei guter Theilung die Excentricitätscorrectionen sich aus den Ablesungen der Nonienübertheilung höchstens auf 30″ genau werden bestimmen lassen.

Die Nonienübertheilungs-Ablesung eignet sich daher nur zur ersten Orientirung über etwaige sehr bedeutende Excentricitätsfehler.

§ 40. Terrestrische Winkelmessung mit dem Sextanten.

Für geodätische Zwecke ist der Sextant jetzt ausser Gebrauch gekommen, während noch am Anfang dieses Jahrhunderts z. B. Bohnenberger für seine erste Triangulirung von Württemberg viele Winkel mit dem Sextanten maass, und auch Benzenberg in dem Buche „Ueber das Cataster, Erstes Buch, Geschichte des Catasters, Bonn 1818“ auf S. 22 — 23 schrieb: „Für eine Landesvermessung ist der Spiegelsextant das bequemste Werkzeug, weil es nur sehr wenig Platz einnimmt, und weil es seiner Natur nach keinen festen Stand voraussetzt. Man kann daher sowohl in den höchsten Thurmspitzen, als in den Gipfeln hoher Eichen mit ihm messen.“

Da Landesvermessungen heutzutage nicht mehr „in den Gipfeln hoher Eichen“ gemacht werden, und auch für Recognoscirungs- und andere flüchtige Messungen ein kleiner Theodolit mit Bussole meist bessere Dienste leistet, als ein Sextant, so kommt die terrestrische Winkelmessung mit diesem Instrument praktisch fast nur noch zu Schiffe bei Küstenaufnahmen vor.

Im Vergleich mit dem Theodolit erfordern solche Messungen ein sehr gutes Auge, weil Kirchthürme etc., die sich nicht am Himmel abheben, in dem kleinen Sextantenfernrohr sehr schwer zu finden sind.

Versuchshalber machte ich auf einem Spaziergang auf dem Bentherberg-Thurm bei Hannover eine pothenotische Bestimmung mit dem Sextanten von S. 157 (ohne Reduction der Winkel auf den Horizont). Es

wurden zwischen fünf im Mittel 7 Kilometer entfernten Punkten, deren Coordinaten auf S. 34 und 36 des von Wittstein herausgegebenen hannoverschen Coordinatenverzeichniss gegeben sind, die Winkel in verschiedenen Combinationen mit dem Sextanten gemessen, und zu einem Satze vereinigt, wie folgende Tabelle zeigt:

Zielpunkt	Gemessen a	Trigonom. berechnet α	$\alpha - a$
Hannover, Kreuzthurm (Coord. S. 36). . .	64° 3′ 40″	64° 4′ 20″	+ 40″
„ Neustädter Thurm (Coord. S. 36)	64 44 10	64 44 50	+ 40
„ Marktthurm (Coord. S. 36). . .	65 37 30	65 37 30	0
„ Aegidiusthurm (Coord. S. 36) .	67 51 40	67 51 20	− 20
Ronnenberg (Coord. S. 34).	130 58 20	130 58 20	0
Gehrden (Coord. S. 34)	200 53 0	200 53 0	0

Aus den Messungen für Marktthurm, Ronnenberg und Gehrden sind die Coordinaten pothenotisch berechnet worden:

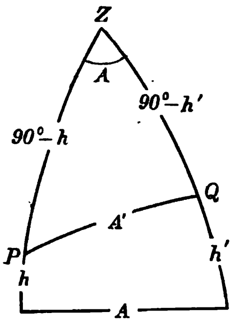
Bentherberg-Thurm $y = -22235{,}4$ m $x = +90175{,}3$ m

Mit diesen und den gegebenen Coordinaten sind die oben mitgetheilten α berechnet. Die gemessenen Winkel wurden auf die α möglichst orientirt und dann die Differenzen $\alpha - a$ gebildet, welche befriedigend sind. Eine genaue geodätische Bestimmnng des Bentherberg-Thurms liegt noch nicht vor.

Wir betrachten das vorstehende Beispiel als Beweis, dass man Sextantenmessungen immer noch unter Umständen mit Vortheil zur Ergänzung der topographischen Karte gebrauchen kann.

Trotz des selten gewordenen Gebrauchs in der Geodäsie ist die Winkelmessung mit dem Sextanten auf Zielpunkte von einigen Kilometern Entfernung wieder andererseits eine wichtige Operation geworden, nämlich wegen der Vergleichung ihrer Resultate mit den Resultaten von Theodolitmessungen und dadurch gegebener Sextantenprüfung. Da aber der Sextant schiefe Positionswinkel und der Theodolit Horizontalwinkel und Vertikalwinkel misst, entsteht die Aufgabe, diese Winkel gegenseitig zu reduciren, und eine zweite Reduction entsteht wegen der Sextantenparallaxe.

Fig. 1.
Reduction eines Winkels A' auf den Horizont A.



Reduction eines Winkels auf den Horizont. In Fig. 1. sei A' ein mit dem Sextanten gemessener Positionswinkel zwischen den Zielpunkten P und Q und dessen Projection auf den Horizont sei $= A$, ein Winkel, der auch im Zenit Z zwischen den Verticalkreisen von P und Q auftritt. Die beiden Höhenwinkel von P und Q seien h und h', und zwar seien dieses kleine Grössen. Fig. 1. gibt:

$$\cos A' = \cos (90^0 - h) \cos (90^0 - h') + \sin (90^0 - h) \sin (90^0 - h') \cos A$$
$$\cos A' = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos A$$

bis zur zweiten Potenz entwickelt:

$$\cos A' = h h' + \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)\left(1 - \frac{h'^2}{2}\right) \cos A = h h' + \left(1 - \frac{h^2 + h'^2}{2}\right) \cos A$$

$$\cos A' - \cos A = h h' - \frac{h^2 + h'^2}{2} \cos A \qquad (1)$$

Andererseits ist

$$A' = A - (A - A')$$
$$\cos A' = \cos A + (A - A') \sin A + \ldots$$

also in Verbindung mit (1):

$$A - A' = \frac{h h'}{\sin A} - \frac{h^2 + h'^2}{2} \operatorname{cotg} A \qquad (2)$$

wo rechts auch A' statt A gesetzt werden darf.

Diese Formel (2) lässt sich auch weiter umformen:

$$(h + h')^2 = h^2 + 2 h h' + h'^2$$
$$(h - h')^2 = h^2 - 2 h h' + h'^2$$
$$2 (h^2 + h')^2 = (h + h')^2 + (h - h')^2$$
$$4 h h' = (h + h')^2 - (h - h')^2$$

Dieses in (2) eingesetzt gibt:

$$A - A' = \frac{1}{4 \sin A} \left\{(h + h')^2 - (h - h')^2 - ((h + h')^2 + (h - h')^2) \cos A\right\}$$
$$A - A' = \frac{1}{4 \sin A} \left\{(h + h')^2 (1 - \cos A) - (h - h')^2 (1 + \cos A)\right\}$$

Setzt man hier:

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}, \quad 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2},$$

so erhält man durch Zusammenfassung:

$$A - A' = \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \qquad (3)$$

Dieses ist die gebräuchlichste Formel zur Reduction eines Sextantenwinkels auf den Horizont.

Wenn h und h' in Minuten und $A - A'$ in Secunden gezählt werden, so hat man rechts noch den Factor $\frac{60''}{\varrho'}$ zuzusetzen, also:

$$(A - A')'' = \frac{60''}{\varrho'} \left(\frac{h + h'}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \qquad (4)$$

$$\log \frac{60''}{\varrho'} = 8.24188$$

Als Beispiel nehmen wir: Standpunkt Hannover, Technische Hochschule (Punkt E), die Theodolitmessung zwischen dem Marktthurm und dem Lindener Wasserthurm gab:

$$A = 65^0\ 30'\ 20'' \qquad h = 2^0\ 54' \qquad h' = 1^0\ 4' \tag{5}$$

Die Sextantenmessung zwischen dem Marktthurm und dem Lindener Wasserthurm gab:

$$A = 65^0\ 29'\ 38''\ \text{(bereits vom Indexfehler befreit)} \tag{6}$$

Die Berechnung nach (4) gibt:

$$\frac{A}{2} = 32^0\ 45',\ h = 174'',\ h' = 64'',\ \frac{h+h'}{2} = 119'',\ \frac{h-h'}{2} = 55'',$$

$$A - A' = +\ 159'' - 82'' = 77'' = 1'\ 7'' \tag{7}$$

Es ist also der Theodolitwinkel A auf den schiefen Winkel reducirt nach (3), (5) und (7): $A' = A - 1'\ 7'' = 65^0\ 29'\ 13''$.

Vergleicht man hiemit die Sextantenmessung (6) $= 65^0\ 29'\ 38''$, so ist diese um $25''$ grösser. Fasst man den ganzen Versuch als eine Sextantenprobe auf, so hat man das Resultat, dass der Sextant einen Winkel von 65^0 um $25''$ zu gross misst, ein Resultat, das auch mit anderen Untersuchungen ähnlicher Art stimmt.

Indessen kommt zu der soeben berechneten Vergleichung noch eine kleine Reduction wegen Sextantenparallaxe, zu der wir nun übergehen:

So lange man den Sextanten in freier Hand hält, hat man, wegen der Schwankungen, kein innerhalb der Sextanten-Dimensionen bestimmtes Centrum, auf welches sich die zu messenden Winkel als Scheitel beziehen, und bei allen astronomischen Messungen ist das auch ganz gleichgültig. Hat man aber nähere terrestrische Zielpunkte, so muss man sich für ein Winkelcentrum entscheiden, und dieses kann kein anderes sein als das Centrum des Stativs, auf welches der Sextant in diesem Fall gesetzt wird, um überhaupt feste Punkte zu haben.

In Fig. 2. ist C dieses Centrum, die bei der Messung auftretenden Strahlen schneiden sich aber in F, und geben dort den am Sextanten abgelesenen Winkel α, welcher verschieden ist von dem in C erscheinenden Winkel α_0. Zur Reduction brauchen wir die Excentricität e des Centrums C vom Fernrohr, nämlich e von C rechtwinklig zur Fernrohrachse gemessen, dann den Abstand $CS = d$ des Centrums C von der Mitte des grossen Spiegels S, und den Winkel δ, welchen die Verbindungsgerade CS mit der Fernrohrachse macht.

Damit hat man nach Fig. 2.:

$$\alpha_0 + \varepsilon_1 = \alpha + \varepsilon_2, \quad \alpha_0 = \alpha - \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

nun ist

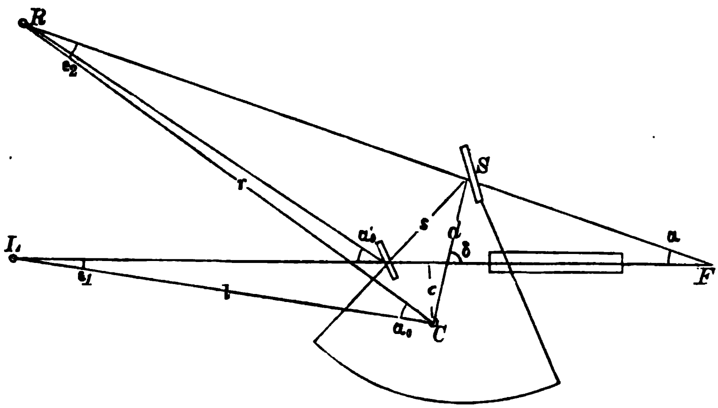
$$\varepsilon_1 = \frac{e}{l} \qquad \varepsilon_2 = \frac{d \sin (RSC)}{r} = \frac{d \sin (\delta + \alpha)}{r}$$

also

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{e}{l}\,\varrho + \frac{d\,\sin(\delta + \alpha)}{r}\,\varrho \tag{8}$$

Die Constanten e und d kann man unmittelbar am Sextanten abmessen. In unserem Falle ist (Fig. 2.) $e = 31$ mm, $d = 63$ mm, $\delta = 82^0$.

Fig. 2. Parallaxe des Sextanten.



Da es sich immer um weite Entfernungen handeln wird, wollen wir die Abstände l und r der Zielpunkte links und rechts in Kilometern nehmen, und deswegen auch e und d in diesem Maasse einsetzen, d. h.:

$$e = 0{,}000031 \text{ km} \qquad d = 0{,}000063 \text{ km}$$

Dieses in (8) gesetzt, gibt für unseren Sextanten:

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{6{,}4''}{l\text{ km}} + \frac{13{,}0''}{r\text{ km}}\,\sin(82^0 + \alpha) \tag{9}$$

Im Falle unseres vorigen Beispiels hatte der Marktthurm $l = 1{,}6$ km und der Wasserthurm $r = 2{,}4$ km Entfernung, und da $\alpha = 65^0$ war, haben wir nach (9):

$$\alpha_0 = \alpha - 4{,}0'' + 2{,}9'' = \alpha - 1{,}1''$$

was an (6) noch anzubringen ist, und $A' = 65^0\ 29'\ 37''$, sowie schliesslich die Correction $= -\ 24''$ statt früher $-\ 25''$ gibt.

Je nach Umständen kann man das Centrum vielleicht auch in dem kleinen Spiegel annehmen, und dann wird die Reduction einfacher, nämlich nach Fig. 2.:

$$\alpha_0' = \alpha + \frac{s}{r}\,\varrho\,\sin(2\beta + \alpha) \tag{10}$$

wo β der Schärfungswinkel des Sextanten (§ 33.) ist.

Diese Formel führt zugleich auf die Eigenschaft des Sextanten als

Distanzmesser. Visirt man e i n e n unendlich entfernten Punkt an, wie es bei der Bestimmung des Indexfehlers geschieht, so hat man $r = \infty$, also $\alpha_0' - \alpha = 0$. Nimmt man einen näher gelegenen Punkt, so dient $\alpha_0' - \alpha$, d. h. die vom Indexfehler befreite Ablesung, die wir nun ε nennen wollen, als Entfernungsmaass, denn

$$\varepsilon = \frac{s}{r}\,\varrho \sin 2\beta \text{ gibt } r = s\,\frac{\varrho}{\varepsilon} \sin 2\beta \tag{11}$$

Wegen der Kleinheit der Basis s ist aber die Anwendbarkeit auf sehr kurze Entfernungen beschränkt. Bei unserem Instrument ist $s = 0{,}059$ m und $2\beta = 32^0$ womit nach (11):

$$r = \frac{6449 \text{ m}}{\varepsilon},$$

also wenn $\varepsilon = 10''$, wird $r = 645$ m.

§ 41. Summarische Bestimmung der Sextantenfehler durch Fixsterndistanzen und terrestrische Distanzen.

Nachdem alle Einzelfehler des Sextanten untersucht und bestimmt sind, wie in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist, kann man daran denken, hieraus den Gesammtfehler zusammenzusetzen, und zwar haben wir ausser den Blendungsfehlern (§ 32. S. 171), welche jedenfalls einzeln zu berücksichtigen sind, Folgendes:

§ 34. und 36. S. 190 Einfluss der Spiegel- und Fernrohrneigungen.
§ 38. S. 195 Prismatischer Fehler des grossen Spiegels.
§ 39. S. 199 Excentricitäts- und Theilungsfehler.

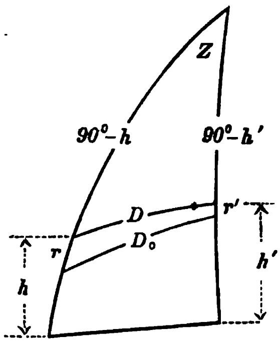
Indessen ist die Bestimmung der Excentricitäts- und Theilungsfehler nach § 39. so unsicher, nämlich nur etwa auf 1' genau, dass wir davon keinen Gebrauch für genaue Messungen, namentlich für Monddistanzen, machen können. Auch abgesehen hievon ist die Einzelbestimmung aller dieser Fehler so mühsam, dass man sich nach einer bequemeren Methode umsehen muss. Diese bequemere und zugleich genaueste Methode der Sextantenuntersuchung besteht in der Vergleichung von Sextantenmessungen mit anderweitig genau bekannten Winkelwerthen.

Zuerst haben wir hiezu terrestrische Winkel, welche man mit dem Theodolit genau messen, auf schiefe Winkel reduciren und dann mit den Sextantenmessungen vergleichen kann, wie bereits in § 40. S. 209 an einem Beispiel gezeigt worden ist.

Eine astronomische Probe erhält man, indem man die Breite eines anderweitig schon genau bestimmten Punktes mit dem Sextanten über dem künstlichen Flüssigkeitshorizont misst. Macht man dieses zu verschiedenen Jahreszeiten mit der Sonne, so bekommt man die Sextantencorrection an allen beliebigen Stellen, etwa zwischen 40^0 und 120^0.

Ein weiteres sehr gutes Mittel ist die Messung von Fixsterndistanzen, deren wahre Werthe man aus den Rectascensionen und Declinationen berechnen kann. Die Messungen müssen wegen Refraction auf wahre Distanzen reducirt werden, um mit den wahren Distanzen vergleichbar zu werden.

Fig. 1.
Distanzreduction für Refraction.



Diese Reductionsberechnung (welche ein besonderer Fall der bei Monddistanzen vorkommenden Reductionen ist) kann für den vorliegenden Zweck hinreichend genau so gemacht werden (vgl. Fig. 1.): Es sei D die gemessene Distanz und h h' die zugehörigen Höhen.

Dann besteht nach Fig. 1. zwischen diesen Grössen und dem Zenitwinkel Z die Gleichung:

$$\cos D = \cos (90^0 - h) \cos (90^0 - h') + \sin (90^0 - h) \sin (90^0 - h') \cos Z$$
$$\cos D = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z \qquad (1)$$

für die wahre Distanz D_0 sind die Höhen um die Refractionen r und r' kleiner als für die beobachtete Distanz D, also:

$$\cos D_0 = \sin (h - r) \sin (h' - r') + \cos (h - r) \cos (h' - r') \cos Z$$
$$\cos D_0 = (\sin h - r \cos h)(\sin h' - r' \cos h') + (\cos h + r \sin h)(\cos h' + r' \sin h') \cos Z$$

Wenn man dieses mit Vernachlässigung des Produktes rr' ausmultiplicirt, und mit (1) vergleicht, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\cos D_0 - \cos D = & - r \cos h \sin h' - r' \cos h' \sin h \\ & + r \sin h \cos h' \cos Z + r' \sin h' \cos h \cos Z\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Refractionen r und r' kann man den Cotangenten der Höhen proportional setzen (§ 7. S. 31.):

$$r = \alpha \operatorname{cotg} h \qquad r' = \alpha \operatorname{cotg} h' \qquad (3)$$

Damit wird (2):

$$\cos D_0 - \cos D = \alpha \left\{ - \cos^2 h \frac{\sin h'}{\sin h} - \cos^2 h' \frac{\sin h}{\sin h'} + 2 \cos h \cos h' \cos Z \right\}$$

Wenn man hier $\cos^2 h = 1 - \sin^2 h$ und $\cos^2 h' = 1 - \sin^2 h'$ setzt, und wieder (1) berücksichtigt, und wenn man zugleich links $\cos D_0 - \cos D = - (D_0 - D) \sin D$ einführt, so erhält man:

$$D_0 - D = \frac{\alpha}{\sin D} \left\{ \frac{\sin h}{\sin h'} + \frac{\sin h'}{\sin h} - 2 \cos D \right\} \qquad (4)$$

Die Refractionsconstante ist nach § 7. S. 31 $\alpha = 57''$, und dazu kann man noch die Correctionsfactoren für Temperatur und Luftdruck nach S. [12] nehmen. Die Näherung (3) ist jedenfalls von 15^0 an aufwärts

zulässig, und man wird schon deswegen keine Sterne in kleineren Höhen nehmen, damit man die Höhen h und h' selbst nicht sehr genau zu bestimmen braucht. Diese Höhen muss man nämlich für die Zeit der Distanzmessung selbst messen, oder aus der Ortszeit und Breite berechnen.

Als Beispiel diene folgendes: Die Sterndistanz Arctur-Wega wurde in Karlsruhe ($\varphi = 49^0\ 0'$, $\lambda = 33^m\ 40^s$ v. Gr.) am 1. October 1874 Abends $7^h\ 13^m\ 46^s$ mittlere Ortszeit bei 18^0 Lufttemperatur und 747 mm Barometer gemessen:

$$(D) = 59^0\ 0'\ 56'' \tag{5}$$

Die Messung geschah mit dem Sextanten von S. 157, der Indexfehler ist bereits berücksichtigt. Der Werth (5) ist das Mittel aus 10 rasch hintereinander von freier Hand genommenen Einstellungen und Ablesungen. Zur Reduction nehmen wir zuerst aus dem Nautical Almanac für 1874. 1. October:

S. 371 Arcturus	$\alpha = 14^h\ 9^m\ 55{,}45^s$	$\delta = +\ 19^0\ 50'\ 16{,}6''$
S. 381 Wega	$\alpha' = 18\ \ 32\ \ 41{,}47$	$\delta' = +\ 38\ \ 40\ \ 14{,}1$
	$\Delta\alpha = 4^h\ 22^m\ 46{,}02^s$	
oder nach S. [3]	$\Delta\alpha = 65^0\ 41'\ 30{,}3''$	

Die wahre Distanz D_0 findet sich aus der Gleichung:

$$\cos D_0 = \cos \Delta\alpha \cos\delta \cos\delta' + \sin\delta \sin\delta'$$

$$D_0 = 59^0\ 2'\ 41'' \tag{6}$$

Mit der angegebenen Ortszeit, Länge und Breite berechnet man die Höhen beider Sterne, nämlich:

$$h = 17^0\ 12' \text{ und } h' = 72^0\ 0'$$

Auf dieses folgt die Reduction nach (4). Mit h h' und D berechnet man in (4) den Klammerwerth $= 2{,}4983$ und hat dann

	$\log \{\ldots.\}$	0.39764
	$\log \operatorname{cosec} D$	0.06673
$\alpha = 57''$	$\log \alpha$	1.75587
Luft 18^0 S. [12]	$-$ 0.0131	9.98690
Barometer 747 S. [12]	$-$ 0.0026	9.99740
	$\log (D_0 - D)$	2.20454
	$D_0 - D =$	$160'' = 2'\ 40''$

Dieses zu (6) genommen gibt:

	$D =$	$59^0\ 0'\ \ 1''$
Nach (5) ist mit dem Sextanten gemessen	$(D) =$	$59\ \ 0\ \ 56$
Also Sextantencorrection	$D - (D) =$	$-\ 55''$

Auf diese und ähnliche Weise haben wir für den Sextanten von S. 157 nach und nach folgende 13 Correctionen erhalten:

Ablesung α	Correction $\Delta\alpha$	Ablesung α	Correction $\Delta\alpha$
28°	− 17″	59°	− 52″
30	+ 10	65	− 16
35	− 37	70	− 19
38	+ 6	84	− 3
40	− 16	93	− 21
54	− 46	95	− 66
		115	− 36

(7)

Der Verlauf dieser Werthe ist nicht günstig, namentlich dass bei 84° die Correction, welche bei 59° schon — 52″ betragen hatte, wieder auf — 3″ zurückgeht, ist auffällig. Wir haben es mit einem schlecht getheilten Instrumente zu thun, dessen Ablesungen ausserdem wegen Veränderlichkeit der Albidaden-Excentricität schwankend zu sein scheinen.

Wir haben die Werthe $\Delta\alpha$ von (7) durch eine empirische Funktion nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen:

$$\Delta\alpha = -0{,}51\,\alpha + 0{,}0016\,\alpha^2 \tag{8}$$

wornach folgende Tabelle berechnet ist:

α	$\Delta\alpha$	α	$\Delta\alpha$
0°	− 0″ ± 0″	70°	− 28″
10	− 5	80	− 31
20	− 10	90	− 33 ± 8″
30	− 14 ± 6	100	− 35
40	− 18	110	− 37
50	− 22	120	− 38 ± 19
60	− 25 ± 7	130	− 39

(9)

Wir lassen es dahingestellt, ob nicht eine rein graphische Ausgleichung der $\Delta\alpha$ von (7) denselben oder auch noch einen besseren Dienst thäte als die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, deren Resultat in (8) und (9) enthalten ist. Durch letztere Ausgleichung wurden zugleich die bei (9) beigesetzten mittleren Fehler ± 6″ ± 7″ ± 8″ ± 19″ erhalten.

Vergleicht man mit (9) die unter (26) § 39. S. 205 angegebenen Werthe, so findet man, dass jene Werthe (26) jedenfalls zu gross sind.

Die Deutsche Seewarte in Hamburg befasst sich amtlich mit der Untersuchung von Sextanten, welche von Seemännern oder von Mechanikern zu diesem Zwecke eingesendet werden. Mittheilungen hierüber hat Assistent Eylert gegeben in den „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie", IV. Jahrgang 1876, S. 166—172 und VI. Jahrgang 1878, S. 374—384.

Es wurden 6 terrestrische Zielpunkte in Entfernungen über 4 Seemeilen (= 1 geogr. Meile = 7,4 Kilometer) durch Theodolitmessungen in

horizontalem und verticalem Sinne genau bestimmt und die 15 Positionswinkel zwischen den 6 Zielpunkten nach der Formel, welche wir unter (4) S. 208 mitgetheilt haben, genau berechnet. Nun geben die auf demselben Centrum gemachten Sextantemessungen (mit Vernachlässigung der Parallaxe wegen genügend grosser Entfernungen) durch Vergleichung mit den berechneten Positionswinkeln sofort die Sextantencorrectionen, aus denen dann durch Ausgleichung eine Correctionstabelle erhalten wird.

Diese Ausgleichung wird von der Deutschen Seewarte nach der Methode der kleinsten Quadrate gemacht unter der Annahme, dass die Fehler nur von Excentricität herrühren, indem nur solche Instrumente zugelassen werden, deren übrige Fehler, namentlich Fehler des grossen Spiegels, sich bei vorheriger Untersuchung klein ergeben haben.

Dass diese Fehlerbestimmung der Sextanten nicht überflüssig ist, zeigt die Tabelle von S. 380—382 des VI. Jahrgangs der Annalen der Hydrographie, welche 231 Instrumente umfasst. Der Werth 2ε (s. o. (18) S. 203) ist über 5′ in 17 Fällen oder 7 %. Es kommen Excentricitätsfehler bis zu 8′ vor, und in einem extremen Fall war sogar $\varepsilon = 2^0\ 21'$.

Bei 48 Sextanten mit Ablesung 10″ konnte keine Excentricität nachgewiesen werden. Bei sämmtlichen Sextanten erster Classe (Ablesung 10″, Vergrösserung mindestens 6fach) ergab sich aus der Ausgleichung ein mittlerer Fehler von nur 7,8″.

Weiteres hierüber gibt das „Archiv der deutschen Seewarte", IV. Jahrgang 1881, Nr. 4. Der Sextant, eine Studie über die Resultate aus der Prüfung von 700 Reflexionsinstrumenten, von H. Eylert.

§ 42. Besondere Sextanten-Constructionen.

Sextant mit *zwei* kleinen Spiegeln.

Das „Journal des géomètres" 1873, S. 88—90 gibt eine Beschreibung und Zeichnung eines von M. Collignon in Marboy (Luxemburg) erfundenen Sextanten, welcher durch Anwendung von zwei kleinen (festen) Spiegeln Winkel bis zu 180° zu messen gestattet (vgl. Helmert, Zeitschr. f. Verm. 1877. S. (38)).

Fig. 1. zeigt die Gestalt des Instrumentes in halber natürlicher Grösse, und zugleich die Wege der verschiedenen Lichtstrahlen. Die austretenden Strahlen werden entweder bei O oder O' beobachtet (entweder mit blossem Auge oder auch mit Fernröhren). Der grosse Spiegel S und der erste kleine Spiegel s gestatten die ganz gewöhnliche Sextantenmessung mit Winkelablesung von 0° bis 120° oder 130°, an der äusseren Bezifferung des Limbus. Hiezu gehören die Strahlen L und R, welche sich, nach der Doppelreflexion von R, in O vereinigen. Die hiezu gehörenden Strahlen sind in der Figur gestrichelt (------) gezogen, die Winkel der Strahlen sind nicht eingeschrieben.

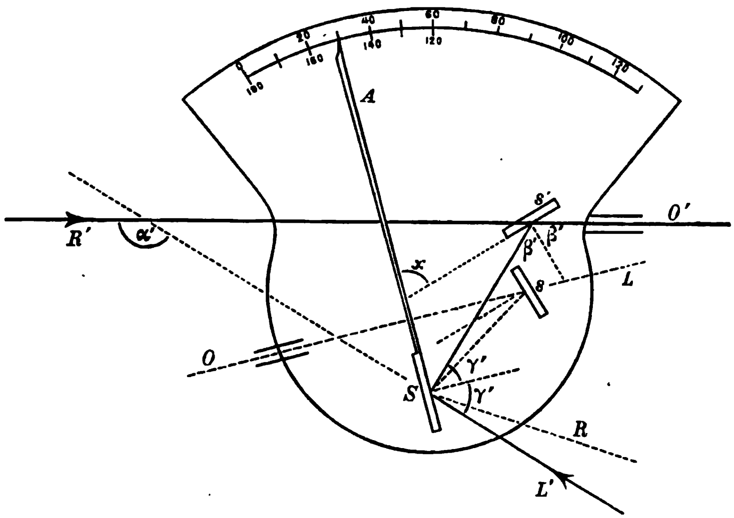
Für grössere Winkel von 120° bis 180° ist nun ein zweiter kleiner Spiegel s' angebracht, der rechtwinklig zum ersten s steht. Das Auge

begibt sich zu dieser Beobachtung nach O', und sieht den rechten Strahl R' des jetzt zu messenden stumpfen Winkels α' direct, und den linken Strahl L' zweifach reflectirt. Dabei wird es aber nöthig, mit dem linken Auge in O' zu beobachten, damit nicht der Kopf des Beobachters die von hinten her kommenden Strahlen L' von dem grossen Spiegel abhält. Statt dessen kann man auch das Instrument umwenden und dann in O' wieder mit dem rechten Auge (was den meisten Menschen bequemer ist) beobachten.

Nach Fig. 1. ist:

$$\alpha' = 180^0 - 2\beta' + 180^0 - 2\gamma'$$
$$x = 90^0 - \beta' + 90^0 - \gamma'$$
$$\alpha' = 2x$$

Fig. 1. Sextant mit zwei kleinen Spiegeln s und s'.



Steht die Alhidade auf 180^0, so ist $x = 90^0$ und $\alpha' = 180^0$, und im Uebrigen wird der Werth von α' mit der Alhidade an der inneren Bezifferung des Limbus zwischen 180^0 und 120^0 abgelesen.

Da die beiden Theilungen, aussen von 0^0 bis 60^0, und innen von 120^0 bis 180^0, einander entgegen laufen, so muss die Alhidade (deren Ende wir in Fig. 1. als einfachen Zeiger gezeichnet haben), einen doppelten oder einen nach zwei Richtungen brauchbaren Nonius haben.

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung des Indexfehlers für den zweiten Spiegel s'. So lange der erste kleine Spiegel s gebraucht wird, wird der Index in gewöhnlicher Weise durch Zusammenbringen beider Bilder eines Zielpunktes bestimmt; beim zweiten Spiegel s' geht dieses aber nicht mehr, weil nur Winkel zwischen 120^0 und 180^0 vorkommen. Man kann nun etwa zwei nahezu diametrale Strahlen L' und R' aufsuchen, und deren Winkel α' in zwei Lagen des Instruments beobachten, woraus sich der Index für 180^0 bestimmen lässt, aber erstens erfordert dieses

abwechselnde Beobachtung mit dem linken und mit dem rechten Auge, wovon wir oben schon gesprochen haben, und zweitens entstehen bei Winkelmessungen von 180° mit Reflexion mancherlei theoretische und praktische Bedenken (auf welche wir später, § 54., näher eingehen werden).

Man kann aber auch den Indexfehler für den zweiten Spiegel von dem ersten Spiegel übertragen, denn einen Winkel von 120° kann man nach beiden Arten messen. Thut man dieses und erhält das erstemal $120^0 + w$, das zweitemal $120^0 + w'$, so ist

$$120^0 + w - i = 120^0 + w' - i'$$

wodurch i' aus i bestimmt wird.

Verschiedene weitere Angaben über besondere Sextanten-Constructionen finden wir in dem „Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876, Braunschweig 1878" S. 180—183 (Helmert, Instrumente für höhere Geodäsie, Sextanten), woraus wir Folgendes citiren:

Der Doppelsextant besteht aus zwei, sozusagen in zwei Stockwerken übereinander angeordneten Sextanten, welche aber ein Fernrohr gemeinsam haben. Diesem Fernrohr gegenüber stehen zwei kleine (feste) Spiegel übereinander, mit einem Zwischenraum für directe Strahlen (das Objectiv des Fernrohrs muss also ziemlich gross sein, um sowohl den beiden kleinen Spiegeln, als auch dem Zwischenraum zwischen beiden noch Fläche zu bieten). Die beiden kleinen Spiegel machen unter sich den Winkel 2β, wenn β der in § 33. behandelte Schärfungswinkel ist. Den beiden übereinander liegenden kleinen Spiegeln entsprechen zwei getrennte grosse Spiegel mit zugehörigen Alhidaden und Theilkreisen.

Man kann mit dieser Einrichtung zwei Winkel gleichzeitig messen (zu pothenotischer Bestimmung), muss aber hiezu die beiden Alhidaden gleichzeitig so bewegen, dass alle drei Bilder im Fernrohr zur Deckung gelangen, was wohl etwas schwierig auszuführen sein wird.

Eine zweite Anwendung des Doppelsextanten besteht darin, dass man nur die beiden doppelt reflectirten Bilder zur Deckung bringt, damit kann man Winkel bis über 180° erhalten, und hat mit Fernrohrrichtung zwischen beiden Zielpunkten eine Handhabung wie beim Prismenkreis (§ 53.).

Eine dritte Anwendung des Doppelsextanten soll endlich darin bestehen, dass man rasch hintereinander zwei Winkel einstellen kann, ohne dazwischen ablesen zu müssen, z. B. Monddistanz und Mondhöhe; Dieses wäre etwa entsprechend der Benutzung von zwei getrennten Sextanten, die nacheinander in Benutzung genommen werden.

Sextanten mit Anschlag-Alhidade gestatten ebenfalls die rasche Messung mehrerer Winkel und nachherige Ablesung, indem man die Anschläge bei der Messung feststellt und nachher zur Ablesung benutzt.

(Weiteres hierüber s. Bericht über d. Ausstellung wissensch. Apparate im South-Kensington-Museum zu London 1876, von Dr. R. Biedermann. London 1877, S. 774, Nr. 4503.)

§ 43. Spiegelvollkreise.

Der Grundgedanke der Winkelmessung mit dem Spiegelsextanten, nämlich Vereinigung zweier Lichtstrahlen durch doppelte Reflexion, ist durchaus nicht an die Sectorform des Limbus geknüpft; die Beschränkung der Theilung auf ein Sechstel oder ein Achtel des Kreisumfanges hat ihren Grund nur in mechanischen Bequemlichkeits-Rücksichten, denn das Instrument wird dadurch leichter, überhaupt handlicher, was bei der Messung ohne festes Stativ sehr wichtig ist. Andererseits gehen dabei viele Vortheile verloren, vor Allem die Eliminirung der Alhidaden-Excentricität durch zwei diametrale Nonien, und die Möglichkeit der Repetitionsmessung.

Wir betrachten im Folgenden verschiedene Spiegelkreis-Constructionen.

I. Spiegel-Repetitionskreis nach Borda, von Lenoir (Fig. 1.).

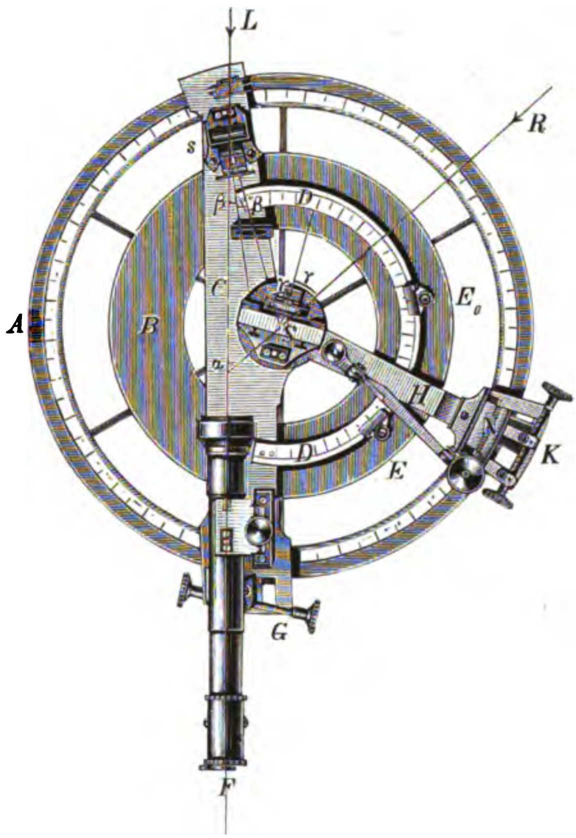
Dieses im Jahre 1862 — 1863 für unsere Sammlung erworbene Instrument hat auf dem Limbus die Inschrift: „Schwartz, dit Lenoir à Paris (Nr. 135)“ und auf dem Fernrohr: „Steinheil in München (Nr. 1895)“. Der Limbusdurchmesser ist 25 cm, die Theilung sexagesimal, von 0^0 bis 720^0 ($= 2 \times 360^0$) durchlaufend. Der Hauptvortheil des Vollkreises, die Excentricitäts-Elimination, ist nicht unmittelbar ausgenutzt, denn es ist nur eine einarmige Alhidade HK mit einem Nonius N vorhanden; dagegen ist die Einrichtung zur Repetition getroffen, und da man damit im ganzen Kreis herum kommen kann, hat man allerdings einen Ersatz für die unmittelbare Eliminirung der Excentricität.

Die Reflexionswirkung ist ganz dem Sextanten entsprechend (vgl. S. 155 Fig. 1.). S ist der grosse Spiegel, s der kleine Spiegel, der zu messende Winkel α zwischen den Strahlen L und R ist $\alpha = 2\gamma - 2\beta$, wo γ der Reflexionswinkel am grossen Spiegel und β der Reflexionswinkel am kleinen Spiegel ist. Dieser Winkel β (Schärfungswinkel nach § 33.) ist sehr klein, nämlich nur 8^0, was sehr günstig ist; (beim Sextanten kann man wegen Raummangels β kaum kleiner als 14^0 machen).

Was nun die Repetitionseinrichtung betrifft, so ist auf dem Limbus, zu dessen Körper auch noch die Ringplatte B gehört, ein Lineal C (Grosse Alhidade) drehbar aufgesetzt, welches das Fernrohr F, den kleinen Spiegel s und den grob getheilten Halbkreis D in einem Stück fest verbunden hält. Dieses ganze System C, F, s, D, welches um den Limbusmittelpunkt drehbar ist, hat Hemmung und Mikrometerwerk bei G.

Unabhängig von dieser Drehung ist die Drehung der kleinen (eigentlichen) Alhidade H, welche den grossen Spiegel S nach Sextantenart fest trägt, bei K eine Hemmung und Mikrometer, und bei N einen Nonius zum Kreisablesen hat.

Fig. 1. Spiegel-Repetitionskreis nach Borda von Lenoir.
(Maassstab 1 : 4. Kreisdurchmesser = 25 cm.)



Um einen Winkel (L, R) zu messen, bringt man die Alhidade H in solche Stellung, dass die Bilder von L und R sich decken, und liest den Nonius N ab, die Ablesung sei a. Ausserdem hat man (vorher oder nachher) diejenige Ablesung a_0 zu nehmen, welche der Parallelstellung des grossen und kleinen Spiegels entspricht (d. h. was man beim Sextanten Indexfehlerbestimmung nennt). Die Differenz $a - a_0$ beider Ablesungen gibt den zu messenden Winkel. So lange die Hemmung G der grossen Alhidade festbleibt, kann man die Ablesung a_0 für parallele Spiegel auch

zu mehreren Messungen a gemeinsam benutzen, ebenso wie man beim Sextanten eine Indexfehlerbestimmung unter Umständen für längere Messungsreihen beibehält.

Es entspricht aber dem Wesen des Instrumentes als Repetitionskreis, gerade nicht mit einer und derselben Stellung der grossen Alhidade C wiederholte Messungen zu machen, sondern nach jeder Messung auch die grosse Alhidade zu verstellen, um an möglichst verschiedenen Theilen der Kreistheilung herumzukommen. Hat man z. B. (in runden Zahlen) einen Winkel $\alpha = 10^0$ durch zwei Ablesungen $a_1 = 138^0$ $a_0 = 128^0$ bestimmt, so soll man für die nächste Messung $138^0 = a_0$ machen, und man wird dann $a_2 = 148^0$ ablesen, und als zweite Messung $148^0 - 138^0 = 10^0$ erhalten, gerade so wie man es bei der Theodolitrepetition gewohnt ist. Um nun, nachdem eine erste Messung erledigt ist, die Einstellungen für alle folgenden Messungen rasch zu finden, hat man auf der groben Halbkreistheilung D zwei verschiebbare und feststellbare Anschlagknöpfe E_0 und E angebracht, von denen der eine E_0 für Parallelstellung beider Spiegel (Indexfehler) und der andere E für die Coincidenz beider Strahlen L und R bestimmt ist. Die grobe Halbkreistheilung D, welche von der Mitte nach beiden Seiten bis 160^0 geht, ist hiezu gar nicht unbedingt nöthig, man stellt etwa E_0 versuchsweise fest, so dass die Spiegel parallel sind, und E ebenfalls durch Versuch, so dass L und R sich decken; dann kann man die Klemmung G beruhigt lösen, und bekommt mit dem Fernrohr nach L zielend bei beliebiger Kreisstellung sofort nahezu eine Indexeinstellung beim Anschlag der kleinen Alhidade an E_0 und nahezu Objecteinstellung beim Anschlag an E. Da ausserdem die Zielpunkte L und R in Hinsicht auf directe Visur und Doppelreflexion vertauscht werden können, so kann hiefür auch E_0 (weiter von H weggeschoben) als Objectanschlag und E als Indexanschlag dienen.

Man kann also mit diesen Einrichtungen einen Winkel beliebig von links nach rechts oder von rechts nach links repetiren, und aus einer Anfangsablesung a_0 und einer Schlussablesung a_n den Winkelwerth $\alpha = \frac{a_n - a_0}{n}$ berechnen, ohne die Zwischenablesungen zu kennen. Indessen werden sich wohl auch hier constante Fehlereinflüsse bemerkbar machen, wie solche bei der Theodolitrepetition gefunden wurden. Steht z. B. die Alhidade H auf der Objectablesung a_1 fest, und man dreht die grosse Alhidade C sammt dem Fernrohr bis zum Anschlag des Knopfes E_0, so wird man sehr vorsichtig sein müssen, damit dieser Anschlag in mechanischem Sinne nicht zu heftig wird.

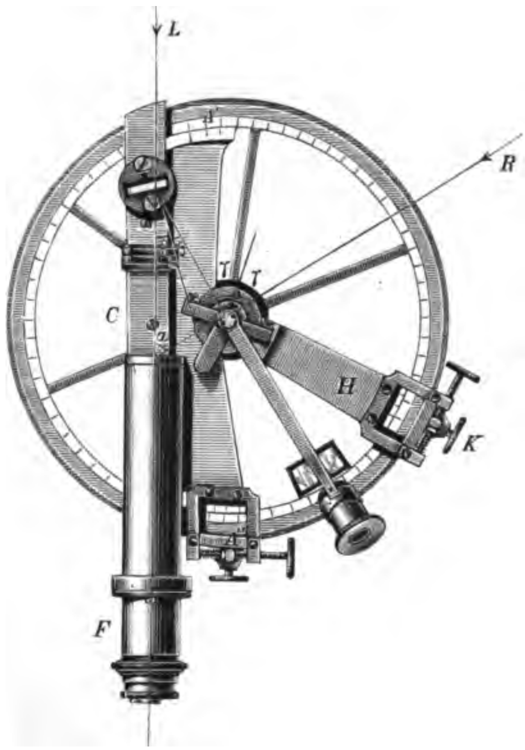
Da man aber gar nicht gezwungen ist, von den Anschlagknöpfen E_0 und E einen die Messung irgendwie beeinflussenden Gebrauch zu machen, und da man auch die Alhidadenexcentricität durch Kreisumstellung um $180''$ eliminiren kann, erscheint das ganze Instrument als eine sehr zweckmässige Construction, von der wir nur bedauern, dass sie (mit doppelarmiger Alhidade H) in neueren Ausführungen von unseren Mechanikern in der Regel nicht mehr geliefert wird.

Die Correctionsvorrichtungen, Blendungen etc. des Borda-Lenoir'schen Kreises (Fig. 1.) sind im Wesentlichen dieselben wie beim Sextanten.

II. Spiegelkreis von Meyerstein (Fig. 2.).

Eine andere Ausführung des Sextantenprincips mit Vollkreis zeigt Fig. 2. nach einem Instrument unserer Sammlung von M. Meyerstein in Göttingen. Die Construction ist im Wesentlichen dieselbe wie beim Borda'-schen Kreise Fig. 1., jedoch hat auch die grosse Alhidade C zwei diametral stehende Nonien A' und A'' mit Hemmung und Mikrometer, während bei Borda die grosse Alhidade C zwar Hemmung und Mikrometer G hat, aber keine Ablesevorrichtung. Andererseits fehlen bei dem Kreise Fig. 2. die Anschlagknöpfe E_0 und E mit grober Hülfstheilung D von Fig. 1. Die Bezifferung des Meyerstein'schen Kreises geht nicht wie bei Borda von 0^0 bis 720^0 durch, sondern geht von 2 Nullpunkten, je nach beiden Seiten, also im Ganzen 4mal von 0^0 bis 180^0.

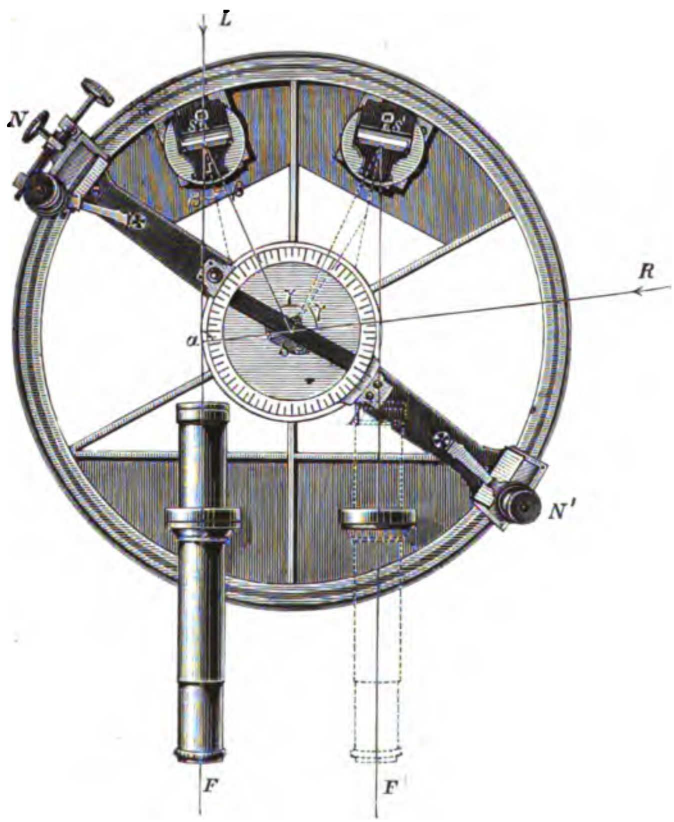
Fig. 2. Spiegelkreis von Meyerstein.
(Maassstab 1 : 2,9 Kreisdurchmesser = 15,5 cm.)



III. Doppelspiegelkreis (Fig. 3.).

Nach verschiedenen Ueberlegungen, die später in § 56. zusammengefasst werden werden, liess ich, mit Benutzung der Bestandtheile eines älteren von Meyerstein nach Pistor-Martins gefertigten Spiegel-Prismenkreises, den in Fig. 3. dargestellten Doppel-Spiegelkreis herstellen. (Durch Mechaniker Randhagen in Hannover.)

Fig. 3. Doppel-Spiegelkreis.
(Maassstab 1 : 3,6, Kreisdurchmesser = 25 cm.)



Dieser Kreis zeigt das gewöhnliche Sextantenprincip, mit kleinem Schärfungswinkel $\beta = 13^0$ in zweifacher Anwendung.

Der grosse Spiegel S dient für beide Fälle gemeinsam, und befindet sich während einer Messung fest auf der Alhidade, welche in zwei Nonien

N N' endigt. Mit dem links eingeschraubten Fernrohr F und mit dem linken kleinen Spiegel s hat man nun eine gewöhnliche Sextantenreflexion ebenso wie in Fig. 1. S. 155. Da aber noch ein zweiter kleiner Spiegel s' rechts angebracht ist, und auch das Fernrohr in eine zweite Lage F' eingeschraubt werden kann, so haben wir nun noch eine zweite Sextantenreflexion rechts, symmetrisch zur ersten links.

Der grosse Spiegel S, welcher beiden Reflexionssystemen gemeinsam dient, ist in unserer Zeichnung, Fig. 3., ungefähr parallel den Alhidadenarmen $N N'$ gestellt, und in diesem Falle hat die Alhidade für beide Systeme gleichen Spielraum, etwa bis 120° Winkelmessung. Um diesen Spielraum nach der einen oder andern Seite zu vergrössern, oder um überhaupt möglichst verschiedene Stellen des Limbus zur Messung zu benutzen, kann man den grossen Spiegel S auf der Alhidade auch drehen, und in verschiedenen Lagen feststellen, wozu dem Index A gegenüber eine Feststellschraube dient. Der kleine Kreis im Innern, welcher nur roh getheilt ist, dient dazu, verschiedene Stellungen des grossen Spiegels auf der Alhidade zu bezeichnen.

Die Anwendung dieses Instruments mag ein Beispiel zeigen, bei welchem wir zur Vereinfachung nicht die beiden Nonienablesungen N und N', sondern sofort die Nonienmittel angeben. L sei der linksseitige, R der rechtsseitige Zielpunkt.

I. Fernrohr links.

Deckung beider Bilder L gibt .	118° 1′ 40″
Deckung L und R.	128 30 10
Gemessener Winkel (L, R) . . .	10° 28′ 30″

II. Fernrohr rechts.

Deckung beider Bilder R. . . .	170° 22′ 10″
Deckung L und R.	159 55 0
Gemessener Winkel (R, L) . . .	— 10° 27′ 10″
Gesammtmittel beider Messungen	10° 27′ 50″
Differenz zwischen I und II. . .	1 20

Die Differenz beider Indexfehlerablesungen 170° 22′ 10″ — 118° 1′ 40″ = 52° 20′ 30″ ist die doppelte Summe der beiden Schärfungswinkel β und β' der beiden kleinen Spiegel, es ist also $\beta + \beta' = 26^0\ 10'$, und wenn man annehmen dürfte, dass das Instrument in Bezug auf s und s' sowie F und F' genau symmetrisch gebaut sei, wäre nun $\beta' = \beta = 13^0\ 5'$. Jedenfalls muss die Summe $\beta + \beta'$ bei verschiedenen Messungen constant sein, was als Messungsprobe benutzt werden kann.

Wenn der zu messende Winkel α zufällig $= 2\beta$ wird, und das Fernrohr sich links in F befindet, so wird es nöthig, den rechtseitigen kleinen Spiegel s' zu entfernen, weil er für die Reflexion auf dem grossen

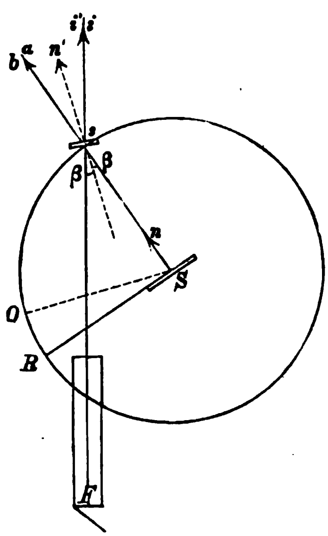
Spiegel ein Hinderniss würde. Es sind daher die beiden Spiegel *s* und *s'* in schwalbenschwanzförmigen, genügend langen Führungen zum Wegnehmen und Wiedereinsetzen eingerichtet.

Die obenerwähnte Differenz 1' 20" zwischen den Messungen I und II deutet auf einen ersten Vortheil des Doppelspiegelkreises. Abgesehen von unregelmässigen Messungsfehlern enthält diese Differenz jedenfalls den doppelten prismatischen Fehler des grossen Spiegels (§ 38.), welcher im Mittel aus I und II eliminirt wird. Weitere Vortheile der Doppelspiegel-Construction werden in § 56. betrachtet werden.

§ 44. Das dreifach reflectirte Fadenbild.

Die Prüfung und Berichtigung der Reflexionsvollkreise kann nach denselben Methoden gemacht werden, welche wir bereits beim Sextanten in § 31. bis § 34. angegeben haben.

Fig. 1. Das dreifach reflectirte Fadenbild.



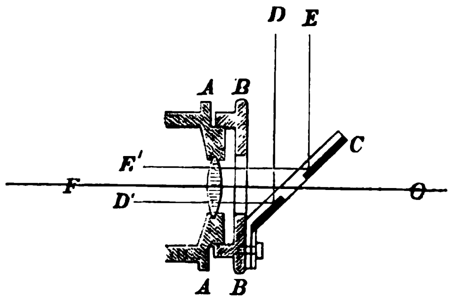
Ausserdem besteht aber bei diesen Kreisen noch ein vorzügliches Prüfungsmittel, welches beim gewöhnlichen Sextanten entweder gar nicht, oder nur mit Hindernissen anwendbar ist, nämlich die dreifache Reflexion des Fadenkreuzes (Nouvelle méthode pour déterminer certaines constantes du sextant. Note de M. Gruey. Comptes rendus hebd. 93. Band, 1881, S. 41 — 44 und Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881, S. 310). Das Princip ist sehr einfach: Bringt man den grossen Spiegel *S* in solche Stellung, dass seine Normale nach der Mitte des kleinen Spiegels gerichtet ist (Fig. 1.), so machen die Lichtstrahlen, welche von dem Fadenkreuz *F* ausgehen, den Weg *FsSsF*, d. h. diese Strahlen kommen auf ihrem eigenen Wege wieder nach *F* zurück.

Hiezu ist aber nöthig, dass das Fadennetz des Fernrohrs künstlich beleuchtet werde, oder dass man nur mit einem Diopterrohr ohne

Glaslinsen operire, dessen Fadenkreuz man mit den einfachsten Mitteln in der Reflexion sichtbar machen kann (s. unten Fig. 4. S. 228).

Zur Beleuchtung des Fadennetzes im Fernrohr dient der in Fig. 2. gezeichnete vor das Ocular aufgeschraubte kleine Spiegel (vom Mechaniker Bamberg). *A A* ist das Ocular, *B B* ist ein vor das Ocular geschraubter Ring, der den schiefgestellten Spiegel *C* trägt. Dieser Spiegel *C* reflectirt nach der Ocularrichtung hin, hat aber in der Mitte eine kleine von Folie freie Stelle, welche dem Auge *O* das Durchschauen gestattet, während seitlich aufgefangene Lichtstrahlen *D* und *E* durch den Spiegel nach *D'* und *E'* geworfen werden, und das dort angebrachte Fadenkreuz beleuchten. Als Strahlen *D* und *E* nimmt man directe Sonnenstrahlen, oder wenn die Sonne nicht scheint, kann man auch ein gewöhnliches Lampen- oder Gaslicht auf den Spiegel fallen lassen, wenn nur zuvor das Zimmer etwas dunkel gemacht ist. Diese beiden Methoden haben wir sofort beim ersten Versuch erprobt gefunden. Man sieht dann, wenn man den grossen Spiegel, mit der Normalen gegen den kleinen Spiegel gerichtet, langsam dreht, das dreifach reflectirte Bild des Fadennetzes erscheinen, und sich mit dem direct gesehenen Fadennetze überdecken.

Fig. 2. Fadenbeleuchtungsspiegel *C*.



Bei gewöhnlichen Sextanten ist diese Methode meist nicht anwendbar, weil hiezu die Alhidade etwa 15° über den Nullpunkt des Limbus z u r ü c k gedreht werden müsste, was durch den Fernrohrhalter verhindert wird, und höchstens nach Abschrauben des Fernrohrhalterringes *D* Fig. 2. § 28. S. 157 ausführbar wäre. Dagegen bieten die Reflexions-V o l l kreise meist kein Hinderniss dieser Art. Jedenfalls sollte der Mechaniker bei der Anordnung der einzelnen Constructionstheile hierauf Rücksicht nehmen, und auch die Theilung genügend weit rückwärts ausführen und beziffern.

Der erste Vortheil der dreifachen Reflexion besteht nun in der bequemen Bestimmung des S c h ä r f u n g s w i n k e l s β. Man braucht nur die der dreifachen Reflexion entsprechende Kreisablesung *R* (Fig. 1.) zu nehmen, und mit der Ablesung *O* für den Indexfehler zu vergleichen, um damit 2β in aller wünschenswerthen Genauigkeit zu haben. (2β statt β wegen der D o p p e l bezifferung des Sextanten.) Diese Methode der Bestimmung von β ist allen früher auf S. 174—176 erwähnten Methoden unbedingt vorzuziehen.

Der zweite und noch viel wichtigere Vortheil der dreifachen Reflexion besteht in der Prüfung der Fernrohr- und Spiegelneigungen. Denken wir vorerst die Fernrohrachse genau parallel der Kreisebene, dann muss das dreifach reflectirte Fadenbild sich mit dem direct gesehenen Faden in

gleicher Höhe decken, erscheint das dreifach reflectirte Fadenbild über oder unter dem wirklich gesehenen, so muss man diese Höhendifferenz durch Correction der Spiegelneigungen wegschaffen. Doch wird dieses nur durch mehrere Versuche gelingen, weil immer auch die Parallelität beider Spiegel durch die Indexfehlerprobe (§ 31. S. 168) wieder hergestellt werden muss.

Die Annahme, dass die Fernrohrachse parallel der Kreisebene sei, haben wir zunächst nur zu einer ersten Veranschaulichung der Verhältnisse gemacht, es ist aber leicht einzusehen, dass die Fernrohrneigung i an und für sich durch das dreifach reflectirte Fadenbild überhaupt nicht untersucht werden kann, sondern nur die relativen Neigungen beider Spiegel gegen die Fernrohrachse.

Wir verfolgen nun den Weg der Lichtstrahlen nach dem Satze (3) § 35. S. 182. Behalten wir hiezu alle Bezeichnungen von Fig. 1. und Fig. 2. § 36. S. 184 bei, so erhalten wir mit Zuziehung von Fig. 1. Folgendes:

Erste Reflexion am kleinen Spiegel:

$$i + b = 2\,n' \cos\beta \tag{1}$$

Reflexion am grossen Spiegel, mit $\gamma = 0$:

$$b + a = 2\,n \cos\gamma = 2\,n \tag{2}$$

Zweite Reflexion am kleinen Spiegel:

$$a + i' = 2\,n' \cos\beta \tag{3}$$

wo i' die Neigung des nach dreifacher Reflexion zurückkehrenden Strahles ist, während i die Neigung der Fernrohrachse ist. Diese drei Gleichungen (1) (2) (3) geben:

$$i + i' = 4\,n' \cos\beta - 2\,n \tag{4}$$

da β ziemlich klein, etwa $= 15^0$ ist, und $\cos 15^0 = 0{,}966$ nahe $= 1$ ist, kann man wohl die letzte Gleichung (4) so schreiben:

$$i + i' = 4\,n' - 2\,n \tag{5}$$

und, um die relativen Neigungen hervortreten zu lassen, schreiben wir dieses in die Form:

$$(i' - i) = 4\,(n' - i) - 2\,(n - i) \tag{6}$$

Die Fernrohrachsenneigung i selbst kommt also gar nicht in Betracht (wie wir auch schon vorher eingesehen hatten) sondern nur die Neigungsdifferenzen $i' - i$, $n' - i$ und $n - i$, und da bei einem zum Messen brauchbaren Instrument wegen der Bestimmung des Indexfehlers die beiden Spiegelnormalen gleich geneigt sein müssen (§ 31. S. 168) setzen wir in (6) nun $n' = n$ und haben:

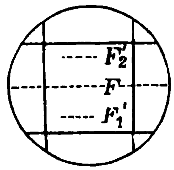
$$(i' - i) = 2\,(n - i) \tag{7}$$

Ist $i' = i$ so ist auch $n = i$, d. h. wenn das dreifach reflectirte Fadenbild sich mit dem Faden selbst deckt, und beide Spiegel durch die

Indexprobe parallel gemacht sind ($n' = n$), so ist die Fernrohrneigung i der Spiegelneigung n gleich, und denkt man sich die drei Achsen, nämlich die Fernrohrachse und die beiden Spiegelnormalen in eine Verticalebene gedreht, so erscheint die Fernrohrachse rechtwinklig zu beiden Spiegelebenen.

Nach § 36. S. 188 ist dieser Fall $n = i$ der für die Sextantengenauigkeit sehr günstige. Wir haben nun nur noch an der Hand der Formeln (6) und (7) zu zeigen, wie man durch wenige Versuche $i' = i$ machen kann. In Fig. 3. sei F die Mitte des direct gesehenen Fadennetzes, und die Mitte des dreifach reflectirten Fadennetzes falle zuerst nach F_1', n' ist $= n$ vorausgesetzt, es gilt also die Gleichung (7)

Fig. 3.
Dreifach reflectirtes Faden-Mittenbild F_1' oder $_2'$.



$$(i' - i)_1 = 2(n - i) \tag{8}$$

Nun soll zuerst der kleine Spiegel corrigirt werden, so dass $n' - i = 0$ wird, das hat zur Folge, dass (6) übergeht in:

$$(i' - i)_2 = -2(n - i) = -(i' - i)_1 \tag{9}$$

und wenn man dann noch den grossen Spiegel corrigirt, so dass $n - i = 0$ wird, so wird endlich auch $i' - i = 0$ werden.

Man hat also im Zusammenhang Folgendes, wobei $F F_1' F_2'$ die Mitte des Fadennetzes vorstellt:

Mit gleich geneigten Spiegeln ($n' = n$ durch die Indexfehlerprobe) findet man, dass das dreifach reflectirte Bild F_1' nicht in Deckung mit dem directen Bild F ist. Nun nimmt man die Correctionsschraube des kleinen Spiegels (n') in Angriff und bringt das Bild F_1' auf die andere Seite der wirklichen Fadenmitte F, symmetrisch nach F_2', dadurch ist die Parallelität beider Spiegel in der Nullstellung zerstört worden, man macht daher nun die gewöhnliche Indexfehlerprobe, und berichtigt am grossen Spiegel so, dass die Bilder wieder über einander gehen. Geht man nun in die Lage des dreifach reflectirten Bildes zurück, so wird, wenn alles richtig geschehen ist, das dreifach reflectirte Bild sich mit der wirklichen Fadenmitte decken.

Man könnte statt dessen auch mit der Correction des grossen Spiegels beginnen, es ist dieses aber weniger gut, denn eine der vorigen analoge Betrachtung zeigt, dass man in diesem Falle die erstmals beobachtete Abweichung des Bildes F_1' von F zuerst in ihrem eigenen Sinne verdoppeln müsste.

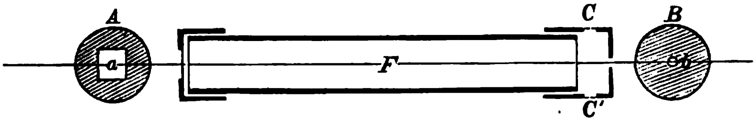
Statt durch unsere Gleichungen (6) bis (9) kann man die im Vorstehenden behandelten Beziehungen auch durch Aufzeichnung der Strahlen mit der Annahme, dass dieselben alle in einer Verticalebene liegen ($\beta = 0$), untersuchen.

Die im Vorstehenden behandelte Art der Untersuchung und der dadurch ermöglichten Berichtigung der Spiegelneigungen ist den in § 34.

hiefür angegebenen Methoden unbedingt vorzuziehen, und es ist nur zu bedauern, dass die gewöhnlichen Sextanten die Rückdrehung der Alhidade bis zu — β nicht gestatten.

Die Fernrohrneigung i wird aber dadurch nicht bestimmt. Diese Neigung muss mit dem Apparat Fig. 2. S. 177 bestimmt werden.

Fig. 4. Diopterrohr für dreifache Reflexion.



Diopterrohr für dreifache Reflexion.

Ehe wir in den Besitz des Fadenkreuzbeleuchtungs-Spiegels Fig. 2. gelangten, construirten wir, nach einigen Versuchen, das in Fig. 4. gezeichnete Diopterrohr, dessen Hauptkörper F das Fernrohr selbst mit abgeschraubtem Objectiv und Ocular sein kann. An der Objectivseite des Rohres F wird ein Deckel A aufgesteckt, welcher eine quadratische Oeffnung a hat, der übrige Theil von A (in Fig. 4. schraffirt) ist mit Zinkweiss angestrichen. An der Ocularseite von F wird ebenfalls ein Deckel B aufgesetzt, welcher ein kleines Ocularloch b hat, und im Uebrigen innen weiss angestrichen ist. Zur Beleuchtung der Innenfläche des Deckels B sind seitwärts Schlitze C C' gelassen.

Wenn man nun mit diesem Rohre rechtwinklig gegen einen ebenen Spiegel oder in der Richtung F Fig. 1. schaut, so erblickt man das kleine Quadrat a und centrisch in demselben das Ocularloch b.

Dieser einfache Apparat leistet für erste Versuche dieselben Dienste wie der Ocularspiegel Fig. 2. Für Uebungsversuche, oder für Untersuchungen wie die oben bei (1) bis (9) angegebenen, ziehen wir sogar das Rohr Fig. 4. seiner Bequemlichkeit wegen und deswegen vor, weil seine Anwendung weder Sonnenschein noch Lampenbeleuchtung verlangt.

§ 45. Der Spiegel-Prismenkreis von Pistor und Martins.

Die erste Beschreibung dieses Instrumentes wurde von den Erfindern und Patentinhabern Pistor und Martins gegeben in dem „Berliner Gewerbe-, Industrie- und Handelsblatt“, herausgegeben von A. F. Neukrantz, 14. Band, Berlin 1845, S. 17—19 und S. 25—28, mit Figuren auf Tafel II.

Wir drucken den Hauptinhalt dieser Beschreibung, welche die Vortheile des neuen Instrumentes rühmt, ohne die Nachtheile zu verkennen, hier ab:

Die Vortheile der neuen Reflexion bestehen:

1) darin, dass durch dieselben alle Winkel bis zu 180° messbar sind,

2) dass sie lichtstarke scharf begrenzte Bilder geben, und endlich

3) darin, dass sie vor allen den Instrumenten, welche ganz oder theilweise diese Vortheile besitzen, das voraus haben, dass ihre Manipulation identisch derjenigen der gewöhnlichen Sextanten, also jedem Seefahrer geläufig ist, während durch die Eigenthümlichkeit der Construction keine Nachtheile in irgend einer Beziehung entstehen, wie das bei anderen Instrumenten, welche auf gleiche Vortheile Anspruch machen, der Fall ist.

So lässt z. B. der Prismenkreis vom Professor Steinheil, mit zwei über einander liegenden beweglichen Prismen, eine Winkelmessung bis zu 180° zu, macht jedoch dabei nöthig, dass man das Fernrohr zwischen beide Objecte richtet und die Bilder derselben durch die Prismen von beiden Seiten her in das Fernrohr reflectirt, was ohne Anwendung eines Stativs kaum ausführbar ist*).

Ein zweiter Steinheil'scher Prismenkreis, mit drei Prismen, von denen das grössere das Alhidadenprisma ist, hat nun zwar den Vortheil, dass alle Winkel bis zu 180° von der Gesichtslinie des Fernrohrs (wenigstens von einer damit parallelen Linie) aus gemessen werden, ist jedoch andererseits mit dem Nachtheil behaftet, dass die durch die unregelmässige Form des Alhidadenprismas entstehenden Fehler nicht bei der Beobachtung eliminirt werden. Da rechtwinklige Prismen, deren Seiten keine Pyramide bilden, und deren spitze Winkel innerhalb 20" bis 30" gleich sein sollen, sehr mühsam, oder eigentlich mehr durch Zufall hergestellt werden, indem wenigstens keine zuverlässige Methode der Anfertigung bekannt ist, so hat dieser Uebelstand Bedeutung.

Von allen diesen Uebelständen sind die in Rede stehenden neuen Instrumente frei. Sie geben lichtstärkere Bilder als die gewöhnlichen Sextanten, indem statt des einen Spiegels ein Prisma gewählt ist. Sie lassen eine Messung der Winkel bis zu 180° zu, und haben den Vortheil, dass alle Winkel von der Gesichtslinie des Fernrohrs aus gemessen werden. Sie werden ebenso gehandhabt, wie der gewöhnliche Sextant, und haben vor demselben noch das voraus, dass der Spiegel in allen Fällen in weniger ungünstiger Lage steht.

Das Instrument ist hier (Tafel II a. a. O.) als ganzer Kreis angedeutet, und wird hauptsächlich in dieser Form ausgeführt, da die Vortheile zweier gegenüber liegender, die Excentricität corrigirender Nonien, der regelmässigen Form des Körpers, welcher seinen Schwerpunkt nahe am Centrum hat, und des vom Centrum ausgehenden Handgriffs zu überwiegend sind. Nur für die Liebhaber von Sextanten, welche sich nicht von der althergebrachten Form trennen mögen, werden diese Instrumente auch als Sextanten von Kreisen angefertigt.

Hervorzuheben ist, dass die ungünstigste Stellung des Spiegels bei den neuen Instrumenten bei Null ist. Die Prüfung der Güte der Verglasung liegt dem Beobachter daher sehr zur Hand, ebenso wie der Künstler dadurch gewissermassen gezwungen ist, nur gute Spiegel anzuwenden. Bei den gewöhnlichen Sextanten können die Bilder bei kleinen Winkeln gut sein, während sie bei den grösseren schlecht sind. Unter allen Umständen sind die Bilder der neuen Instrumente bei grossen Winkeln besser als wie durch gewöhnliche Sextanten zu erlangen ist, da bei diesen, der Construction wegen, der Alhidadenspiegel nicht die nöthige Breite haben kann.

Der Spiegel-Prismenkreis wird in zwei Grössen ausgeführt, wie durch Fig. 1. und Fig. 3. veranschaulicht ist. Fig. 1. ist nach einem für unsere Sammlung i J. 1883 angeschafften Exemplar von Bamberg in Berlin gezeichnet, wir haben jedoch, um die Uebersicht zu wahren, den unten angebrachten

*) Vgl. hiezu unseren § 53.

Fig. 1. Pistor-Martins' Spiegel-Prismenkreis. Grosses Instrument.
(Maassstab 1:4, Kreisdurchmesser = 25 cm.)

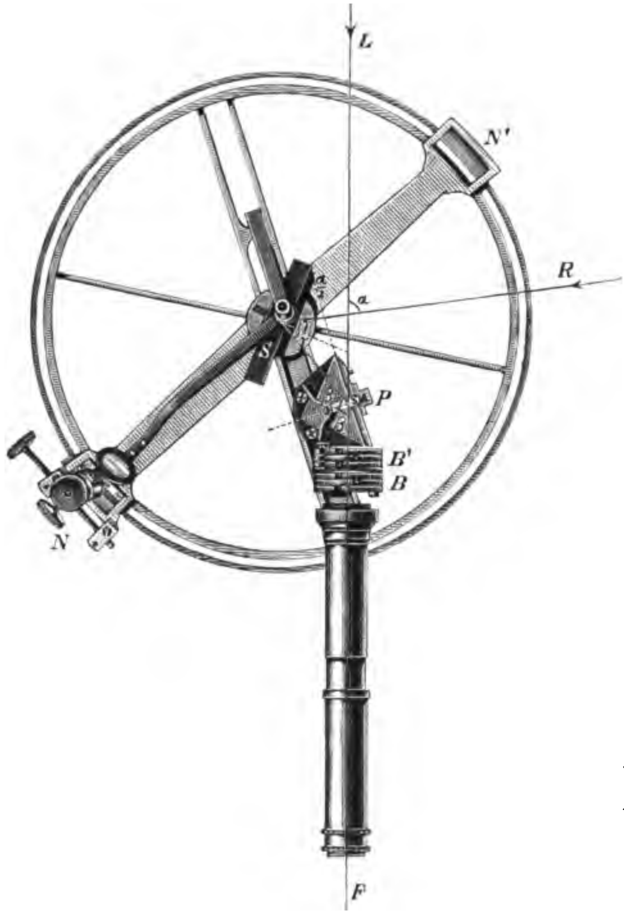
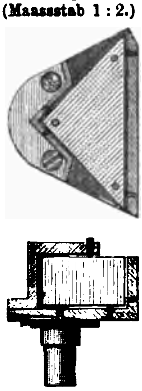


Fig. 2. Fassung des Prismas.
(Maassstab 1 : 2.)



hölzernen Handgriff in Fig. 1. weggelassen. Die Gesammtansicht von Fig. 1. nebst Stativ haben wir schon in Fig. 2. § 29. S. 161 gegeben.

In Fig. 1. bedeutet F das Fernrohr, P das Prisma, S den auf der Alhidade NN' befestigten Spiegel, B und B' Blendungen. Das Prisma ist in Fig. 2. besonders herausgezeichnet, in der von Meisner angeordneten Fassung (s. Löwenherz, Wissensch. Instr. auf der Berliner Gewerbeausstellung 1879, S. 26).

Unser Instrument Fig. 1. hat ein Fernrohr

von 20 mm Oeffnung, 15 cm Brennweite; es sind drei Oculare beigegeben:

Ocular	I	Vergrösserung	10 fach,	Gesichtsfeld	$= 3^0\ 2'$
„	II	„	7 „	„	$= 3\ 36$
„	III	„	$2^1/_2$ fach	„	$= 5\ 35$

Fig. 3. zeigt die kleine Ausgabe des Pistor-Martins'-schen Spiegel-Prismenkreises, die sich in mechanischer Beziehung von der grossen nur dadurch unterscheidet, dass der Limbuskörper nicht wie in Fig. 1. ein Rad mit dünnen Speichen, sondern in Fig. 3. eine volle Scheibe ist.

Das Fernrohr F, das Prisma P, der auf der Alhidade NN' befestige Spiegel S, die Blendgläser E sind bei Fig. 3. im Wesentlichen wie bei Fig. 1.

Unser Exemplar, nach welchem Fig. 3. gefertigt ist, ist von Meyerstein geliefert.

Die optische Theorie des Spiegel-Prismenkreises ist so einfach wie diejenige des Sextanten, wenn man nur zu Anfang sich überzeugt, dass ein rechtwinklig-gleichschenkliges Prisma (Fig. 4.) mit seiner Hypotenusenebene wie ein ebener Spiegel wirkt. Ein Lichtstrahl AB (Fig. 4.) macht durch ein solches Prisma den Weg $ABCB'A'$, mit Brechungen in B und B', und totaler Reflexion in C. Wegen der Brechungen ist (mit dem Brechungs-Coefficienten μ):

Fig. 3.
Pistor-Martins' Spiegel-Prismenkreis. Kleines Instrument.
(Maassstab 1 : 2,8, Kreisdurchmesser = 13 cm.)

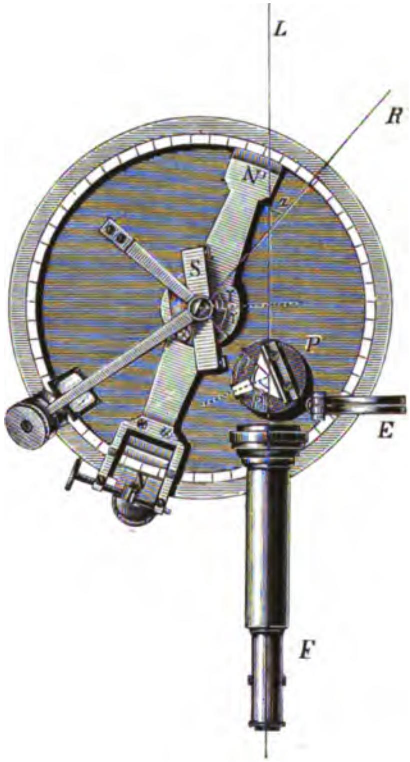
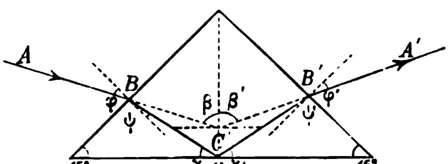


Fig. 4. Reflexionsprisma.



$$\sin\varphi = \mu \sin\psi \qquad \sin\varphi' = \mu \sin\psi' \tag{1}$$

Wegen der Reflexion in C ist:

$$\gamma = \gamma' \tag{2}$$

Die beiden Dreiecke links und rechts geben:

$$45^0 + (90^0 + \psi) + \gamma = 180^0$$
$$45^0 + (90^0 + \psi') + \gamma' = 180^0$$

also wegen (2) ist jetzt auch $\psi = \psi'$ und dann wegen (1) auch

$$\varphi = \varphi' \tag{3}$$

Auch die Winkel β und β' sind dann einander gleich, denn es ist:

$$(90^0 - \varphi) + \beta + 45^0 = 180^0 \qquad \beta = 45^0 + \varphi$$
$$(90^0 - \varphi') + \beta' + 45^0 = 180^0 \qquad \beta' = 45^0 + \varphi'$$

also wegen (3):

$$\beta = \beta' \tag{4}$$

das heisst nun aber: der eintretende Strahl AB und der austretende Strahl $B'A'$ machen denselben Winkel 2β miteinander, der ihnen durch einen ebenen Spiegel ertheilt würde, welcher mit der Hypotenusenebene parallel wäre, oder kurz: die Hypotenusenebene des rechtwinklig gleichschenkligen Prismas wirkt in Bezug auf Richtungsänderung auf einen Strahl AC' genau wie ein ebener Spiegel. (Die Querverschiebung CC' kommt bei der Anwendung im Nachfolgenden nicht in Betracht.)

In Hinsicht auf die Richtungen der Strahlen von Fig. 4. ist es auch unwesentlich, ob der Reflexionspunkt C in der Mitte der Hypotenuse oder seitwärts liegt, die Gleichungen (1) bis (4) sind davon unabhängig. Bei der Anwendung auf das Pistor-Martins'sche Instrument wird β einen constanten Werth von etwa 70^0 haben, und dann steht erstens die totale Reflexion in C ausser Frage, zweitens ist es (weil β constant) dann auch nicht unbedingt nöthig, dass die zwei spitzen Winkel des Prismas genau $= 45^0$ sind, es ist nur wesentlich, dass $\beta + \beta'$ zusammen eine constante Ablenkung sei. (Weiteres hierüber s. in § 50. 51. 52.)

Wir werden nun bei der Theorie des Pistor-Martins'schen Instrumentes in diesem Paragraphen schlechthin die Hypotenuse des Prismas als ebenen Spiegel gelten lassen, und es wäre nur noch die Frage zu beantworten, warum unter solchen Umständen Pistor-Martins nicht einfach einen Spiegel statt des Prismas genommen haben. Die Antwort liegt darin, dass die Ablenkung 2β sehr gross, etwa $2\beta = 140^0$ werden soll, und bei so schiefem Auffallen würde ein ebener Spiegel bei mässiger Länge nur schwache Bilder geben, während das Prisma mit seinen günstig auffangenden Kathetenebenen auch bei starker Ablenkung 2β immer noch helle Bilder gibt.

Bei der optischen Theorie des Spiegel-Prismenkreises sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, welche sich aber nachher wieder gemeinsam betrachten lassen werden.

Die nun zu betrachtenden Winkel α β γ sind dieselben, welche schon in Fig. 1. und Fig. 3. eingeschrieben sind. Diese und die anderen Bezeichnungen sind im Wesentlichen dieselben wie früher bei dem Sextanten (§ 28.).

Optische Theorie des Spiegel-Prismenkreises I. Fall (Fig. 5.).

F ist das Fernrohr, *S* der drehbare (grosse) Spiegel, *s* die als kleiner Spiegel wirkende Hypotenusenebene des Prismas, *L* der linksseitige, *R* der rechtsseitige Zielpunkt mit dem zwischen *L* und *R* liegenden zu messenden Winkel α.

Es ist zu zeigen, dass der Winkel bei S', welchen die beiden Spiegelebenen bilden, gleich der Hälfte von α ist, nämlich:

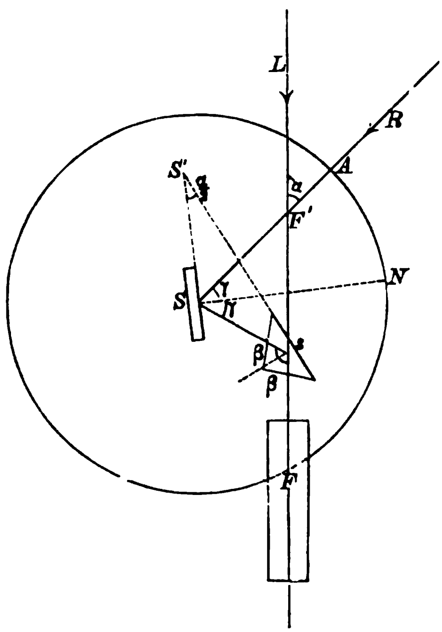
im Dreieck $F's S$: $\alpha + (180^0 - 2\beta) + 2\gamma = 180^0$
im Dreieck $S's S$: $S' + (90^0 - \beta) + (90^0 + \gamma) = 180^0$

d. h.

$$\alpha = 2\beta - 2\gamma \tag{5}$$
$$S' = \beta - \gamma$$

$$S' = \frac{\alpha}{2} \tag{6}$$

Fig. 5. Fall I. $\alpha = 2\beta - 2\gamma$.



Ist der Figur 5. ist daher $\frac{\alpha}{2}$ bei S' eingeschrieben.

Die weitere Einrichtung ist nun sofort verständlich. Mit dem grossen drehbaren Spiegel *S* wird eine Alhidade verbunden, welche Null zeigen soll, wenn *S* und *s* parallel sind, und welche auf einem von dieser Nullstellung beginnenden, doppelwinklig bezifferten Limbus den gemessenen Winkel α unmittelbar abzulesen gestattet. Der Grenzwerth von α wird nach (5) erhalten mit $\gamma = 0$, und es wird dann $\alpha_{max} = 2\beta$.

Optische Theorie des Spiegel-Prismenkreises II. Fall (Fig. 6. Seite 234).

Wird die Alhidade noch weiter gedreht, als der soeben gefundene Maximalwerth von α im ersten Fall angibt, so erhält man die Verhältnisse von Fig. 6., wo α auch über 180^0 hinausgeht. Man hat dann:

aus Dreieck $F's\,S$: $(\alpha - 180^0) + (180^0 - 2\beta) + (180^0 - 2\gamma) = 180^0$
aus Dreieck $S's\,S$: $S' + (90^0 - \beta) + (90^0 - \gamma) = 180^0$

(wobei der Scheitelpunkt von $\frac{\alpha}{2}$ in Fig. 6. mit S' bezeichnet sei), also:

$$\alpha = 2\beta + 2\gamma \tag{7}$$
$$S' = \beta + \gamma$$

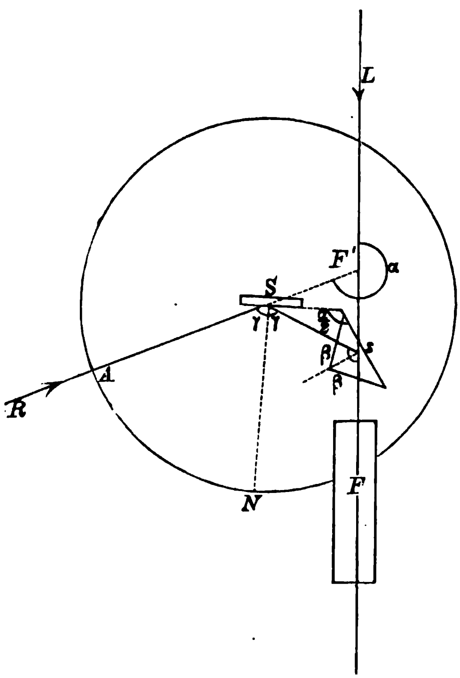
$$S' = \frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

wie auch bereits in der Figur eingeschrieben ist.

Die Gleichungen (5) und (7) sagen, dass der Fall II aus dem Fall I entsteht, indem $+\gamma$ in $-\gamma$ übergeht; und in der That ist, beim Uebergang von I auf II, γ stetig durch die Grenzlage Null gegangen. In (7) ist der theoretische Grenzwerth von γ der rechte Winkel 90^0, es ist also für α die theoretische Grenze $= 2\beta + 180^0 = 320^0$. Die wirkliche Grenze gibt Pistor-Martins $= 280^0$ an. Man hat also jetzt die Grenzen:

Fall I	α von 0^0 bis 140^0
Fall II	α von 140^0 bis 280^0

Fig. 6. Fall II. $\alpha = 2\beta + 2\gamma$.



Da übrigens ein Winkel $L - R = 280^0$ nichts anderes ist als ein Winkel $R - L = 360^0 - 280^0 = 80^0$, so heisst das Resultat in anderen Worten: von 0^0 bis 180^0 lassen sich Winkel in Lage I messen, und ausserdem von 80^0 bis 180^0 Winkel in Lage II. Je nachdem dann die Zielpunkte ungleich beleuchtet sind, kann man zwischen 80^0 bis 180^0 den Fall I oder den Fall II wählen.

Uebrigens wird diese theoretische Begrenzung in der Gegend von 180^0 praktisch durchbrochen, weil schon von 120^0 ab das Prisma und dann das Fernrohr und der Kopf des Beobachters dem Lichtstrahle R in den Weg tritt.

Was das Sehhinderniss des eigenen Kopfes des Beobachters betrifft, so hat der Erfinder diesem durch Beigabe eines Ocularprismas abgeholfen, mittelst dessen man quer zum Fernrohr hineinschauen kann.

Das Instrument eignet sich aber deswegen nicht zum Messen von Winkeln in der Nähe von 180°, weil für 180° der aus der Neigung des Spiegels und der Fernrohrachse entstehende Fehler theoretisch gleich unendlich wird (s. § 47.).

Winkel in der Nähe von 180° werden viel besser mit dem Steinheil'schen Prismenkreis gemessen (§ 50. bis § 53.).

Der Abstumpfungswinkel β spielt eine ähnliche Rolle wie der Schärfungswinkel β des Sextanten. Während beim Sextanten β sehr spitz war (etwa 15°), wird beim Spiegel-Prismenkreis β nahe an 90° oder 2β nahe an 180° gebracht (etwa $2\beta = 140°$). Betrachtet man die beiden Fälle

$$\text{I} \quad \alpha = 2\beta - 2\gamma$$
$$\text{II} \quad \alpha = 2\beta + 2\gamma$$

so zeigt sich, dass ein grosser Werth β auch grosse Winkel α liefert. Um übrigens blos die Sextantengrenze mit $\alpha = 130°$ oder 140° zu überschreiten, brauchte β nicht sehr gross zu sein, weil beide Fälle stetig in einander übergehen, damit jedoch im zweiten Fall α über 270° hinaus möglich werde, ist ein grosser Werth β nöthig.

Zur Bestimmung von β kann die in § 33. S. 175—176 für den Sextanten angegebene Methode (mit Abschrauben des grossen Spiegels) auch auf den Spiegel-Prismenkreis angewendet werden, und zwar bequemer als beim Sextanten, weil dieses Mal $180° - \beta$ ein spitzer Winkel ist, was die Sache übersichtlicher macht. An unserem Instrument wurde der grosse Spiegel abgeschraubt, und unter den Schornsteinen, Blitzableitern etc. der vorhandenen Aussicht zwei zufällig sich in der Mitte des Gesichtsfeldes deckende Punkte gefunden, deren Winkel, für sich gemessen, $= 37° \, 20'$ war, also $180° - 2\beta = 37° \, 20'$, $2\beta = 142° \, 40'$,

$$\beta = 71° \, 20' \tag{9}$$

dieses wurde durch mehrere andere Versuche auf 1'—2' bestätigt. Da von zwei solchen zufällig zusammengebrachten Punkten wohl nur einer deutlich markirt ist, empfiehlt es sich, neben das Reflexionsinstrument einen Theodolit zu stellen und mit diesem (unter Vernachlässigung der Excentricität beider Instrumente), den Winkel $180° - 2\beta$ zu messen. Dieses lässt sich bequem auf jeder Fensterbank machen, ohne Bakeneinweisung im freien Feld; auch kann man diese Bestimmung mehrfach mit verschiedenen Punkten wiederholen, ohne den Spiegel des Reflexionsinstrumentes wiederholt an- und abzuschrauben. Dagegen ist die auf S. 175 für den Sextanten empfohlene Methode, den grossen Spiegel rechtwinklig, oder nahezu rechtwinklig zur Fernrohrachse zu stellen, beim Pistor Martins-Kreise nicht anwendbar, weil hier der Spiegel nicht, vom Ocular aus gesehen, jenseits, sondern diesseits reflectirt, so dass das frühere gegenseitige Einrichten des Fernrohrs mit einem Hülfsfernrohr nicht mehr möglich ist.

Wenn man das Abschrauben des Spiegels scheut, so gibt es ausser dem unmittelbaren Abmessen von β, was bei der Kleinheit der Dimensionen kaum auf 5° genau sein wird, noch folgende, wohl auf $^1/_2{}^0$ zuverlässige Methode (s. o. Fig. 5.):

Man misst einen beliebigen Winkel $LR = \alpha$ und weiss dann nach (5):

$$2\beta = \alpha + 2\gamma \tag{5}$$

γ kann man aber dadurch bestimmen, dass man von der Instrumentenmitte nach R visirend den Punkt A (Fig. 5.) am Kreise markirt. Ausserdem wird der Punkt N (Fig. 5.) nach der Bedingung gefunden, dass er sich selbst in der Spiegelmitte reflectiren muss. Nun hat man den Bogen $AN = \gamma$ an der Limbustheilung (bzw. 2γ wegen der Doppelbezifferung) und damit nach (5) auch den Winkel β.

Das beste Mittel zur Bestimmung von β ist aber wieder die Beobachtung des dreifach reflectirten Fadenbildes (§ 44.). Indem man die beiden Alhidadenstellungen für diese dreifache Reflexion und für Parallelstellung des Spiegels und der Prismenhypotenuse (Indexfehler) aufsucht, hat man in deren Ablesungsdifferenz den Winkel 2β.

Prüfung und Berichtigung. Alles was hierüber beim Sextanten gesagt wurde, lässt sich auch auf den Spiegel-Prismenkreis anwenden, und dazu kann man die Eigenthümlichkeiten der Construction des Kreises noch ausnützen.

Für die Untersuchung der Blendgläser hat man statt der etwas schwierigen Drehung der Gläser in ihren Fassungen (§ 32. Fig. 1. und 2. S. 172) beim Spiegel-Prismenkreis die bequemere Drehung des ganzen Blendungsgestelles um eine verticale Achse. (Das kleine Instrument Fig. 3. S. 231 gestattet eine Drehung der halbkreisförmigen Blendgläser von unten nach oben und umgekehrt, welche zur Untersuchung der Parallelität der Gläser wenig geeignet ist.)

Für die Benützung des dreifach reflectirten Fadenbildes (§ 44.) zur Untersuchung der Spiegel- und Prismenneigungen ist es nöthig, die Höhenlagen der Bilder theoretisch zu untersuchen, ähnlich wie wir für die gewöhnliche Sextanten- und Spiegelkreis-Construction am Schluss von § 44. S. 226—227 gethan haben. Man bekommt abermals die Gleichung (4) § 44. S. 226, nämlich:

$$i + i' = 4n \cos\beta - 2n \tag{10}$$

Es ist aber nun β etwa $= 70^0$, $\cos\beta = 0{,}342$, also:

$$i + i' = 1{,}368\, n' - 2n \tag{11}$$

Da es sich nur um Neigungen relativ gegen i handeln kann (vgl. (6) § 44, S. 226), setzen wir der Kürze wegen $i = 0$ und haben dann, zugleich mit $n' = n$ aus (11):

$$i_2' = -\,0{,}632\, n$$

Macht man $n = 0$, lässt aber $n' = n$, so wird:

$$i_2' = 1{,}368\, n = -\,2{,}16\, i_1' \tag{12}$$

Mit Benützung von Fig. 3. § 44. S. 227 erhält man also folgendes Verfahren: Mit parallel justirtem Instrument ($n' = n$) werde die Fadenmitte F durch dreifache Reflexion nach F_1' gebracht, dann bringt man

mit der Correctionsschraube des Spiegels dieses Bild F_1' um seinen etwa doppelten Abstand auf die andere Seite nach F_2' (d. h. so dass $FF_2' = 2FF_1'$), worauf wieder Paralleljustirung folgt, welche nun F_2' nach F bringen muss.

§ 46. Geneigtes Prisma und geneigte Lichtstrahlen.

Als Vorbereitung für die Fehlertheorie des Pistor-Martins-Kreises und zugleich zur späteren Verwendung für andere Fälle, behandeln wir den Fall, dass ein Prisma zwar an und für sich genau rechtwinklig gleichschenklich geschliffen ist, dass es aber auf einer zur Vergleichung genommenen Ebene (Prismenkreisebene) nicht genau rechtwinklig steht, und dass ein Lichtstrahl, welcher das Prisma durchdringt, nicht mit der Grundebene parallel eintritt, d. h. wir untersuchen für das Prisma dieselben Fehlerverhältnisse, welche für den ebenen Spiegel in § 35. (S. 180—183) behandelt worden sind.

Fig. 1. Querschnitt des Prismas.

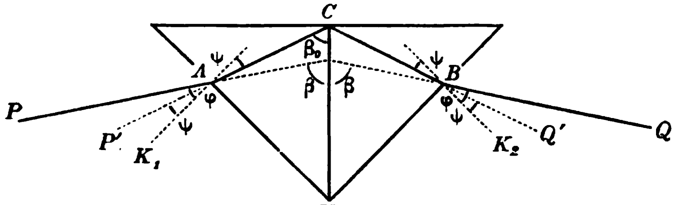


Fig. 2. Veranschaulichung aller geneigten Strahlen.

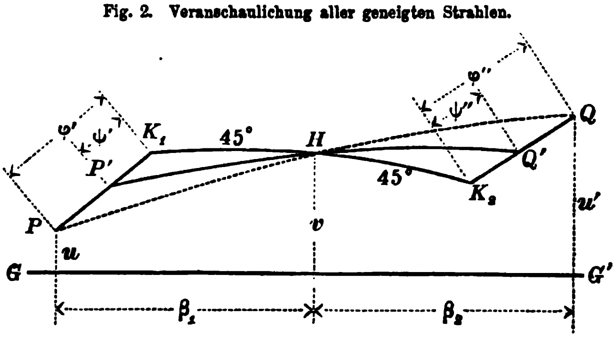


Fig. 1. zeigt den Querschnitt des Prismas, oder das Prisma, rechtwinklig auf der Grundebene stehend. Der Weg eines Lichtstrahls, welcher parallel mit der Grundebene eintritt, ist:

$$PACBQ$$

AK_1 und BK_2 sind die beiden Kathetennormalen und CH ist die Hypotenusennormale.

AP' und BQ' sind die Auswärtsverlängerungen der im Innern des Prismas liegenden Strahlen CA und CB.

Es soll nun das Prisma eine gegen die Grundebene schiefe Stellung einnehmen, dann treten die verschiedenen Strahlen, welche in Fig. 1. in einer Ebene lagen, aus einer Ebene heraus, und wir veranschaulichen diese Strahlen durch Fig. 2., welche ein Theil einer Kugel sein soll, in deren Mittelpunkt alle Strahlen mit sich selbst parallel verlegt worden sind. Jeder Punkt von Fig. 2. stellt also einen Strahl vor, und die Gerade GG' ist Darstellung der früheren Grundebene, auf welche alle Strahlen projicirt werden.

Je drei Strahlen, welche in einer Ebene liegen, geben in Fig. 2. (vorige Seite) drei Punkte, welche auf einem grössten Kreisbogen liegen; es sind daher jedenfalls die voll ausgezogenen Linien $K_1 H K_2$, sowie $P' H Q'$, dann $P P' K_1$ und $Q Q' K_2$, grösste Kreisbögen, denn es ist $K_1 H K_2$ die Querschnittsebene des geneigten Prismas, und die 3 Strahlen $P' H Q'$ liegen in einer Ebene nach dem Reflexionsgesetz, sowie $P K_1 P'$ und $Q K_2 Q'$ nach dem Brechungsgesetz. Es wird sich nun zeigen lassen, dass auch die zwei übrigen Bögen $P H Q$ und $P' H Q'$ grösste Kreisbögen ohne Knickung in H sind.

Die beiden Dreiecke $H K_1 P'$ und $H K_2 Q'$ sind symmetrisch, denn die Langseiten $H K_1$ und $H K_2$ sind je $= 45^0$, und die beiden anderen Langseiten HP' und HQ' sind gleich als Reflexionswinkel, der Scheitelwinkel in H ist beiden Dreiecken gemeinsam, also müssen nun auch die kurzen Seiten $K_1 P' = \psi'$ und $K_2 Q' = \psi''$ einander gleich sein. Nun bestehen aber für die Brechungen an den Katheten die Beziehungen:

$$\sin \varphi' = \mu \sin \psi'$$
$$\sin \varphi'' = \mu \sin \psi''$$

und da soeben erkannt ist, dass $\psi' = \psi''$ ist, wird nun auch $\varphi' = \varphi''$, oder $P K_1 = Q K_2$.

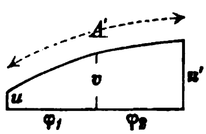
Aus der Gleichheit je zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels ergibt sich nun auch die Symmetrie der langgestreckten Dreiecke mit den Seiten HP und HQ, oder es ist PHQ ein in H halbirter grösster Kreisbogen. Der Bogen PQ, oder die Strahlen P und Q haben also dieselben Beziehungen wie P und Q in Fig. 1. 2. und 3. § 35. S. 180—183, d. h.:

$$u + u' = 2 v \cos \beta \tag{1}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 2 v \sin \beta \, (u - v \cos \beta) \tag{2}$$

oder mit den früheren Bezeichnungen von § 35., welche wir in der nebenstehenden Fig. 3. nochmals vorführen, haben wir wieder dieselben Gleichungen wie (3) und (4) S. 182:

Fig. 3.
Neigung der Hypotenusennormalen = v.
Strahlenneigungen = u und u'.

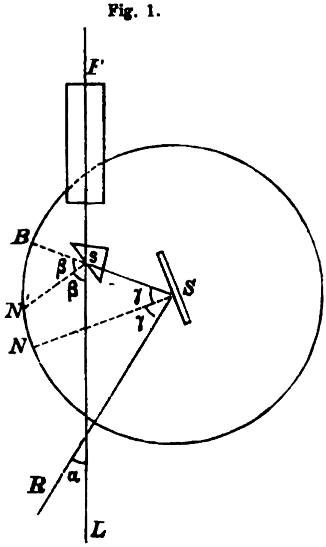


$$u + u' = 2 v \cos \frac{A'}{2} \tag{1a}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 v \sin \varphi \, (u - v \cos \varphi) \tag{2a}$$

§ 47. Theorie der Fernrohr-Spiegel- und Prismen-Neigungen des Pistor-Martins'schen Reflexionskreises.

Fig. 1.

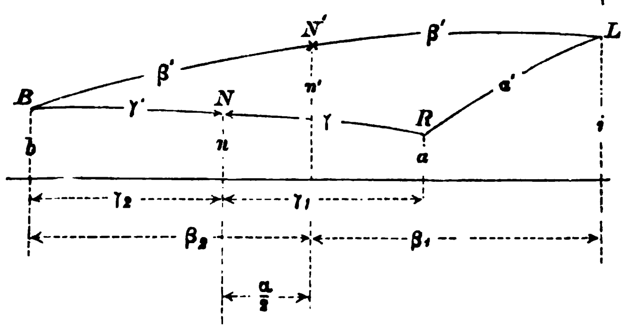


Die Behandlung folgt im Wesentlichen dem Vorgang des Sextanten (§ 36.). Wir nehmen zunächst den Fall I. ebenso wie in Fig. 5. § 45. S. 233.

Fig. 1. ist so gezeichnet, dass die Normale N' des Prismas nach rückwärts gerichtet genommen ist, wie früher beim Sextanten.

Fig. 2. ist eine sphärische Figur zur Veranschaulichung der in verschiedenen Ebenen liegenden Lichtstrahlen.

Fig. 2.



Diese Fig. 2. gibt den Winkel, welchen die Projectionen der beiden Spiegelnormalen einschliessen:

$$\frac{\alpha}{2} = \beta_2 - \gamma_2 \quad \text{oder} \quad \alpha = 2\beta_2 - 2\gamma_2 \tag{1}$$

Die Projection des zu messenden Winkels α' ist $= (\beta_1 + \beta_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)$, die begrenzenden Neigungen sind a und i, also nach dem Projectionssatze (2) § 35. S. 181:

$$\Big((\beta_1 + \beta_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)\Big) - \alpha' = \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) bildet man:

$$\alpha - \alpha' = (\gamma_1 - \gamma_2) - (\beta_1 - \beta_2) + \left(\frac{a+i}{2}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-i}{2}\right)^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Nach (2) oder (2a) § 46. S. 238 sind die Projectionsdifferenzen:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2n \sin\gamma \, (a - n\cos\gamma) \tag{4}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 2n' \sin\beta \, (i - n'\cos\beta) \tag{5}$$

und nach (1) oder (1a) § 46. S. 238:

$$a + b = 2n\cos\gamma$$
$$i + b = 2n'\cos\beta$$

also mit Elimination von b:

$$a = i + 2n\cos\gamma - 2n'\cos\beta \tag{6}$$

Indem man diesen Werth a in (4) einsetzt, hat man:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2n\sin\gamma \, (i + n\cos\gamma - 2n'\cos\beta \tag{7}$$

hiezu das frühere (5), gibt den ersten Theil von (3):

$$(\gamma_1 - \gamma_2) - (\beta_1 - \beta_2) = 2n\sin\gamma\,(i + n\cos\gamma - 2n'\cos\beta) - 2n'\sin\beta\,(i - n'\cos\beta)$$
$$= 2(i - n'\cos\beta)(n\sin\gamma - n'\sin\beta) + 2n\sin\gamma\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{8}$$

Mittelst (6) kann man auch die zwei letzten Glieder von (3) bilden:

$$\frac{a+i}{2} = i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta) \tag{9}$$

$$\frac{a-i}{2} = n\cos\gamma - n'\cos\beta \tag{10}$$

Jetzt hat man alle Bestandtheile von (3); setzt man also (8), (9) und (10) in (3), so hat man das Resultat:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - \alpha') = 2(i - n'\cos\beta)(n\sin\gamma - n'\sin\beta) + 2n\sin\gamma\,(n\cos\gamma - n'\cos\beta)\\ + \left(i + (n\cos\gamma - n'\cos\beta)\right)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \left(n\cos\gamma - n'\cos\beta\right)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\}(11)$$

Wegen der Indexfehlerbestimmung muss $n' = n$ sein, wie beim Sextanten, dieses gibt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha - \alpha' = 2n\,(i - n\cos\beta)\,(\sin\gamma - \sin\beta) + 2n^2\sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta)\\ + \left(i + n\,(\cos\gamma - \cos\beta)\right)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - n^2\left(\cos\gamma - \cos\beta\right)^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\}(12)$$

Wenn man nach Potenzen von i und n ordnet, so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = i^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + 2in\left((\sin\gamma - \sin\beta) + (\cos\gamma - \cos\beta)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$+ n^2\Big(-2\cos\beta\,(\sin\gamma - \sin\beta) + 2\sin\gamma\,(\cos\gamma - \cos\beta)$$
$$+ (\cos\gamma - \cos\beta)^2\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\Big)$$

und wenn man in dem Gliede mit n^2 die Functionen von α anders zusammenfasst:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2 tang\frac{\alpha}{2} + 2\,i\,n\,sec\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}(sin\gamma - sin\beta)+(cos\gamma - cos\beta)\,sin\frac{\alpha}{2}\right)\\ + 2n^2\,cosec\,\alpha\Big(-sin\,\alpha\,cos\,\beta\,(sin\,\gamma - sin\,\beta) + sin\,\alpha\,sin\,\gamma\,(cos\,\gamma - cos\,\beta)\\ -(cos\,\gamma - cos\,\beta)^2\,cos\,\alpha\Big)\end{aligned}\right\}(13)$$

γ muss eliminirt werden mittelst der Gleichung (1):

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \beta - \frac{\alpha}{4} \qquad \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha}{4} \tag{15}$$

$$sin\,\beta - sin\,\gamma = 2\,sin\frac{\beta-\gamma}{2}\,cos\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\,sin\frac{\alpha}{4}\,cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) \tag{16}$$

$$cos\,\gamma - cos\,\beta = 2\,sin\frac{\beta-\gamma}{2}\,sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\,sin\frac{\alpha}{4}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) \tag{17}$$

$$\beta = \left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{\alpha}{4} \qquad \gamma = \left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{\alpha}{4}$$

$$cos\,\beta = cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)cos\frac{\alpha}{4} - sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)sin\frac{\alpha}{4} \tag{18}$$

$$sin\,\gamma = sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)cos\frac{\alpha}{4} - cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)sin\frac{\alpha}{4} \tag{19}$$

$$sin\,\alpha = 2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2} = 4\,sin\frac{\alpha}{4}\,cos\frac{\alpha}{4}\,cos\frac{\alpha}{2} \tag{20}$$

Setzt man (16) bis (20) in (13), so wird:

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha' = i^2 tang\frac{\alpha}{2} + 4\,i\,n\,sec\frac{\alpha}{2}\,sin\frac{\alpha}{4}\left(-cos\frac{\alpha}{2}\,cos(\beta-\frac{\alpha}{4})+sin\frac{\alpha}{2}\,sin(\beta-\frac{\alpha}{4})\right)\\ +8n^2\,cosec\,\alpha\,sin^2\frac{\alpha}{4}\Big(2\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos^2\frac{\alpha}{4} - 2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}\,sin(\beta-\frac{\alpha}{4})cos(\beta-\frac{\alpha}{4})\\ -cos\,\alpha\,sin^2(\beta-\frac{\alpha}{4})\Big)\end{aligned}\right\}(21)$$

Das erste und das letzte Glied der Klammer von n^2 geben:

$$\begin{aligned}&2\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos^2\frac{\alpha}{4} - cos\,\alpha\,sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ &= cos\frac{\alpha}{2}\left(1+cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}\right)sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\\ &= cos\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}\,cos^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) + sin^2\frac{\alpha}{2}\,sin^2\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)\end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder hievon mit dem Mittelglied der letzten Klammer in (21) geben ein volles Quadrat, nämlich das Quadrat von:

$$cos\frac{\alpha}{2}\,cos\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right) - sin\frac{\alpha}{2}\,sin\left(\beta-\frac{\alpha}{4}\right)$$

und dieser Ausdruck, welcher auch im zweiten Glied von (21) vorkommt, hat die goniometrische Bedeutung

$$= cos\left(\left(\beta - \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{\alpha}{2}\right) = cos\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)$$

Der Ausdruck (21) ist also jetzt umgeformt in:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' = i^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 4 \, i n \sec \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{4} \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \\ + 8 n^2 \operatorname{cosec} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{4}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' = i^2 \, tang \frac{\alpha}{2} - 2 \, i n \, tang \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \\ + 2 n^2 \sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Vergleicht man diese Formel mit der für den Sextanten gültigen (22) und (23) § 36. S. 188, so findet man ganz gleichen Bau, und nur den einzigen Unterschied, dass $+ \beta$ an die Stelle von $- \beta$ getreten ist.

Die Formel (23) lässt sich ebenso wie beim Sextanten (24) S. 188 in eine mehr geschlossene Form bringen:

$$\alpha - \alpha' = 2 \sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left\{ n^2 \cos \frac{\alpha}{2} + \left(n \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) - i \cos \frac{\alpha}{4}\right)^2 \right\} \quad (24)$$

Man könnte nun daran denken, auch den Fall II der Messung mit dem Pistor-Martins-Kreis ebenso zu behandeln wie den Fall I, allein man überzeugt sich bald, dass dieses nicht nöthig ist, denn Fall II unterscheidet sich von I nur dadurch, dass γ negativ wird, γ wird aber schliesslich wieder eliminirt, und es gelten daher die Formeln (22) bis (24) für beide Fälle des fraglichen Reflexionsinstrumentes.

Während beim Sextanten $\alpha - \alpha'$ stets positiv war, wird beim Spiegelprismenkreis $\alpha - \alpha'$ in der zweiten Hälfte des Kreises ($\alpha > 180^0$) negativ.

Wir heben, wie früher bei der Sextantenformel, die Coefficienten von (23) heraus und schreiben:

$$\alpha - \alpha' = [1] \, i^2 + [2] \, i n + [3] \, n^2 \quad (25)$$

wo

$$[1] = \frac{60}{\varrho'} \, tang \frac{\alpha}{2} \qquad \left(\log \frac{60}{\varrho'} = 8.24188\right)$$

$$[2] = -\frac{60}{\varrho'} \, 2 \, tang \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\alpha}{4} \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$[3] = \frac{60}{\varrho'} \, 2 \sec \frac{\alpha}{2} \, tang \frac{\alpha}{4} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right)\right)$$

Diese Coefficienten sind so gewählt, dass i und n in Minuten einzusetzen sind, und $\alpha - \alpha'$ in Secunden erhalten wird.

Hiernach ist, mit einem runden Werth $\beta = 70^0$, Folgendes berechnet:

Coefficienten der Formel (22) und (23) bezw. (25).

$\beta = 70^0$

α	log [1]	log [2]	log [3]	100 [1]	100 [2]	100 [3]
30°	7.6699	7.3100_n	7.6829	+ 0,47"	− 0,20"	+ 0,48"
60	8.0033	7.2597_n	7.9748	+ 1,01	− 0,18	+ 0,94
90	8.2419	7.2170	8.1613	+ 1,75	+ 0,16	+ 1,45
120	8.4804	8.0836	8.3298	+ 3,02	+ 1,21	+ 2,14
150	8.8138	8.6935	8.5580	+ 6,51	+ 4,93	+ 3,61
170	9.2999	9.3162	8.9332	+ 19,95	+ 20,71	+ 8,57
180	∞	∞	∞	∞	∞	∞
190	9.2999_n	9.4357_n	8.7411_n	− 19,95"	− 27,27"	− 5,51"
210	8.8138_n	9.0606_n	7.7201_n	− 6,51	− 11,50	− 0,52
240	8.4804_n	8.8906_n	8.0211	− 3,02	− 7,78	+ 1,05
270	8.2419_n	8.8277_n	8.2897	− 1,75	− 6,73	+ 1,95
300	8.0033_n	8.8047_n	8.4674	− 1,01	− 6,37	+ 2,93
320	7.8030_n	8.8018_n	8.6016	− 0,64	− 6,34	+ 4,00

Man kann nun nach den vorstehenden Formeln und Tabellen für beliebige Annahmen von i und n die Fehler berechnen, und mit den Sextantenfehlern (§ 36. S. 190) vergleichen wie folgt:

Gemessener Winkel α	$i = \pm 10'$ und $n = \pm 10'$		$i = \pm 10'$ und $n = \mp 10'$	
	Sextant	Spiegel-Prismenkreis	Sextant	Spiegel-Prismenkreis
30°	+ 0,5"	+ 0,7"	+ 2,3"	+ 1,2"
60	+ 0,9	+ 1,8	+ 5,1	+ 2,1
90	+ 1,5	+ 3,4	+ 8,9	+ 3,0
120	+ 2,1	+ 6,4	+ 15,5	+ 3,9
150	+ 3,0	+ 15,1	+ 33,3	+ 5,2
170		+ 49,2		+ 7,8
180		± ∞		± ∞
190		∓ 52,7"		∓ 1,8"
210		− 18,5		+ 4,5
240		− 9,7		+ 5,8
270		− 6,5		+ 6,9
300		− 4,5		+ 8,3
320		− 3,0		+ 9,7

Innerhalb des vergleichbaren Intervalls sind die Fehler beider Instrumente nahezu von gleicher Grössenordnung. Wenn i und n ungleiches Zeichen haben, ist der Sextant im Nachtheil.

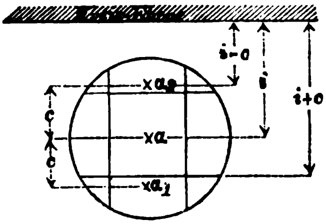
In der Gegend von 180° wird der Spiegel-Prismenkreis in der von uns betrachteten Anordnung ($n' = n$ für $\alpha = 0$, s, o. bei (11)) zur Winkelmessung ungeeignet.

§ 48. Indirecte Bestimmung der Fernrohrneigung und der Spiegelneigung.

Aehnlich wie früher beim Sextanten (§ 37. S. 191) benutzen wir auch beim Spiegel-Prismenkreis die Messungsdifferenzen *d*, welche sich ergeben, wenn man die Bilder in der Mitte, unten oder oben, im Gesichtsfeld zur Deckung bringt, um daraus die Fernrohrneigung *i* und die Spiegelneigung *n* rückwärts zu berechnen.

Während beim Sextanten der Erfolg ein ungünstiger war, nämlich mittlere Fehler von $= \pm 38'$ und $\pm 34'$ bzw. von *i* und *n*, ((15) § 37. S. 194) lässt sich beim Spiegel-Prismenkreis von vorn herein ein besseres Resultat erwarten, weil hier die Untersuchung auf $^3/_4$ des Kreisumfangs ausgedehnt werden kann, während sie beim Sextanten auf $^1/_6$ des Kreises beschränkt war.

Fig. 1.
Gesichtsfeld des Fernrohrs.



Die Anordnung der Messungen und die Bezeichnungen sind im Wesentlichen wie früher beim Sextanten (Fig. 1. S. 192). Fig. 1. zeigt den Anblick des Gesichtsfeldes, α ist die Mitte des Gesichtsfeldes, α_2 liegt über dem Oberfaden, etwa im Abstand von 1 Fadendicke, α_1 entsprechend unten. Die Messungsresultate, Mittel aus je 15 Einstellungen (vom Indexfehler befreit) sind folgende:

Nummer	α_1 unten	α mitten	α_2 oben	$\alpha_1 - \alpha = d_1$	$\alpha_2 - \alpha = d_2$	$d_1 + d_2$
1.	28°29′ 33″	28°29′ 42″	28°30′ 3″	− 9″	+ 21″	+ 12″
2.	65 48 15	65 48 55	65 49 41	− 40	+ 46	+ 6
3.	93 30 57	93 31 28	93 32 34	− 31	+ 1′ 6	+ 35
4.	109 3 22	109 4 10	109 5 52	− 48	+ 1 42	+ 54
5.	119 37 18	119 37 54	119 39 53	− 36	+ 1 59	+ 1′ 23
6.	132 0 7	132 0 58	132 3 44	− 51	+ 2 46	+ 1 55
7.	204 1 15	203 59 0	203 52 21	+ 2′ 15	− 6 39	− 4 24
8.	240 16 5	240 15 15	240 12 55	+ 50	− 2 20	− 1 30
9.	278 32 13	278 31 45	278 30 37	+ 28	− 1 8	− 0 40

(1)

Es wurde auch ein Versuch gemacht, mit Benutzung des Ocularprismas, einen Winkel α von nahezu 180° (178° 38′) in allen 3 Theilen des Gesichtsfeldes zu messen, es war aber ganz unmöglich, die Coincidenz der Bilder an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes zu Stande zu bringen.

Nach (23) § 47. S. 242 besteht die Gleichung:

$$\alpha - \alpha' = n^2 (\ldots) + i^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2 i n \, tang \, \frac{\alpha}{2} \; sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{2}$$

Der Coefficient (. . .) des ersten Gliedes kommt nicht weiter in Betracht. Die Anwendung auf α_1 und α_2 in Fig. 1. gibt:

$$\alpha_1 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i + c)^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2 n (i + c) \, tang \, \frac{\alpha}{2} \, sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{3}$$

$$\alpha_2 - \alpha' = n^2 (\ldots) + (i - c)^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2 n (i - c) \, tang \, \frac{\alpha}{2} \, sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{4}$$

Die Vergleichung mit (2) gibt:

$$\alpha_1 - \alpha = d_1 = c^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} + 2 i c \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2 n c \, tang \, \frac{\alpha}{2} \, sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{5}$$

$$\alpha_2 - \alpha = d_2 = c^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} - 2 i c \, tang \, \frac{\alpha}{2} + 2 n c \, tang \, \frac{\alpha}{2} \, sec \, \frac{\alpha}{4} \, cos \left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{6}$$

Die Constante c wurde ebenso bestimmt, wie beim Sextanten bei (1) § 37. S. 192 angegeben ist, nämlich:

$$c = 36' \tag{7}$$

Obgleich diese directe Bestimmung von c ganz sicher und einfach ist, berechnen wir doch, ehe wir weiter gehen, auch c mittelbar aus den Messungen (1) selbst, weil die Stellen von α_1 und α_2 in der Nähe der Fäden nur durch Schätzung bestimmt waren, wobei im Vergleich mit der nachherigen einmaligen Messung von c eine in constantem Sinn wirkende Differenz nicht unmöglich ist. Wenn man (5) und (6) addirt, so erhält man:

$$d_1 + d_2 = 2 c^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

oder
$$d_1 + d_2 = \frac{120}{\varrho'} c^2 \, tang \, \frac{\alpha}{2} = [log = 8.54291] \, tang \, \frac{\alpha}{2} \tag{9}$$

wenn d_1 und d_2 in Secunden und c in Minuten gerechnet wird. Wendet man die Gleichung (9) auf die 9 Fälle der Tabelle (1) an, und löst jedesmal nach c auf, so erhält man folgende 9 Werthe c:

$$c = \quad 37' \quad 16' \quad 31' \quad 33' \quad 37' \quad 38' \quad 40' \quad 39' \quad 36'$$

das einfache Mittel gibt 34′ nahezu wie (7). Würde man den Werthen, welche aus grösseren $d_1 + d_2$ berechnet sind, welche also relativ sicherer bestimmt sind, mehr Gewicht geben, so würde das Mittel c etwas grösser. Wir behalten nach dieser befriedigenden Uebereinstimmung den ursprünglichen Werth $c = 36'$ nach (7) bei. Der constante Winkel β wurde $= 71^0 \, 20'$ gefunden (vgl. S. 235).

Indem die Rechnung ganz dem Muster von § 37. S. 193 folgt, haben wir aus (5) und (6) die Fehlergleichungen:

$$v_1 = + ai - bn + l_1 \tag{10}$$
$$v_2 = - ai + bn + l_2 \tag{11}$$

wo a b und l folgende Bedeutungen haben:

$$a = 2c \, tang \frac{\alpha}{2} = \frac{120}{\varrho'} c \, tang \frac{\alpha}{2} = [log = 0.09921] \, tang \frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

$$b = 2c \, tang \frac{\alpha}{2} sec \frac{\alpha}{4} cos\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) = [log = 0.09921] tang \frac{\alpha}{2} sec \frac{\alpha}{4} cos\left(\beta + \frac{\alpha}{4}\right) \tag{13}$$

$$l_1 = D - d_1 \qquad l_2 = D - d_2$$

$$\text{wo} \qquad D = c^2 \, tang \frac{\alpha}{2} = 60 \frac{c^2}{\varrho'} \, tang \frac{\alpha}{2} = [log = 1.35448] \, tang \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

Hiernach ist Folgendes berechnet, und es sind sofort auch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Fehler v zugefügt:

Nummer	a	b	D	beobachtet		ausgeglichen					
				d_1	d_2	l_1	l_2	d_1	d_2	v_1	v_2
1_1 u. 1_2	+ 0,32	+ 0,06	+ 6″	— 9″	+ 21″	+ 15″	— 15″	— 7″	+ 18″	+ 2″	— 3″
2_1 „ 2_2	+ 0,81	+ 0,03	+ 15	— 40	+ 46	+ 55	— 31	— 17	+ 46	+23	0
3_1 „ 3_2	+ 1,34	— 0,12	+ 24	— 31	+ 66	+ 55	— 42	— 29	+ 77	+ 2	+11
4_1 „ 4_2	+ 1,76	— 0,30	+ 32	— 48	+102	+ 80	— 70	— 39	+103	+ 9	+ 1
5_1 „ 5_2	+ 2,16	— 0,48	+ 39	— 36	+119	+ 75	— 80	— 49	+126	—13	+ 7
6_1 „ 6_2	+ 2,82	— 0,83	+ 51	— 51	+166	+102	—115	— 65	+166	— 6	0
7_1 „ 7_2	— 5,92	+ 5,02	—106	+135	—399	—241	+293	+152	—365	+17	+34
8_1 „ 8_2	— 2,16	+ 2,87	— 39	+ 50	—140	— 89	+101	+ 61	—139	+11	+ 1
9_1 „ 9_2	— 1,08	+ 2,41	— 19	+ 28	— 68	— 47	+ 49	+ 36	— 75	+ 8	— 7
										$(v\,v) = 2683$	

Zur Bildung der Normalgleichungen empfahl es sich, die l in Einheiten von 100″ zu nehmen, also in der ersten Gruppe $l_1 = + 0{,}15$, $l_2 = - 0{,}15$ etc., damit wurden die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} + \underline{118{,}30}\, i + 84{,}44\, n + 50{,}95 &= 0 \\ + \underline{85{,}08}\, n + 37{,}64 &= 0 \\ 22{,}28 &= [l\,l] \end{aligned}$$

Die Auflösung gab:

$$i = (- 0{,}394 \pm 0{,}022)\, 100 = - 39' \pm 2' \tag{15}$$
$$n = (- 0{,}051 \pm 0{,}026)\, 100 = - 5' \pm 3' \tag{16}$$
$$[l\,l \,.\, 2] = (0{,}268)\, 100^2 = 2680 \text{ hinreichend} = (v\,v) = 2683$$

mittlerer Fehler einer Bestimmung von d:

$$m_1 = \sqrt{\frac{2680}{18 - 2}} = \pm 13'' \tag{17}$$

Diese Resultate sind offenbar ganz befriedigend, die mittleren Fehler $\pm 2'$ und $\pm 3'$ sind nicht grösser, als man sie auch bei directen Be-

stimmungen erhalten haben würde, und die indirecten Bestimmungen haben den grossen Vorzug, dass sie ganz genau der Handhabung des Instruments bei wirklichen Messungen angepasst sind. Dass der mittlere Fehler eines einzelnen beobachteten d immer noch $= \pm 13''$ ist, obgleich jedes solches d, wie Eingangs berichtet ist, das Mittel aus 15 Einstellungen ist, kann nicht verwundern, denn diese Einstellungen, mit Schätzung der Höhenlage, ein wenig unter oder über einem Faden, werden, — namentlich wenn α in die Nähe von 180° kommt, — durch kleine Verschiedenheiten der Höhe bereits empfindlich getroffen.

Die nun als definitiv anzunehmenden Neigungen

$$i = -39' \pm 2' \qquad n = -5' \pm 3' \tag{18}$$

stimmen ziemlich mit den früher mitgetheilten directen Bestimmungen (s. § 34. (3) S. 177 und (4) S. 179):

$$i = -32' \text{ und } n = -8' \tag{19}$$

Dabei ist nicht sicher, ob das Instrument in beiden Fällen (die Bestimmung (18) ist im September 1883, (19) im Juli 1884 gemacht), genügend gleich war.

Man kann nun mit den Werthen (18) nach der Formel (25) § 47. S. 242 und mit den Coefficienten der Tabelle § 47. S. 243 eine Correctionstabelle für unser Instrument berechnen (die Coefficienten von § 47. S. 243 gelten zunächst für $\beta = 70°$, während unser Instrument $\beta = 71° 20'$ hat, doch macht dieser Unterschied wenig aus). Die so gefundenen Hauptwerthe sind:

$\alpha =$	30°	90°	170°	190°	270°	320°
$\alpha - \alpha' =$	$+7''$	$+27''$	$+5' 46''$	$-5' 58''$	$-39''$	$-21''$

§ 49. Prismatischer Fehler des (grossen) Spiegels des Spiegel-Prismenkreises.

Der prismatische Spiegelfehler wirkt ähnlich wie beim Sextanten (§ 38. S. 297). Die Unsymmetrie des Prismas wirkt constant und geht in den Indexfehler ein, wie früher beim Sextanten der Fehler des kleinen Spiegels; wir lassen daher das Prisma sofort ausser Betracht und haben nun nach Fig. 1. für planparallelen Spiegel:

$$\alpha = 2\beta - 2\gamma \tag{1}$$

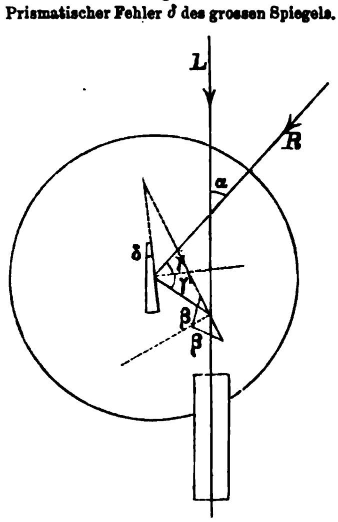
für prismatischen Spiegel:

$$\alpha' = 2\beta - (\gamma + \gamma') \tag{2}$$

$$\alpha - \alpha' = \gamma' - \gamma \tag{3}$$

Nach (6) § 38. S. 196 ist:

Fig. 1.
Prismatischer Fehler δ des grossen Spiegels.



$$\gamma' - \gamma = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2 \gamma} \tag{4}$$

oder mit

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5}$$

Durch die Indexcorrection wird ein constanter Theil mit $\alpha = 0$ überall subtrahirt, daher ist nach Berücksichtigung des Indexfehlers:

$$\alpha - \alpha' = 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)} - 2\,\delta \sqrt{1 + (\mu^2 - 1)\,sec^2 \beta} \tag{6}$$

Diese Gleichung gilt für den Fall I. Fig. 1. Macht man dieselben Betrachtungen wie hier (1) bis (6) für Fig. 1., nun auch für den Fall II. nach Fig. 6. § 45. S. 234, so findet man genau die Formel (6) auch für den Fall II., wenn nur, — wie bisher immer geschehen — der gemessene Winkel α im Fall II über 180° gezählt wird.

Nach der Formel (6) ist folgende Tafel berechnet mit $\mu^2 - 1 = 1{,}25$ und mit $\delta = 1'$, sowie mit $\beta = 70^0$.

α	$2\,\delta \sqrt{\ldots}$	$\alpha - \alpha'$	α	$2\,\delta \sqrt{\ldots}$	$\alpha - \alpha'$
0°	6′ 50″	0′ 0″	180°	3′ 6″	— 3′ 44″
30	4 23	— 2 27	210	3 23	— 3 27
60	3 32	— 3 18	240	4 1	— 2 49
90	3 11	— 3 39	270	5 39	— 1 11
120	3 2	— 3 48	300	13 2	+ 6 12
150	3 0	— 3 50	320	∞	∞

(7)

Im Vergleich mit der entsprechenden Tafel für den Sextanten, ((17) § 38. S. 198) zeigt diese Uebersicht schon bei kleinen Winkeln sehr bedeutende Fehler, was damit zusammenhängt, dass gerade in der Nullstellung, bei der Indexbestimmung, der grosse Spiegel sehr schief von den Lichtstrahlen getroffen wird, und dass der daraus hervorgehende Fehler allen Messungen anhaftet.

Der Erfinder hat diese schwache Seite sehr wohl gekannt; wir haben seine hierüber geschriebenen Worte auf S. 229 gesperrt abgedruckt. „Die Prüfung der Güte der Verglasung liegt dem Beobachter daher sehr zur Hand, ebenso wie der Künstler dadurch gewissermassen gezwungen ist, nur gute Spiegel anzuwenden." Wir haben daher bei unserm Bamberg'schen Instrument Fig. 1. § 45. S. 230 die Prüfung des Spiegels durch Umsetzen dieses Spiegels bei 7 möglichst verschiedenen Alhidadenstellungen zwischen 5° und 133° vorgenommen, ebenso wie beim Sextanten S. 198—199.

Die Winkelmessungen α_1 und α_2, welche je mit der ersten und mit der zweiten Lage des Spiegels angestellt wurden, haben folgende Resultate

ergeben, welchen wir sofort auch die nach Formel (6) mit $\delta = 10''$ berechneten Werthe $(\alpha - \alpha')_{10}''$ sowie die Differenzen- und Quotientenrechnung beifügen.

α_1	α_2	$\alpha_2 - \alpha_1 = 2v$	v	$(\alpha - \alpha')_{10}''$	$\frac{v}{(\alpha - \alpha')_{10}''}$
5° 44′ 33″	5° 44′ 27″	− 6″	− 3″	− 9″	+ 0,3
15 54 4	15 55 12	+ 68	+ 34	− 19	− 1,8
31 1 43	31 2 9	+ 26	+ 13	− 28	− 0,5
45 50 24	45 50 26	+ 2	+ 1	− 34	− 0,0
62 0 52	62 0 38	− 14	− 7	− 37	+ 0,2
81 4 38	81 4 36	− 2	− 1	− 40	+ 0,0
132 36 26	132 36 34	+ 8	+ 4	− 43	− 0,1
			Einfaches Mittel		− 0,3

(8)

Die beobachteten Werthe v sind im Mittel nur gleich dem — 0,3fachen Theil der mit der Annahme $\delta = 10''$ berechneten Werthe, und es ist daher der prismatische Spiegelfehler nur = — 0,3 (10″) = — 3″ anzunehmen, wobei das —Zeichen für α_2 die entgegengesetzte Lage der Spiegelconvergenz δ, als in Fig. 1. angenommen ist, ausdrückt. Der absolute Werth 3″ selbst ist aus den vorstehenden Beobachtungen relativ so unsicher bestimmt, dass man ihn wohl auch = Null annehmen darf. Uebrigens sollte man streng genommen den verschiedenen Quotienten in der obigen Tabelle nicht gleiches Gewicht geben, sondern denjenigen, welche zu grösseren Werthen $(\alpha - \alpha')_{10}''$ gehören, grösseres Gewicht. Eine solche zweite Berechnung der Beobachtungen (8) hat statt — 0,3 den nahezu übereinstimmenden Werth — 0,2 gegeben. Die Widersprüche der beobachteten Differenzen v sind nicht grösser als die Instrumentengenauigkeit erwarten liess; man hat zu bedenken, dass in jedem v nicht nur die Fehler der Winkelmessungen α_1 und α_2 selbst, sondern auch die zugehörigen, jeweils neu zu bestimmenden Indexfehler stecken.

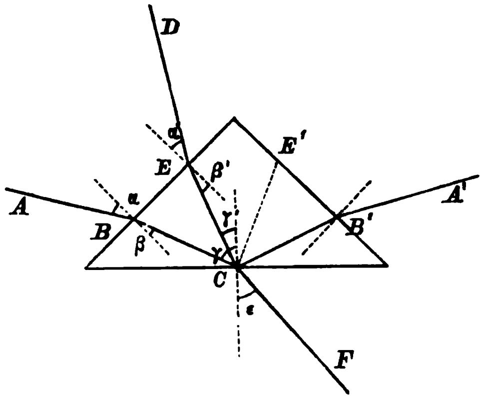
Auf Grund dieser Untersuchung können wir den grossen Spiegel unseres Bamberg'schen Instruments S. 230 für **sehr gut** erklären.

§ 50. Reflexion eines gleichschenkligen rechtwinkligen Prismas.

Nachdem schon in § 45. Fig. 4. S. 231 gezeigt worden ist, dass das gleichschenklige rechtwinklige Prisma ebenso wie ein ebener Spiegel reflectirend wirken kann, betrachten wir zur Vorbereitung der Theorie des Prismenkreises (§ 54.), die Reflexionswirkung und die Grenzfälle, in welchen diese Wirkung aufhört, nun näher. Der Strahl $ABCB'A'$ in Fig. 1. (nächste Seite) zeigt alle Verhältnisse wie bei dem früher S. 231

betrachteten Strahl $ABCB'A'$. Bei C tritt hier totale Reflexion ein. Anders verhält es sich mit dem Strahl $DECF$; derselbe fällt in C so steil auf die Hypotenuse, dass er nicht total reflectirt wird, sondern mit Brechung (und Farbenzerstreuung) nach EF austritt; und nur ein kleiner Theil des auf dem Weg EC gehenden Lichtes wird nach CE' reflectirt. Der Grenzwerth des Winkels γ', bei welchem die totale Reflexion in C aufhört, ergibt sich aus der Brechungsgleichung für den Punkt C:

Fig. 1.
Reflexion oder Brechung an der Hypotenusenebene des Prismas.



$$\sin \varepsilon = \mu \sin \gamma' \tag{1}$$

Der Maximalwerth von ε ist $= 90^0$, also ist der Maximalwerth von γ' bestimmt durch:

$$\sin \gamma' = \frac{1}{\mu}$$

was mit $\mu = 1{,}5$ gibt:

$$\gamma' = 41^0\ 49' \tag{2}$$

Der entsprechende Grenzwerth von β' ist:

$$\beta' = 45^0 - \gamma' = 3^0\ 11' \tag{3}$$

und hieraus:

$$\sin \alpha' = \mu \sin \beta' \qquad \alpha' = 4^0\ 47' \tag{4}$$

Hiernach bekommt man zur Veranschaulichung der Wirkungsgrenzen des reflectirenden Prismas die Fig. 2., in welcher die Grenzstrahlen für totale Reflexion mit 0 und 5 bezeichnet sind, während die Strahlen 1, 2, 3, 4 den runden Werthen $90^0 - \gamma = 10^0, 20^0, 30^0$, und 40^0 entsprechen, welche die Strahlen im Innern des Prismas mit der Hypotenuse bilden.

Der Strahl a ist derjenige, welcher parallel der Hypotenuse an die Kathete herantritt, dieser Strahl a scheidet diejenigen Strahlen, welche sozusagen von der Vorderseite oder von der Hinterseite der Hypotenuse reflectirt werden. Zwischen 5 und 2 bekommt man viel lichtstärkere Bilder als zwischen 2 und 0, und deswegen werden beim Steinheil'schen Prismenkreis (§ 53.) die Strahlen zwischen 2 und 0, welche sozusagen in überstumpfem Winkel reflectirt werden, gar nicht mehr benutzt. Es ist das nicht anders als beim ebenen Spiegel, wo auch die sehr flach

auffallenden und austretenden Strahlen nicht mehr zu Messungen brauchbar sind.

Fig. 2.
Totale Reflexion an der Hypotenusenebene des Prismas.

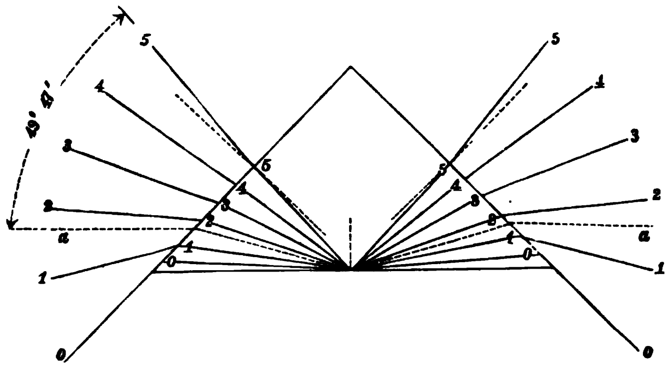
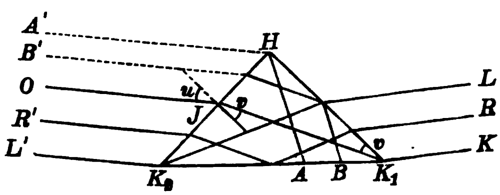


Fig. 3. ist gezeichnet, um diese Verhältnisse der Lichtstärken deutlicher zu machen: Sieht man in der Richtung OJ auf die Kathete HK_2, so erblickt man zwei ganz verschiedene Lichtfelder HJ und JK_2, welche durch eine scharfe Linie J (Bild der Kathetenkante K_1) getrennt sind. Der linke Theil HJ gibt ein verkehrtes Bild des Hypotenusentheils AK_1

Fig. 3.
Reflexion und Brechung an der Hypotenusenebene.



oder der bei AK_1 von Aussen hereintretenden Strahlen, wovon man sich deutlich überzeugt, wenn man bei AK_1 ein mit irgend einer Zeichnung oder Schrift versehenes Papier an die Hypotenuse hält. Dieser linke Theil HJ kommt also für die Reflexionswirkung der Hypotenuse, welche wir im Sinne haben, überhaupt nicht in Betracht, sondern nur der rechte Theil JK_2, welcher die Strahlen L und R, welche zur anderen Kathete hereintreten, in L' und R' verkehrt zeigt. Die Breiten dieser beiden Bildflächen HJ und JK_2 verhalten sich wie *tang* v zu (1 — *tang* v). Z. B. für $u = 45^0$ (OJ parallel der Hypotenuse) wird $v = 28^0\ 8'$, *tang* $v = 0{,}53$, also in diesem Falle die beiden Lichtfelder nahezu gleich breit, dagegen für die Strahlen, welche in Fig. 2. von 2 nach 0 hinliegen, wird der für Reflexion in unserem Sinne nutzbare Lichtstreifen rasch sehr schmal und die Bilder schwach.

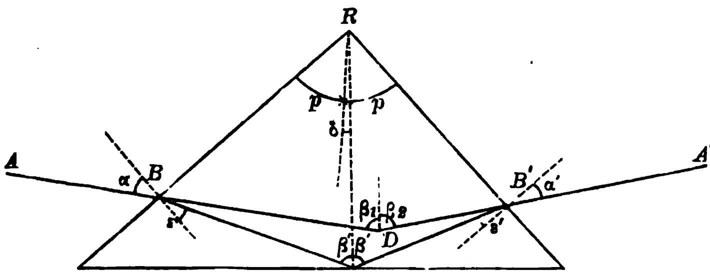
Um die Strahlen A und B gänzlich fern zu halten, da sie für Reflexionsprismen nur störend sind, kann man die Hypotenusenebene mit Papier oder Deckfarbe belegen.

Andererseits kann man die Hypotenusenebene auch mit Staniol oder Silberamalgam wie einen gewöhnlichen Glasspiegel belegen, so dass sie auch für steil auffallende Strahlen EC (Fig. 1.) reflectirend wird.

§ 51. Unsymmetrie des Prismas.

Wenn das Prisma nicht genau gleichschenklig ist, so entstehen Abweichungen von ähnlicher Art wie bei einem ebenen Spiegel, dessen Vorder- und Hinterflächen nicht genau parallel sind. Fig. 1. zeigt ein

Fig. 1. Unsymmetrisches Prisma.



solches Prisma, welches nicht genau einen rechten Winkel, sondern einen Winkel $2p$ hat, dessen Halbirungslinie mit der Normalen zur Hypotenuse den kleinen Winkel δ macht, wodurch auch die Ungleichheit 2δ der beiden spitzen Prismenwinkel bestimmt ist. Für den Weg eines Strahls AA' bekommt man:

$$\text{Brechung in } B \quad \sin\alpha = \mu \sin\varepsilon \tag{1}$$

$$\text{Brechung in } B' \quad \sin\alpha' = \mu \sin\varepsilon' \tag{2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Dreieck } BCR & (90^0 - \varepsilon) + \beta' + (p + \delta) = 180^0 \\ \quad\text{„}\quad B'CR & (90^0 - \varepsilon') + \beta' + (p - \delta) = 180^0 \\ \hline & \varepsilon - \varepsilon' = 2\delta \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ll} B\overset{\mathfrak{D}}{E}(R) & (90^0 - \alpha) + \beta_1 + (p + \delta) = 180^0 \\ B'\underset{\mathfrak{D}}{L}(R) & (90^0 - \alpha') + \beta_2 + (p - \delta) = 180^0 \\ \hline & (\beta_1 - \beta_2) - (\alpha - \alpha') = 2\delta \end{array} \tag{4}$$

Diese Formeln sind dieselben wie früher (S. 196) beim prismatischen Spiegel, deswegen führt auch die Weiterrechnung auf dieselben Schlussformeln wie dort, nämlich:

$$\alpha - \alpha' = 2\delta \sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2\alpha} \tag{7}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\delta \left(\sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2\alpha} - 1\right) \tag{8}$$

oder, um die Veränderliche $\beta = \alpha + 45^0$ einzuführen:

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\delta\left(\sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2(\beta - 45^0)} - 1\right)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$(\beta) = \sqrt{1 + 1{,}25 \sec^2(\beta - 45^0)} - 1 \qquad (9)$$

also

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\delta\,(\beta) \qquad (9a)$$

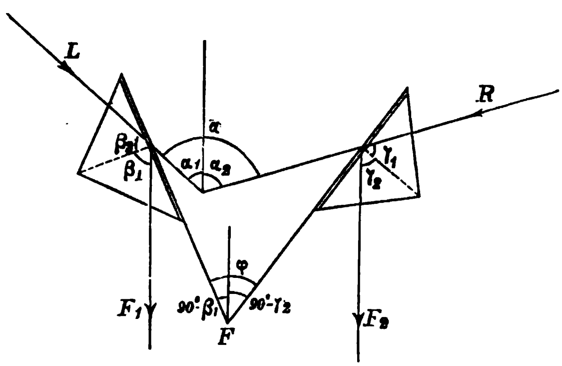
Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

α	$\beta = \alpha + 45^0$	(β)	α	$\beta = \alpha + 45^0$	(β)
90°	135°	∞	35°	80°	0,692
85	130	11,867	25	70	0,588
75	120	3,434	15	60	0,530
65	110	1,828	5	50	0,503
55	100	1,191	0	45	0,500
45	90	0,871	—4 47′	40 13′	0,503

(10)

Als Vorbereitung für den Prismenkreis (§ 53.) betrachten wir nun die Winkelmessung durch Reflexion an den Hypotenusenebenen zweier Prismen Fig. 2. Die Prismen werden zu diesem Zweck gewöhnlich übereinander gestellt, da es sich aber für uns nur um die Richtungen der verschiedenen Strahlen handelt, haben wir in Fig. 2. zwei Prismen neben-

Fig. 2.
Messung des Winkels α durch Reflexion an den Hypotenusenebenen zweier Prismen.



einander gestellt, und denken uns den Winkel α zwischen den Strahlen L und R dadurch gemessen, dass L am linksseitigen Prisma nach F_1 und R am rechtsseitigen Prisma nach F_2 reflectirt wird, so dass F_1 und F_2 parallel, d. h. bei übereinander gestellten Prismen zusammenfallend werden.

Wenn jedes einzelne Prisma genau symmetrisch ist, so ist $\beta_1 = \beta_2$

und $\gamma_1 = \gamma_2$, während im Falle einer Unsymmetrie δ (Fig. 1.) die Formeln und Resultate (1) bis (10) gelten.

Jedenfalls ist:

$$\alpha_1 = 180^0 - (\beta_1 + \beta_2) \qquad \alpha_2 = 180^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 360^0 - (\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2) \tag{11}$$

$$\varphi = 90^0 - \beta_1 + 90^0 - \gamma_2 = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_2) \tag{12}$$

$$\alpha = 2\,\varphi + (\beta_1 - \beta_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) \tag{13}$$

d. h. im Falle der Prismensymmetrie ist $\alpha = 2\,\varphi$.

Wenn dagegen die Prismen nicht genau symmetrisch sind, und das eine die Unsymmetrie δ, das andere die Unsymmetrie δ' hat, so ist nach (9 a):

$$\beta_2 - \beta_1 = 2\,\delta\,(\beta) \qquad \gamma_2 - \gamma_1 = 2\,\delta'\,(\gamma) \tag{14}$$

Nun sollen beide Prismen in Bezug auf δ gleich sein (was dadurch erreicht wird, dass man ein Prisma in zwei Theile zerschneidet), dann wird $\delta' = \delta$, und (14) in (13) eingesetzt gibt:

$$\alpha = 2\,\varphi + 2\,\delta\,((\gamma) - (\beta)) \tag{15}$$

(γ) und (β) sind die durch (9) bestimmten Functionen von β und γ; wenn also $\beta = \gamma$ wird, so ist auch $(\beta) = (\gamma)$ und (15) geht über in:

$$\alpha = 2\,\varphi \tag{16}$$

d. h. in Worten: Wenn man zwei gleiche Prismen in gegenseitig symmetrischer Stellung nach Fig. 2. mit $\beta = \gamma$ zur Winkelmessung anwendet, so wird die Unsymmetrie δ der Prismen eliminirt.

Man kann dieses Princip auch noch weiter ausdehnen: Wenn man mit beliebigen Winkeln β und γ eine Messung nach Fig. 2. macht, und dann eine zweite Messung, bei welcher das linke Prisma nun den Winkel γ des rechtsseitigen Prismas annimmt und umgekehrt, so wird in dem arithmetischen Mittel aus beiden Messungen ebenfalls die Unsymmetrie δ eliminirt.

§ 52. Pyramidenform des Glasprismas.

Es kann noch die Frage aufgeworfen werden, welche Ablenkungen entstehen, wenn die drei Ebenen des Prismas sich nicht in drei parallelen Geraden schneiden, oder wenn — sozusagen — das Prisma im geometrischen Sinne überhaupt kein wahres Prisma, sondern eine (abgestumpfte) Pyramide ist. Die aus guten Werkstätten gelieferten Prismen lassen in dieser Hinsicht keine Fehler fürchten, welche nachtheiligen Einfluss auf die Verwendung zu Reflexionswerkzeugen ausüben könnten; trotzdem behandeln wir diese Frage hier theoretisch, zumal weil dadurch auch die Betrachtungen von § 46. nochmals zum Theil neue Beleuchtung erfahren.

Wir behandeln die Pyramidenfrage gemeinsam mit der Annahme schief eintretender Lichtstrahlen.

Fig. 1. zeigt das richtige Prisma rechtwinklig auf der Grundebene stehend, der Weg eines Lichtstrahls, welcher parallel mit der Grundebene eintritt, ist:

$$PACBQ$$

K_1 und K_2 sind die Kathetennormalen und H (bzw. CH) ist die Hypotenusennormale. P' und Q' sind Auswärtsverlängerungen der im Innern des Prismas liegenden Strahlen CA und CB.

Fig. 1. Querschnitt des Prismas.

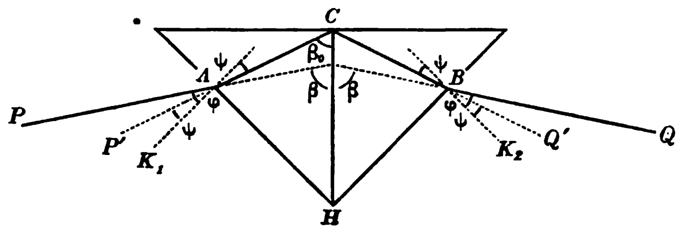
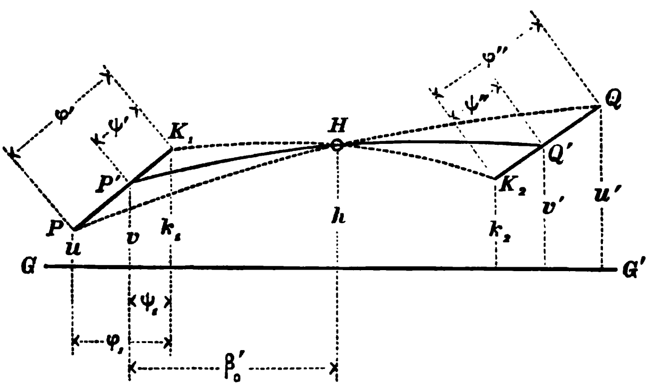


Fig. 2. Veranschaulichung aller geneigten Strahlen.



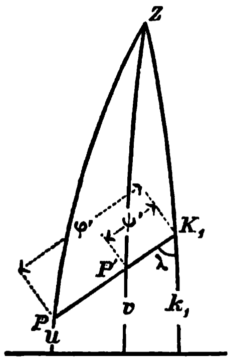
Es sollen nun die drei Prismenebenen gegen die Grundebene schiefe Stellungen einnehmen oder es sollen die Normalen K_1 K_2 und H der drei Prismenebenen nicht mehr parallel der Grundebene sein, und auch der Eintrittstrahl PA soll eine Neigung gegen die Grundebene annehmen; dann treten die verschiedenen Strahlen, welche in Fig. 1. in einer Ebene lagen, aus einer Ebene heraus, und wir veranschaulichen diese Strahlen durch Fig. 2., welche ein Theil einer Kugel sein soll, in deren Mittelpunkt alle Strahlen, mit sich selbst parallel, verlegt worden sind (vgl. Fig. 1. und 2. § 46. S. 237). Jeder Punkt von Fig. 2. stellt also einen Strahl vor, und die Gerade GG' ist Darstellung der Grundebene, auf welche die Strahlen projicirt werden.

Wegen der Brechung in A ist der Bogen PK_1P' in Fig. 3. ein grösster Kreisbogen, ebenso auch QK_2Q', ebenso ist wegen der Reflexion

an der Hypotenuse $P'HQ'$ ein Bogen, dagegen kann $K_1 H K_2$ nur dann ein Bogen, ohne Knick in H, sein (wie in Fig. 2. § 46, S. 237), wenn die drei Normalen $K_1 H$ und K_2 in einer Ebene liegen, d. h. wenn man es mit einem wirklichen Prisma und nicht mit einer Pyramide zu thun hat.

Wir betrachten vorerst den linksseitigen Theil von Fig. 2. und insbesondere die drei Strahlen $P\ K_1\ P'$, welche nach dem Brechungsgesetz in einer Ebene liegen, weshalb wie schon erwähnt, in Fig. 2. die drei Punkte $P K_1 P'$ durch einen Grosskreisbogen verbunden sind. Die Neigungen gegen die Grundebene, bzw. $u\ k_1\ v$ sind in die Fig. 2. eingeschrieben, ebenso wie die Winkel $\varphi''\ \psi''$, welche die Strahlen selbst, und $\varphi_1\ \psi_1$, welche ihre Horizontalprojectionen unter sich bilden.

Fig. 3. Linksseitiger Theil von Fig. 2.



In Fig. 3. ist der linksseitige Theil von Fig. 2. nochmals herausgezeichnet, und der Winkel λ bei K_1 vorübergehend eingeführt. Nun ist in dem sphärischen Dreieck $Z P K_1$

$$\cos (90^0 - u) = \cos (90^0 - k_1) \cos \varphi' - \sin (90^0 - k_1) \sin \varphi' \cos \lambda$$
$$\sin u = \sin k_1 \cos \varphi' - \cos k_1 \sin \varphi' \cos \lambda$$

Die entsprechende Gleichung für v gibt:

$$\sin v = \sin k_1 \cos \psi' - \cos k_1 \sin \psi' \cos \lambda$$

in erster Näherung lauten diese beiden Gleichungen:

$$u = k_1 \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \lambda$$
$$v = k_1 \cos \psi' - \sin \psi' \cos \lambda$$

λ wird eliminirt, das gibt:

$$\frac{u}{\sin \varphi'} - \frac{v}{\sin \psi'} = k_1 \left(\frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'} - \frac{\cos \psi'}{\sin \psi'}\right)$$
$$= k_1 \frac{\sin (\psi' - \varphi')}{\sin \varphi' \sin \psi'}$$
$$u - v \frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'} = k_1 \frac{\sin (\psi' - \varphi')}{\sin \psi'}$$

Nun ist aber wegen der Brechung

$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'} = \mu = \text{Brechungscoefficient, also:}$$
$$u - \mu v = k_1 \frac{\sin (\psi' - \varphi')}{\sin \varphi'} \mu$$

oder

$$v = \frac{u}{\mu} + k_1 \frac{\sin (\varphi' - \psi')}{\sin \varphi'} \tag{1}$$

Nun gilt im rechtsseitigen Theil von Fig. 2. dieselbe Beziehung, d. h.

$$v' = \frac{u'}{\mu} + k_2 \frac{\sin(\varphi'' - \psi'')}{\sin \varphi''} \tag{2}$$

Für die Reflexion an der Hypotenuse haben wir nach (3) S. 182:

$$v + v' = 2\, h \cos \beta_0$$

nach Fig. 1. ist

$$\beta_0 = 45^0 + \psi \quad \text{sowie auch } \beta = 45^0 + \varphi \tag{3}$$

also

$$v + v' = 2\, h \cos (45^0 + \psi) \tag{4}$$

Für unsere Zwecke braucht man in (1) und (2) die Winkel φ' ψ, und φ'' ψ'' nicht mehr zu unterscheiden, wir schreiben daher schlechthin φ und ψ und haben dann aus (1), (2) und (4) zusammen:

$$\frac{u + u'}{\mu} + (k_1 + k_2) \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi} = 2\, h \cos (45^0 + \psi) \tag{5}$$

Die Neigungen k_1 k_2 und h der drei Prismenflächen sind nicht von einander unabhängig. Wenn man es mit einem wirklichen Prisma zu thun hat, so ergeben sich einfache Beziehungen zwischen den drei Neigungen h k_1 und k_2 einerseits, und der Maximalneigung n, welche in dem Prismenquerschnitt nach der Richtung des grössten Gefälls zur Grundebene stattfindet. Ohne eine besondere Figur überblickt man rasch:

$$h = n \cos w \tag{6}$$

$$k_1 = n \cos (w + 45^0) = n \cos w \cos 45^0 - n \sin w \sin 45^0 \tag{7}$$

$$k_2 = n \cos (w - 45^0) = n \cos w \cos 45^0 + n \sin w \sin 45^0 \tag{8}$$

wo w der Richtungswinkel ist, welchen die Hypotenusennormale mit der genannten Richtung des grössten Gefälls macht. Aus (6), (7) und (8) folgt:

$$k_1 + k_2 = 2\, n \cos w \cos 45^0 = 2\, h \cos 45^0 \tag{9}$$

und setzt man dieses in (5), so kriegt man, nach einiger goniometrischer Entwicklung:

$$\frac{u + u'}{\mu} = 2\, h \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \cos (45^0 + \psi) \tag{10}$$

es ist aber wegen der Brechung

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\mu} \tag{11}$$

und mit Zuziehung von (3) wird dann (10):

$$u + u' = 2\, h \cos (45^0 + \varphi) \text{ oder } = 2\, h \cos \beta \tag{12}$$

d. h. dieselbe Formel, welche in (1) § 46. S. 238 auf viel kürzerem geometrischem Wege gefunden worden ist.

Wenn nun aber der brechende Glaskörper nicht die Form eines Prismas hat, so gelten die Gleichungen (6), (7), (8) nicht mehr, sondern es kommt noch irgend ein Werth k' hinzu, welcher auch in (9) eingeht, d. h. man hat dann:

$$k_1 + k_2 = 2\, h \cos 45^0 + k' \tag{13}$$

und die Weiterrechnung hiemit gibt statt (12):

$$u + u' = 2\,h\cos\beta - k'\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\psi} \qquad (14)$$

Bei den Prismen, welche zu mathematischen Instrumenten verwendet werden, ist der Pyramidalfehler k' jedenfalls viel kleiner als die Neigungen u u' und h, welch letztere auch bei berichtigten Instrumenten 5′—10′ betragen können, während k' unter 1′ gehalten werden kann. Wir werden daher den Pyramidalfehler k' des Prismas nicht weiter berücksichtigen.

Aehnlich wie dieser Pyramidalfehler wirkt auch die Combination der Unsymmetrie δ des Prismas (vgl. Fig. 1. S. 252) mit den Neigungsfehlern. Die Berücksichtigung der Unsymmetrie δ in den Gleichungen (7) und (8) würde nur Correctionsglieder von der Ordnung $n\,\delta$ ergeben, welche zu vernachlässigen sind.

§ 53. Der Prismenkreis von Steinheil.

Der Erfinder dieses Instruments hat dasselbe durch eine Abhandlung in den Astronom. Nachrichten, 11. Band (1834) S. 43 u. ff. eingeführt, aus welcher wir Folgendes citiren:

„Der in dem Berliner Jahrbuch für 1830 enthaltene schöne Aufsatz des Herrn Professor Encke über Spiegelsextanten, und das ungünstige Ergebniss einer genauen Prüfung dieses wichtigen Instrumentes in demselben, hat mich seiner Zeit veranlasst nachzudenken, ob nicht diesen Mängeln zu begegnen wäre. Es schien mir der grösste Fehler des Sextanten darin zu liegen, dass die Undeutlichkeit des doppelt reflectirten Bildes mit der Grösse des zu messenden Winkels zunimmt. Ein zweiter Mangel desselben ist, dass er nicht auf alle Winkel angewendet werden kann. Diese Fehler sind aber so wesentlich mit Newtons Princip der Reflexion verknüpft, dass man, um sie zu heben, genöthigt ist, von jenem Princip abzugehen."

Steinheil construirt nun sein neues Instrument durch Uebereinandersetzen zweier rechtwinklig-gleichschenkliger Glasprismen, deren Hypotenusenebenen wie ebene Spiegel wirken. Die gegenseitige Drehung beider Prismen wird auf einem Theilkreis gemessen.

Was dann die unvermeidlichen Formfehler der Prismen (Unsymmetrie) betrifft, so hat Steinheil die daraus entspringenden Winkelmessungsfehler dadurch eliminirt, dass er zwei wenigstens unter sich ganz gleiche Prismen sich durch Zerschneiden eines Prismas von doppelter Höhe verschaffte, und diese beiden Prismen symmetrisch anwandte. (§ 51. S. 253.)

Trotz dieses sinnreichen Gedankens und des Vorzugs der Winkelmessung in der Gegend von 180° ist der Steinheil'sche Prismenkreis bis heute nicht zu allgemeiner Anwendung in der Praxis gelangt, wahrscheinlich deswegen, weil man bei der elegantesten Anwendung desselben das Fernrohr weder nach dem einen noch nach dem anderen Zielpunkt, sondern in der Mitte zwischen beiden hindurch zu richten hat, was allerdings

etwas unbequem, aber nach unseren Erfahrungen auch beim Gebrauch in freier Hand durchaus nicht absolut hinderlich ist.

Auf Grund des in unserer hannoverschen geodätischen Sammlung befindlichen Exemplars eines Steinheil'schen Prismenkreises (welches jedoch nicht Steinheil-Ertel'sches Original, sondern Meyerstein'sche Construction ist) und mit theilweiser Benützung der Zeichnung desselben aus „Hunäus, die geometrischen Instrumente" S. 520, erhalten wir folgende Beschreibung der mechanischen Einrichtung des Instrumentes (vgl. Fig. 1. und 2.).

Fig. 1*). Prismenkreis von Steinheil.
Aufriss. Maassstab 1:2,6. Theilkreisdurchmesser = 13 cm.

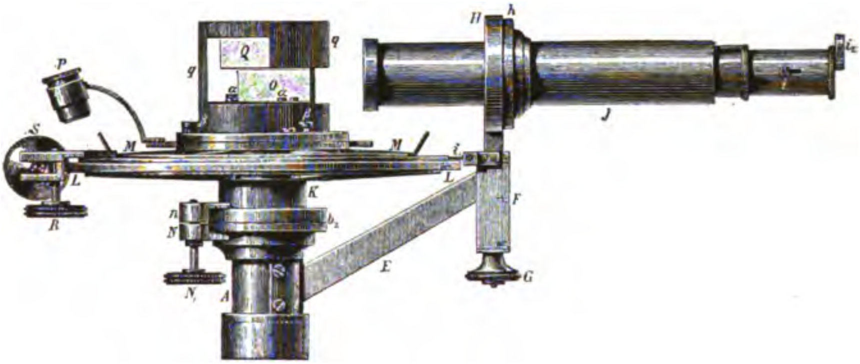


Fig. 2**). Grundriss.

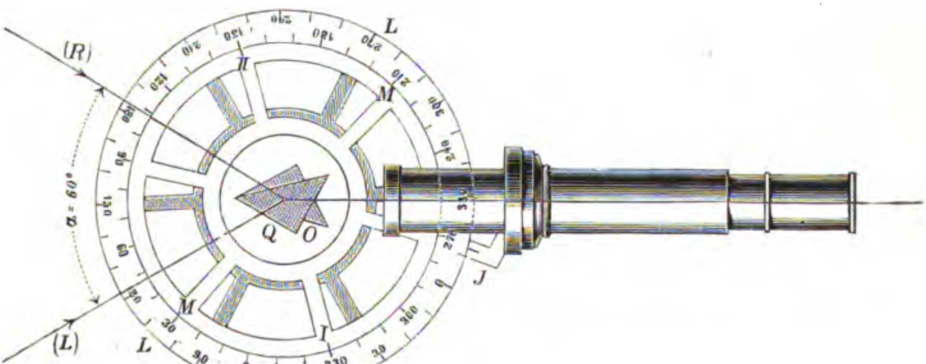
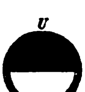


Fig. 3. Objectivblendung.



*) Fig. 1. ist eine Verkleinerung der Zeichnung von Hunäus S. 520.

**) Fig. 2. ist als Grundriss von uns dazu gezeichnet, jedoch mit Weglassung aller mechanischen Einzelheiten. Die Projectionen der beiden Prismen stimmen im

Man denke sich einen Limbus L und eine Alhidade M, welche sowohl unter sich als gegen ein Fernrohr mittelst eines zweifachen Verticalachsensystems drehbar sind, ähnlich wie bei einem Repetitionstheodolit. Auf dem Limbus L ist das untere Prisma O fest aufgesetzt, und die Alhidade M fasst das obere Prisma Q fest von Oben mittelst der Hülse q. Hält man also den Limbus fest, so kann man mittelst der Alhidade das obere Prisma gegen das untere beliebig drehen, und die relative Drehung beider Prismen an der Limbustheilung mittelst zweier Nonien I und II messen. Zeigt ein Nonius 0^0 oder 180^0, so sind die Hypotenusen beider Prismen parallel, zeigt er 90^0 oder 270^0, so stehen die Hypotenusen rechtwinklig gegen einander; im Grundriss Fig. 2. zeigen die beiden Nonien 330^0 und 150^0, folglich bilden hier die Hypotenusenebenen einen Winkel von $360^0 - 330^0 = 30^0$. Bezeichnen wir die Alhidadenablesung kurzweg mit I (weil Nonius II immer um 180^0 gegen I gedreht ist, und nur der Excentricität wegen angebracht ist), so können wir allgemein sagen: der Winkel beider Hypotenusen ist gleich 360^0 — I.

$$\text{Hypotenusenwinkel} = 360^0 - \text{I} \tag{1}$$

Nun kommt das Fernrohr in Betracht, welches durch die Strebe E (Fig. 1.) mit dem Untergestell verbunden ist. Dieses Fernrohr kann von beliebiger Seite her auf die Prismen gerichtet werden, denn es besteht zwischen dem Limbus und dem Fernrohr eine Drehung, welche durch eine äussere (grobe) Limbustheilung und durch einen Index J (im Grundriss J, im Aufriss i_1) gemessen wird (mit Hemmung n N N_1 im Aufriss).

Steht der Index J auf 0^0 seiner Theilung, so ist das Fernrohr der unteren Prismenhypotenuse parallel, während die Richtung des Fernrohrs gegen das obere Prisma dann von der Nonienablesung I abhängt. In Fig. 2. zeigt der Index J auf $345^0 = 360^0 - 15^0$ seiner Theilung, folglich macht das Fernrohr mit der unteren Hypotenuse einen Winkel von 15^0. Da ferner die beiden Hypotenusen wie ebene Spiegel wirken, so ergibt sich aus allem Betrachteten zusammen (§ 51. S. 253), dass die zwei Strahlen (L) und (R), welche in Fig. 2. einen Winkel $\alpha = 60^0$ einschliessen, nach der Brechung durch die Prismen vereinigt im Fernrohr gesehen werden.

Wenn man in dieser symmetrischen Weise einen Winkel α messen will (dessen Grösse man vorher beiläufig wissen muss), so hat man also so zu verfahren: Man stellt den Index J auf $360^0 - \frac{\alpha}{4}$ und den Nonius I auf $360^0 - \frac{\alpha}{2}$, schliesst die Hemmungen N_1 und R (Fig. 1.) und darf dann erwarten, die Strahlen (L) und (R) zusammen ins Gesichtsfeld zu bringen, worauf mit der Mikrometerschraube S beide Bilder scharf zur Deckung gebracht werden.

Aufriss und im Grundriss nicht zusammen, weil im Grundriss der wichtigste Fall der Anwendung, Symmetralstellung der Prismen gegen das Fernrohr, veranschaulicht werden sollte.

Vertauscht man die Funktiönen des oberen und unteren Prismas, so werden auch die Ablesungen entsprechend anders, oder man hat folgende zwei Fälle:

Zu messender Winkel $= \alpha$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Index } J = \frac{\alpha}{4} \\ \text{Nonius I} = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{Nonius II} = 180^0 + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Index } J = 360^0 - \frac{\alpha}{4} \\ \text{Nonius I} = 360^0 - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{Nonius II} = 180^0 - \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ausserdem kann man noch J um 180^0 umstellen, womit auch I und II sich ändern, d. h. man hat im Ganzen 4 Instrumentenstellungen zur Symmetralmessung.

Indexfehler. Man stellt sowohl den Index J auf 0^0 als auch den Nonius I nahezu auf 0^0, und wird dann die beiden Bilder eines Zielpunktes zusammen im Gesichtsfeld finden. Bringt man dieselben mit der Mikrometerschraube S zur Deckung, so erhält man diejenige Ablesung am Nonius I und Nonius II, welche der Parallelstellung beider Hypotenusen entspricht, d. h. das was man beim Sextanten die Indexablesung nennt. Nun kann man die Parallelstellung der Hypotenusen in vier verschiedenen Combinationen bewirken, und ob in allen diesen vier Fällen dieselbe Ablesung an den Nonien I und II erhalten wird, hängt von der völligen Berichtigung des Instrumentes ab. Wir bemerken hiezu vorerst nur, dass man diejenige Parallelstellung zur Nullablesung wählen soll, welche der Ablesung für (L) und (R) am nächsten liegt.

Für Sonnenbeobachtungen dient ein Blendglas vor dem Ocular, und, etwa für Monddistanzen, Halbblendungen des Objectivs, Fig. 3. in verschiedenen Stärken, deren Anordnung aber bei verschiedenen Höhenlagen des Fernrohrs nicht allen Zwecken entspricht.

Wir betrachten nun die in Fig. 2. mit symmetrischen Prismen angedeutete Messungsart an dem praktischen Beispiel einer Monddistanz. Man hat hiebei im Vergleich mit der Sextantenmessung die Eigenthümlichkeit, dass man direct weder nach dem Mond noch nach dem Stern (oder Sonne) visirt, sondern das Fernrohr in der Mitte zwischen beiden Zielpunkten hindurch zu richten hat. Gegen erstes Vermuthen fanden wir, dass dieses gar nicht so schwierig ist; nur müssen natürlich die Prismen und das Fernrohr vorher nahezu so gestellt werden, dass man beide Bilder im Gesichtsfeld finden kann. Auch bei Höhen über dem künstlichen Horizont ist das Finden der Bilder nicht schwierig, man richtet das Fernrohr hier horizontal und sucht, mit freier Hand das Instrument bewegend, die Bilder zusammenzubringen.

Eine Monddistanzmessung wurde am 18. October 1883 in der Anordnung (3) mit Mond und Jupiter gemacht, wobei keine Blendungen

(Fig. 3.) nöthig waren. Zur vorläufigen Einstellung diente die im Nautical Almanac 1883, S. 179, 18. Oct. XV^h gegebene wahre Distanz

$$\alpha = 57^0, \quad \frac{\alpha}{2} = 28^0\ 30' \quad \frac{\alpha}{4} = 14^0\ 15'$$

Es wurde daher nach (3) $J = 346^0$ gestellt, und für die Jupitermondberührung abgelesen:

$$\text{I} = 331^0\ 29'\ 40'' \quad \text{II} = 151^0\ 26'\ 20'' \quad \text{Mittel} = 331^0\ 28'\ 0''$$

Hiezu für den Indexfehler mit $J = 0$, Deckung beider Bilder eines Sterns:

$$\text{I} = 0^0\ 3'\ 30'' \quad \text{II} = 180^0\ 1'\ 30'' \quad \text{Mittel} = 0^0\ 2'\ 30''$$

Hieraus berechnet man die gemessene Distanz:

$$= 2\,(360^0\ 2'\ 30'' - 331^0\ 28'\ 0'') = 57^0\ 9'\ 0''$$

Dieses ist eine völlige Messung. Sowohl die Mondberührungen als auch die Indexfehler-Bestimmungen wurden mehrfach wiederholt und daraus erhalten:

	Chronometer	Distanz
1.	$4^h\ 18^m\ 55^s$	$57^0\ 9'\ 16''$
2.	4 22 20	57 6 16
3.	4 26 45	57 4 36
4.	4 30 45	57 1 46
5.	4 33 30	57 1 56
6.	4 36 0	57 0 6
7.	4 38 40	56 57 16
Mittel	$4^h\ 29^m\ 34^s$	$57^0\ 3'\ 2''$

$= 16^h\ 29^m\ 34^s$ astr. Zeit, 18. October 1883.

Die Reduction des Chronometers auf Ortszeit beträgt $- 0^m\ 30^s$, die Breite ist $\varphi = 52^0\ 22'\ 20''$, damit wurden die 7 Distanzen in 3 Gruppen reducirt und gaben im Mittel die Länge $0^h\ 37^m\ 40^s$ v. Gr., welche anderwärts $0^h\ 38^m\ 53^s$ bekannt ist.

Dieses eine Beispiel mag zur Veranschaulichung der Anwendung des Instrumentes genügen.

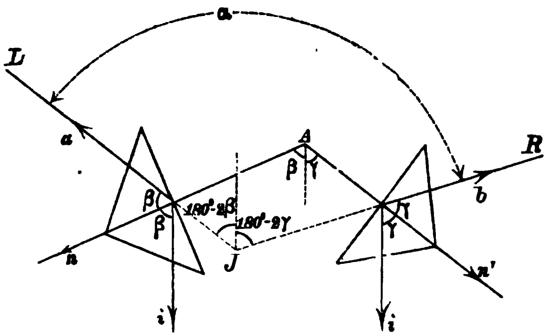
Die Berichtigung des Prismenkreises verlangt zunächst Parallelrichtung des Fernrohrs zur Kreisebene, was in § 34. S. 176—177 beschrieben worden ist, die dann noch nöthige Stellung der Prismenebenen rechtwinklig zur Fernrohrachse wird in § 55. behandelt werden.

§ 54. Theorie der Fernrohr- und Prismenneigungen des Prismenkreises.

Die Theorie der Prismen- und Fernrohrneigungen beim Prismenkreis schliesst sich an die früher behandelten entsprechenden Theorien des Sextanten und des Spiegel-Prismenkreises an. (§ 36. und § 47.) Zur Veranschaulichung der Strahlen und ihrer gegenseitigen Beziehungen dienen die beiden Figuren Fig. 1. und Fig. 2., deren Bedeutung nach dem Vorgang von § 36. und § 47. sofort klar sein wird.

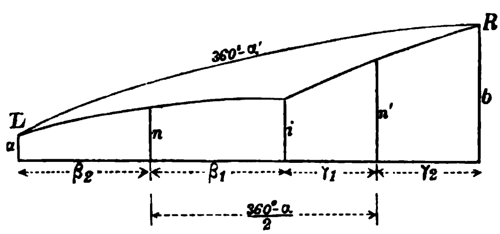
In Fig. 1. sind die beiden Prismen nicht übereinander, sondern neben einander gezeichnet, was insofern zulässig ist, als es sich nur um die Richtungen der Strahlen, welche beliebig parallel verlegt werden dürfen, handelt.

Fig. 1.



a und b sind die Neigungen zweier Strahlen L und R, deren Winkel α dadurch gemessen wird, dass die Strahlen nach der Reflexion sich im Fernrohr mit der gemeinsamen Neigung i vereinigen. Die Neigungen der beiden Hypotenusennormalen sind n und n'.

Fig. 2.



Nach Fig. 1. besteht die Gleichung:

$$\alpha = (180^0 - 2\beta) + (180^0 - 2\gamma) = 360^0 - (2\beta + 2\gamma) \qquad (1)$$

oder

$$\beta + \gamma = 180^0 - \frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Fig. 2. gibt:

$$\frac{360^0 - \alpha}{2} = \beta_1 + \gamma_1$$

oder

$$2\beta_1 + 2\gamma_1 - (360^0 - \alpha) = 0 \qquad (3)$$

Der Projectionssatz (2) § 35. S. 181 gibt:

$$(\beta_2 + \beta_1) + (\gamma_1 + \gamma_2) - (360^0 - \alpha') = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 tang\,\frac{360^0 - \alpha}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 cotg\,\frac{360^0 - \alpha}{2}$$

Dieses mit (3) zusammen genommen gibt:

$$\alpha - \alpha' = (\beta_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \gamma_1) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 tang \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 cotg \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

Nach (2) § 46. S. 238 hat man:

$$\beta_1 - \beta_2 = 2 i n \sin\beta - 2 n^2 \sin\beta \cos\beta \quad (5)$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2 i n' \sin\gamma - 2 n'^2 \sin\gamma \cos\gamma \quad (6)$$

Ferner nach (1) § 46. S. 238:

$$a + i = 2 n \cos\beta$$
$$b + i = 2 n' \cos\gamma$$

also

$$\frac{a+b}{2} = - i + n \cos\beta + n' \cos\gamma \quad (7)$$

$$\frac{a-b}{2} = n \cos\beta - n' \cos\gamma \quad (8)$$

(5), (6), (7) und (8) in (4) eingesetzt geben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' = {} & 2(n^2 \sin\beta \cos\beta + n'^2 \sin\gamma \cos\gamma) - 2 i (n \sin\beta + n' \sin\gamma) \\ & + \Big(i - (n \cos\beta + n' \cos\gamma)\Big)^2 tang \frac{\alpha}{2} - \Big(n \cos\beta - n' \cos\gamma\Big)^2 cotg \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} (9)$$

Diese Gleichung enthält die Fehlertheorie des Prismenkreises im Allgemeinen. Will man praktische Schlüsse daraus ziehen, so muss man die verschiedenen Fälle, welche auftreten, einzeln weiter behandeln. Es kommt nämlich nun darauf an, wie sich α aus β und γ zusammensetzt, z. B. mit $\beta = \gamma$, oder $\beta = 0$, $\gamma = 0$ etc., ferner muss festgesetzt werden, wie der Indexfehler bestimmt sein soll.

Wir werden hier nur denjenigen Fall weiter behandeln, in welchem sich der Prismenkreis am schönsten zeigt, nämlich den Fall, dass beide Prismen symmetrisch gegen das Fernrohr stehen. In diesem Fall ist $\beta = \gamma$, also wegen (2):

$$\beta = \gamma = 90^0 - \frac{\alpha}{4} \quad (10)$$

Dieses in (9) eingesetzt gibt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha' = {} & (n^2 + n'^2) \sin \frac{\alpha}{2} - 2 i (n + n') \cos \frac{\alpha}{4} \\ & + \left(i - (n + n') \sin \frac{\alpha}{4}\right)^2 tang \frac{\alpha}{2} - (n - n')^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} cotg \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} (11)$$

Der Indexfehler soll wie beim Sextanten für $\alpha = 0$ bestimmt werden. Setzt man in (11) $\alpha = 0$, so erhält man:

$$[\alpha - \alpha']_0 = - 2 i (n + n') \quad (12)$$

Wenn man also den für $\alpha = 0^0$ bestimmten Indexfehler bei allen Messungen in Rechnung bringt, so bleibt als Fehler nur noch die Differenz zwischen (11) und (12), d. h.:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - \alpha')_0 = (n^2 + n'^2)\, sin\, \frac{\alpha}{2} + 2\,i\,(n + n')\left(1 - cos\, \frac{\alpha}{4}\right) \\ + \left(i - (n + n')\, sin\, \frac{\alpha}{4}\right)^2 tang\, \frac{\alpha}{2} - (n - n')^2\, sin^2 \frac{\alpha}{4}\, cotg\, \frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\}(13)$$

Ehe wir weitergehen, vergleichen wir diese Formel (13) mit der entsprechenden Formel, welche Bessel in Nr. 254 der Astronomischen Nachrichten (11. Band, 1834, S. 242) für den Steinheil'schen Prismenkreis gefunden hat, nämlich als Num. [10]:

$$\left.\begin{aligned}D = 2\,d - [(m' - m) - (m_1' - m_1)]\left[\varphi\left(90^0 - \frac{1}{2}\,d - \mu\right) - \varphi\,(90^0 - \mu)\right] \\ + 2\,\beta\,(\gamma_1 - \gamma)\left(1 - cos\, \frac{1}{2}\,d\right) - (\gamma_1\gamma_1 + \gamma\gamma)\, sin\, d \\ + (\gamma_1 + \gamma)^2\, cos\, d\; tang\, \frac{1}{2}\,d \\ - 2\left[\beta + (\gamma_1 - \gamma)\, sin\, \frac{1}{2}\,d\right]^2 tang\, d\end{aligned}\right\}(a)$$

Hiebei sind m' und m die Winkel des einen Prismas, d. h. sehr nahe $m' = m = 45^0$, und ebenso sehr nahe $m_1' = m_1 = 45^0$ für das zweite Prisma. Oder es hat $m' - m$ dieselbe Bedeutung wie $2\,\delta$ in unserem § 51. Fig. 1. S. 252. φ ist ein Functionszeichen, nämlich nach S. 236 der astronom. Nachrichten:

$$\varphi\, x = \frac{1}{k}\, \frac{cos\, x'}{cos\, x}, \qquad sin\, x' = k\, sin\, x, \qquad \frac{1}{k} = 1{,}5$$

woraus man entwickeln kann:

$$\varphi\, x = \sqrt{1 + 1{,}25\, sec^2 x} \tag{b}$$

d. h. $\varphi\, x$ ist dieselbe, auf die Unsymmetrie des Prismas bezogene Function, welche wir in (9) § 51. S. 253 kurz mit (β) bezeichnet haben, und das mit m und φ zusammengesetzte Glied der Bessel'schen Formel (a) bezieht sich lediglich auf den Einfluss der Unsymmetrie der Prismen, welchen wir bereits in § 51. erledigt haben.

In den übrigen Gliedern von (a) wollen wir die Bessel'schen Bezeichnungen in unsere eigenen bei (13) angewandten Bezeichnungen umsetzen, es ist nämlich:

	(B)		(J)
Zu messender Winkel	D	=	α'
Abgelesener "	$2\,d$	=	α
Fernrohrneigung	β	=	i
Prismenneigung	γ	=	n
"	γ_1	=	$-\,n'$

Damit wird (a):

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha = -\,2\,i\,(n' + n)\left(1 - cos\, \frac{\alpha}{4}\right) - (n^2 + n'^2)\, sin\, \frac{\alpha}{2} \\ + (n' - n)^2\, cos\, \frac{\alpha}{2}\, tang\, \frac{\alpha}{4} \\ - 2\left(i - (n + n')\, sin\, \frac{\alpha}{4}\right)^2 tang\, \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' = sin\, \frac{\alpha}{2}\,(n^2 + n'^2) + 2\,i\,(n + n')\left(1 - cos\, \frac{\alpha}{4}\right) \\ + 2\left(i - (n + n')\, sin\, \frac{\alpha}{4}\right)^2 tang\, \frac{\alpha}{2} - 2\,(n' - n)^2\, sin^2 \frac{\alpha}{4}\, cotg\, \frac{\alpha}{2}\end{aligned} \tag{c}$$

Vergleicht man diese Bessel'sche Formel (*c*) mit unserer Gleichung (13), so findet man den Unterschied, dass die zwei letzten Glieder von (*c*) den Coefficienten 2 haben, welcher bei den letzten Gliedern von (13) fehlt. Dieser Unterschied rührt von einem Versehen in der Bessel'schen Entwicklung auf S. 239—240 der Astronomischen Nachrichten Nr. 254 her. Es steht nämlich dort unter 5. in dem Ausdruck für D:

$$\frac{1}{2}(\beta_1' - \beta')^2 \, cotg \, \frac{1}{2}(\alpha_1' - \alpha) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta')^2 \, tang \, \frac{1}{2}(\alpha_1' - \alpha')$$

während es heissen sollte:

$$\left(\frac{\beta_1' - \beta'}{2}\right)^2 cotg \, \frac{1}{2}(\alpha_1' - \alpha) - \left(\frac{\beta_1' + \beta'}{2}\right)^2 tang \, \frac{1}{2}(\alpha_1' - \alpha')$$

Dadurch wird der fehlerhafte Factor 2 in den zwei letzten Gliedern von (*c*) erklärt.

Nach dieser Abschweifung zur Vergleichung mit Bessel's Formel (*a*) fahren wir an unserer Formel (13) fort:

Die drei Neigungen i, n und n' sind von einander unabhängig; wir wollen nun den Fall besonders behandeln, dass $n' = n$ ist. Dieses gibt aus (13):

$$(\alpha - \alpha')_0 = 2\,n^2 \sin\frac{\alpha}{2} + 4\,i\,n\left(1 - \cos\frac{\alpha}{4}\right) + \left(i - 2\,n \sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 tang\,\frac{\alpha}{2}$$

Wenn man nach Potenzen von i und von n ordnet, die Coefficienten auf ihre goniometrisch einfachste Form bringt, und zugleich die Maassreductionen für i und n in Minuten, $\alpha - \alpha'$ in Secunden anbringt (wie bei (25) S. 188 und (14) S. 266), so erhält man:

$$(\alpha - \alpha')_0 = [1]\,i^2 + [2]\,i\,n + [3]\,n^2 \qquad (14)$$

wo

$$[1] = \frac{60}{\varrho'}\, tang\,\frac{\alpha}{2}$$

$$[2] = \frac{60}{\varrho'}\, 4\left(1 - sec\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$[3] = \frac{60}{\varrho'}\, 2\, tang\,\frac{\alpha}{2} = 2\,[1]$$

Hiernach ist Folgendes berechnet:

α	*log* [1]	*log* [2]	*log* [3]	100 [1]	100 [2]	100 [3]
20°	7.4882	6.9069_n	7.7892	0,31″	— 0,08″	0,62″
40	7.8030	7.5253_n	8.1041	0,64	— 0,34	1,27
60	8.0033	7.9060_n	8.3043	1,01	— 0,81	2,02
80	8.1657	8.1994_n	8.4667	1,46	— 1,58	2,93
100	8.3181	8.4569_n	8.6191	2,08	— 2,86	4,16
120	8.4804	8.7085_n	8.7815	3,02	— 5,11	6,05
140	8.6808	8.9885_n	8.9818	4,80	— 9,74	9,59
160	8.9956	9.3769_n	9.2966	9,90	— 23,82	19,80
180	∞	∞	∞	∞	∞	∞
200	8.9956_n	9.5162	9.2966_n	— 9,90	+ 32,82	— 19,80

Für $\alpha = 180^0$ wird $\alpha - \alpha' = \infty$ und die mechanische Deutung hievon liegt darin, dass, nach der Indexfehlerbestimmung mit $\alpha = 0$ und $n' = n$, die Strahlen, welche unter einem Winkel von 180^0, d. h. genau diametral gerichtet, auf das Instrument fallen, dadurch bereits bestimmte Austrittsrichtungen im Fernrohr erhalten, und im Allgemeinen überhaupt nicht zur Deckung gebracht werden, sondern nur etwa, bei horizontalem Kreis, einer über den andern eingestellt werden können.

Dieses veranlasst uns, nochmals zu der Formel (11) zurückzukehren, und diese unter der Annahme weiter zu behandeln, dass der Indexfehler nicht bei $\alpha = 0$, sondern bei $\alpha = 180^0$ bestimmt werde. Allerdings steht ein Winkel $\alpha = 180^0$ nicht so bequem zu Gebote wie im Winkel $\alpha = 0$, welcher nur einen Zielpunkt hat, man kann aber auch einen Winkel α, welcher nahezu 180^0 beträgt, dadurch zur Indexfehlerbestimmung benutzen, dass man zuerst diesen Winkel α selbst und dann seine Horizontergänzung $360^0 - \alpha$ misst (Umkehren des Instruments) und dann in der Summe beider Messungen den doppelten Indexfehler findet. Oder sei es, dass man Collimatorfernröhre anwendet, wir behandeln diesen Fall nun theoretisch:

Wenn man in der Gleichung (11) setzt:

$$\alpha = 180^0 \qquad \frac{\alpha}{2} = 90^0 \qquad \frac{\alpha}{4} = 45^0$$

so wird

$$[\alpha - \alpha']_{180} = (n^2 + n'^2) - 2i\,(n + n')\cos 45^0 + \left(i - (n + n')\sin 45^0\right)^2 \infty - 0 \tag{15}$$

Dieses ist nur endlich, wenn

$$i - (n + n')\sin 45^0 = 0 \tag{16}$$

wird, oder

$$n + n' = i\sqrt{2} \tag{17}$$

Mechanisch gedeutet heisst dieses: die Coincidenz zweier Diametralstrahlen kann in der Fernrohrmitte (gegebener Werth von i) nur dann gelingen, wenn die Prismen so justirt werden, wie es die Gleichung (16) oder (17) verlangt. Nun gibt die Subtraction von (11) und (15), mit Rücksicht auf (16):

$$\alpha - \alpha' - [\alpha - \alpha']_{180} = (\alpha - \alpha')_{180}$$

$$(\alpha - \alpha')_{180} = -(n^2 + n'^2)\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) - 2i\,(n + n')\left(\cos\frac{\alpha}{4} - \cos 45^0\right)$$
$$+ \left(i - (n + n')\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} - (n - n')^2 \sin\frac{\alpha}{4}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \tag{18}$$

Wegen (17) ist:

$$n' = -n + i\sqrt{2}$$
$$n'^2 = n^2 - 2in\sqrt{2} + 2i^2$$

$$n^2 + n'^2 = 2n^2 - 2in\sqrt{2} + 2i^2 \tag{19}$$

$$n - n' = 2n - i\sqrt{2} \tag{20}$$

(19) und (20) sind in (18) zu setzen, d. h.:

$$(\alpha - \alpha')_{180} = -2(n^2 - i\,n\sqrt{2} + i^2)\left(1 - sin\frac{\alpha}{2}\right) - 2\,i^2\sqrt{2}\left(cos\frac{\alpha}{4} - cos\,45^0\right)$$
$$+ i^2\left(1 - \sqrt{2}\,sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 tang\frac{\alpha}{2} - \left(2\,n - i\sqrt{2}\right)^2 sin^2\frac{\alpha}{4}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

Wenn man nach Potenzen von i und n ordnet, so erhält man:

$$(\alpha - \alpha')_{180} = [1]\,i^2 + [2]\,i\,n + [3]\,n^2 \tag{21}$$

$$[1] = -2\left(1 - sin\frac{\alpha}{2}\right) - 2\left(\sqrt{2}\,cos\frac{\alpha}{4} - 1\right)$$
$$+ \left(\sqrt{2}\,sin\frac{\alpha}{4} - 1\right)^2 tang\frac{\alpha}{2} - 2\,sin^2\frac{\alpha}{4}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

$$[2] = 2\sqrt{2}\left(1 - sin\frac{\alpha}{2}\right) + 4\sqrt{2}\,sin^2\frac{\alpha}{4}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

$$[3] = -2\left(1 - sin\frac{\alpha}{2}\right) - 4\,sin^2\frac{\alpha}{4}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

Hiebei ist:

$$[2] = -\sqrt{2}\,[3]$$

Hiernach wurde Folgendes berechnet:

α	*log* [1]	*log* [2]	*log* [3]	100 [1]	100 [2]	100 [3]
0°	8.6934n	8.6934	8.5429n	— 4,94"	+ 4,94"	— 3,49"
20	8.6258n	8.6537	8.5032n	— 4,23	+ 4,51	— 3,18
40	8.5557n	8.6092	8.5487n	— 3,60	+ 4,07	— 2,88
60	8.4804n	8.5579	8.4074n	— 3,02	+ 3,61	— 2,56
80	8.3964n	8.4969	8.3464n	— 2,49	+ 3,14	— 2,22
100	8.2980n	8.4208	8.2703n	— 1,99	+ 2,64	— 1,86
120	8.1751n	8.3194	8.1689n	— 1,50	+ 2,09	— 1,48
140	8.0046n	8.1702	8.0197n	— 1,01	+ 1,48	— 1,05
160	8.7129n	7.9000	7.7495n	— 0,52	+ 0,79	— 0,56
180	. .	. .	. .	0,00	0,00	0,00
200	7.7458	7.9762n	7.8257	+ 0,56	— 0,95	+ 0,66

Nun haben wir noch für beide Fälle — Indexfehlerbestimmung bei 0° und Indexfehlerbestimmung bei 180° — die Messungsfehler ausgerechnet mit den Annahmen $i = 10'$ und $n = \pm 10'$, mit Benutzung der oben zu den Formeln (14) und (21) berechneten Coefficienten [1], [2], [3], und die Resultate in der Tabelle auf folgender Seite zusammengestellt.

Man sieht hieraus zunächst, dass die von Prismen- und Fernrohrneigung herrührenden Fehler des Prismenkreises etwa von derselben Grössenordnung sind, wie beim Sextanten und beim Spiegel-Prismenkreis (vgl. S. 243), weshalb in dieser Hinsicht keines der drei Instrumente einen wesentlichen Vorzug verdient.

Gemessener Winkel α	Indexfehlerbestimmung bei $\alpha = 0^0$ mit $n' = n$		Indexfehlerbestimmung bei $\alpha = 180^0$ mit $n' + n = i\sqrt{2}$	
	$i = \pm 10'$, $n = \pm 10'$	$i = \pm 10'$, $n = \mp 10'$	$i = \pm 10'$, $n = \pm 10'$	$i = \pm 10'$, $n = \mp 10'$
0^0	+ 0,0″	+ 0,0″	— 3,5″	— 13,4″
20	+ 0,8	+ 1,0	— 2,9	— 11,9
40	+ 1,6	+ 2,2	— 2,4	— 10,5
60	+ 2,2	+ 3,8	— 2,0	— 9,2
80	+ 2,8	+ 6,0	— 1,6	— 7,9
100	+ 3,4	+ 9,1	— 1,2	— 6,5
120	+ 4,0	+ 14,2	— 0,9	— 5,1
140	+ 4,6	+ 24,1	— 0,6	— 3,5
160	+ 5,9	+ 53,5	— 0,3	— 1,9
180	+ ∞	± ∞	∓ 0	∓ 0
200	+ 3,1	— 62,5	+ 0,3	+ 2,2

Diese Tabelle zeigt ferner, dass es durchaus nicht gleichgültig ist, ob man den Indexfehler bei 0^0 oder bei 180^0 bestimmt; will man einen Winkel in der Nähe von 180^0 messen, so soll man auch denjenigen Indexfehler und diejenige Prismenjustirung (entsprechend Gleichung (17)) anwenden, welche dem flachen Winkel 180^0 entspricht. Da in diesem Falle der Fehler niemals unendlich wird, ist dieser zweite Fall auch im Allgemeinen vorzuziehen. Nimmt man die Prismenjustirung für den zweiten Fall mit $n + n' = i\sqrt{2}$, bestimmt aber den Indexfehler selbst mit $\alpha = 0$, so erhält man als Messungsfehler die Differenzen der rechtsseitigen Spalten der letzten Tabelle für die Werthe α und den Anfangswerth $\alpha = 0^0$.

§ 55. Neuere Prismeninstrumente.

Der Steinheil'sche Prismenkreis hat neben seinen Vorzügen auch manche Mängel, worüber Professor Kaiser in Leiden in den „Astronom. Nachrichten“ Nr. 499 (21. Band, 1844, S. 289) sich ausgesprochen hat, indem er zugleich Verbesserungen angab. Zunächst sollen die Prismen an ihren reflectirend wirkenden Ebenen (an den Hypotenusenebenen bei den Steinheil'schen Prismen) von aussen mit Folie belegt werden, damit auch steil auffallende Strahlen an diesen Flächen reflectirt werden. (Dieses wurde bereits am Schluss von § 50. S. 252 bemerkt). Dadurch entsteht auch eine sehr einfache Methode zur Untersuchung der Rechtwinkligkeit der Prismenebenen gegen die Fernrohrachse, indem man das Fernrohr, dessen Fadenkreuz nach § 44. Fig. 2. S. 225 oder Fig. 4. S. 228 leuchtend gemacht wurde, rechtwinklig gegen die zu untersuchende Ebene stellt, und zusieht, ob der Faden sich in sich selbst oder wenigstens in gleicher Höhe

reflectirt. (Visirt man mit dem Diopter Fig. 4. § 44. S. 228 rechtwinklig gegen die Hypotenuse in der Mitte, also auf den rechten Winkel, so sieht man zwei Fadenbilder nebeneinander, welche in gleicher Höhe mit dem directen Fadenbild sein sollen.) Kaiser gibt auch an, wie man durch Reflexionen die Form des Prismas controlliren kann (Astr. Nachr. Nr. 499. S. 292. 293).

Steinheil's Prismen sind zu klein im Verhältniss zu der Oeffnung des Fernrohrs, wodurch bei gewissen Winkeln die Breite des Lichtbüschels, welches vom Prisma kommt, beträchtlich kleiner ist als die Oeffnung des Fernrohrs.

Professor Kaiser hat auch eine andere Form der Prismen eingeführt, nämlich statt des gleichschenklig rechtwinkligen ein gleichschenklig-stumpfwinkliges Prisma, mit einem stumpfen Winkel von 105° und zwei spitzen Winkeln von 37° 30′. Es wird dadurch der Vortheil erlangt, dass die Breite des Lichtstrahlenbüschels, d. h. der Parallelabstand der austretenden Strahlen O und L', in Fig. 3. § 50. S. 251, mehr constant bleibt.

Theils mit Benutzung der Angaben Kaiser's, theils nach eigenen Ueberlegungen hat vor Kurzem Mechaniker Wegener in Berlin einen Prismenkreis construirt und patentiren lassen (Patentschrift Nr. 17554 Klasse 42, vom 18. April 1882), von welchem eine erste Beschreibung in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1883, S. 76 gegeben ist.

Wir haben in jüngster Zeit ein solches Instrument für die hannoversche Sammlung angeschafft*) und darnach die Zeichnungen Fig. 1. und Fig. 2. anfertigen lassen.

Fig. 1. zeigt das Reflexionsprincip mit einem festen Prisma U und einem beweglichen Prisma O.

In Bezug auf diese Prismen ist die Zeichnung Fig. 1. nur schematisch behandelt, indem die Deckplatte, welche das obere Prisma O mit der Alhidade $A\,A'$ verbindet, abgenommen gedacht ist. Das Fernrohr $F\,F'$ visirt parallel der Langseite des unteren festen Prismas U, und die Alhidade $A\,A'$ dreht sich mit dem oberen beweglichen Prisma O.

Zur Messung eines Winkels α zwischen den Strahlen L und R müssen die Langseiten der Prismen den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ unter sich bilden, und denselben Winkel $\frac{\alpha}{2}$ muss die Alhidade $A\,A'$ von der Nullstellung an durchlaufen.

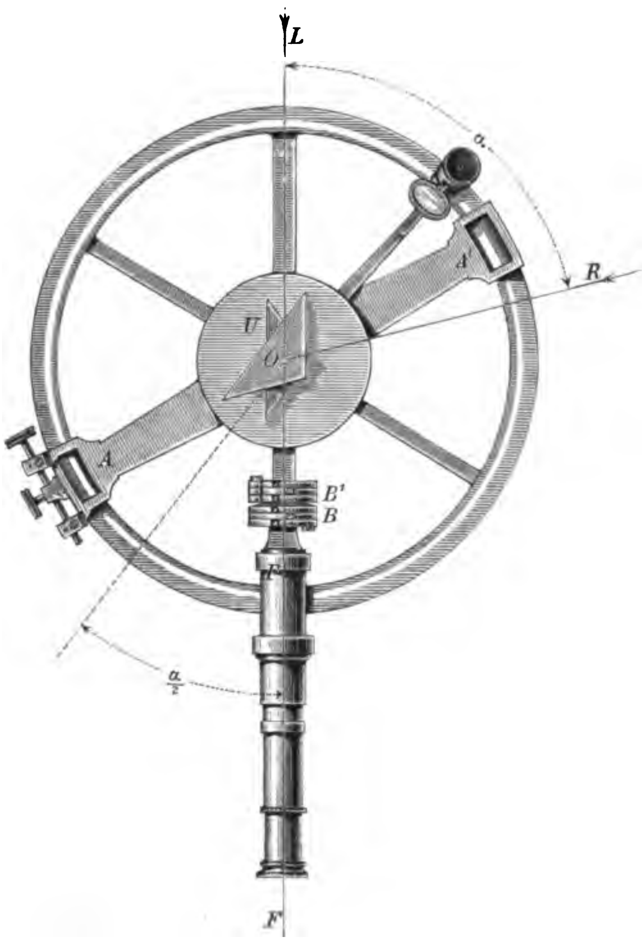
Während bei Steinheil das Fernrohr unter beliebigem Winkel gegen beide Prismen gerichtet werden kann, indem die Verticalachse nach Art eines Repetitions-Theodolits construirt ist, hat Wegener auf die eine dieser Drehungen verzichtet und das Fernrohr nebst dem unteren Prisma in feste Verbindung mit dem Limbus gebracht. Der dieser Beschränkung zu

---

*) Bei dieser Gelegenheit wurde von Herrn Wegener uns folgendes Citat mitgetheilt: Handleiding tot de beschryvende en werkdadige Stuurmanskunst door J. C. Pilaar. Tweede druk, Eerste deel, 1847.

Grunde liegende Gedanke ist ohne Zweifel der, dass man immer einen Zielpunkt in die Fernrohrrichtung bekommen soll, was Parallelität des Fernrohrs mit der Langseite eines Prismas voraussetzt, allein da wir an dem Beispiel einer Monddistanz (S. 262) gezeigt haben, dass man sehr wohl auch von freier Hand messen kann, ohne den einen oder anderen Zielpunkt in der Fernrohrrichtung zu haben, und da die verschiedenen Combinationen der Prismen, welche ein doppeltes Verticalachsensystem gewährt, in Verbindung mit der Theorie von § 46. und § 54. zu manchen schönen Untersuchungen gebraucht werden können (auf welche wir hier nicht eingehen), möchten wir den Verfertiger bitten, bei seinen Prismenkreisen die zweifache Drehbarkeit wie bei Steinheil wieder herzustellen.

Fig. 1.
Prismenkreis von Wegener.
Maassstab 1 : 4, Kreisdurchmesser = 25 cm.



Andererseits sind die Vorzüge des Wegener'schen Prismenkreises folgende:

Die Prismen sind sehr gross, mit Langseiten von 73 mm und Höhen von 28 mm, während bei Steinheil die Langseiten, d. h. die Hypotenusen nur 39 mm und die Höhen, d. h. die halben Hypotenusen nur 19,5 mm sind. Die Höhen in verticalem Sinn sind in beiden Fällen gleich, etwa = 14 mm. Wegen dieser grossen Prismen gibt das neue Instrument vorzügliche helle Bilder, wie kein anderes unserer zahlreichen Reflexionsinstrumente. Die Grösse des messbaren Winkels beträgt $\alpha = 120^0$ und zwar nach rechts und nach links, denn man kann den Alhidadenarm A' unter dem Fernrohr durchdrehen, also das obere Prisma in jede beliebige Lage rechts oder links gegen das untere Prisma bringen.

Die Blendgläser BB', welche die übliche Drehung um eine verticale Achse haben, sind in fester Höhenlage gegen die Prismen, und zwar hat jedes der beiden Prismen je drei verschieden starke Blendgläser B oder B'. Die Höhenverschiebung des Fernrohrs ist hievon unabhängig, so dass in jeder Höhenlage des Fernrohrs die Strahlen immer in gewünschter Weise gedunkelt werden können (was bei der Objectivblendung Fig. 3. S. 259 des Steinheil'schen Instrumentes nicht möglich ist). Auch die Blendungsgläser BB' sind kein Hinderniss für das Durchlaufen des Alhidadenarms A' (unter BB' und unter F).

Das Objectiv des Fernrohrs hat 18 mm Oeffnung und 16 cm Brennweite, das stärkste Ocular gibt 10fache Vergrösserung mit 2^0 50' Gesichtsfeld, das zweite Ocular 6fache Vergrösserung mit nahezu gleichem Gesichtsfeld wie das erste, ein drittes terrestrisches, Galilei'sches Ocular gibt nur zweifache Vergrösserung.

Eine Gesammtansicht des Instruments zeigt die nach einer Photographie gemachte Fig. 2. S. 273.

Statt weiterer Beschreibungen theilen wir einige mit dem Wegener'schen Prismenkreis auf dem Stativ Fig. 1. S. 160 gemachte Sonnen-Monddistanzmessungen mit:

Hannover, Technische Hochschule ($\varphi = 52^0\ 23'$, $\lambda = 0^h\ 38^m\ 25^s$ v. Gr.) 19. April 1885 Nachmittag.

Mittlere Ortszeit	Gemessene Distanz (Indexfehler berücksichtigt)	
$5^h\ 28^m\ 58^s$	$59^0\ 5'\ 0''$	Lufttemperatur $t = 16^0$ C.
5 29 43	59 5 20	Barometer $Q_0 = 762$ mm
5 30 18	59 5 50	
5 30 54	59 6 0	
5 31 25	59 6 0	
5 31 53	59 6 10	
5 32 22	59 6 20	
Mittel $5^h\ 30^m\ 48^s$	$59^0\ 5'\ 49''$	

Es zeigten sich theilweise störende Reflexe, welche aber dadurch vermieden werden können, dass die Sonne, welche nur im oberen Prisma ein

Fig. 2. Prismenkreis von Wegener mit Stativ.

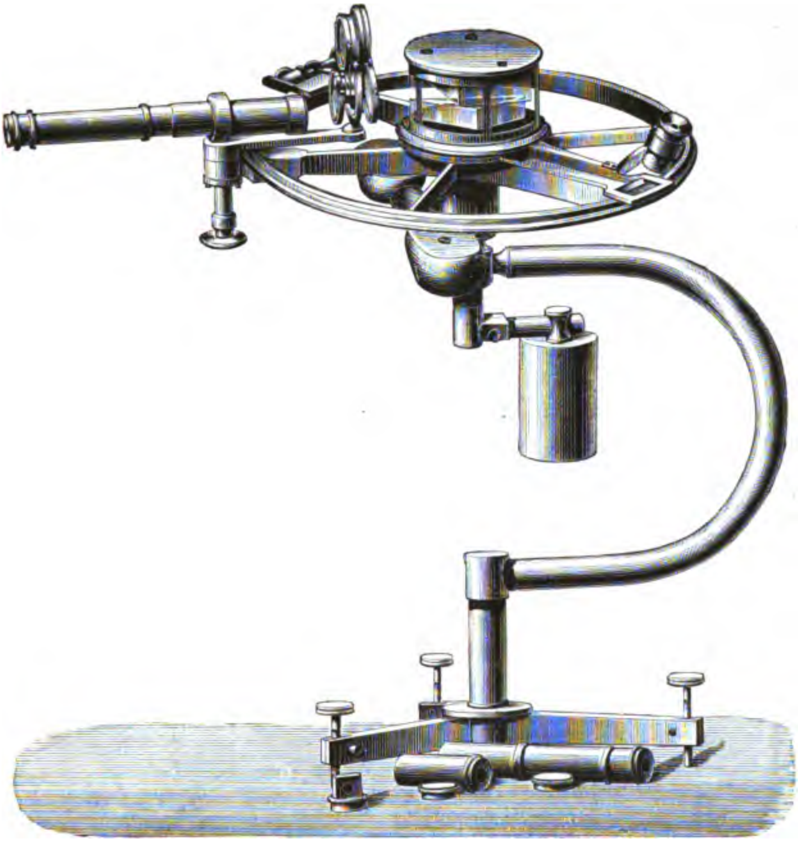


Bild geben soll, vom unteren Prisma vollständig abgehalten wird. Der Differenzenverlauf vorstehender Messungsreihe ist ganz befriedigend. Auf die absoluten Distanzwerthe soll kein Gewicht gelegt werden, weil nur an einem Nonius abgelesen wurde, die Blendungen noch nicht untersucht sind, auch der Index nur beiläufig bestimmt wurde.

Weitere Messungen mit dem neuen Wegener'schen Prismenkreise und Untersuchungen desselben können wir hier nicht geben, weil das Instrument erst unmittelbar vor dem Druck dieses Abschnitts in unsere Hände kam.

§ 56. Vergleichung der verschiedenen Reflexionsinstrumente.

Die Sextantenmessungen sind mit dem Einfluss der Excentricität der Alhidade behaftet, welcher trotz aller Sorgfalt des Mechanikers leicht auf 1′ und darüber anwachsen kann. Nun bedingt zwar das Doppel-Reflexionsprincip des Sextanten durchaus nicht die Beschränkung der Theilung auf einen Sector von etwa 60° und damit Verzicht auf Excentricitätseliminirung durch eine Gegenalhidade, wie die schon frühzeitig

construirten Reflexionsvollkreise beweisen (§ 43.), allein für die Messung von freier Hand ist die Vermehrung des Gewichtes und Umfangs des Instrumentes um $^5/_6$ des Theilkreises gar nicht gleichgültig, und muss dann durch Verminderung des Halbmessers selbst erkauft werden. Kurz, die Praxis des Seemanns, welcher unbedingt aus freier Hand messen muss, hat bis auf die neueste Zeit die ursprüngliche Sextantenform zähe festgehalten, und die daraus abgeleiteten Formen nur ausnahmsweise zugelassen.

Die gewöhnliche Sextantenform hat ausser den Excentricitätsfehlern auch noch einen andern Uebelstand, der sich aber leicht beseitigen liesse, nämlich die Unmöglichkeit, die Alhidade um etwa 15° (30° der Bezifferung) über den Anfangspunkt zurück zu drehen, wodurch zunächst der Schärfungswinkel β sehr einfach bestimmt werden, namentlich aber mit dem dreifach reflectirten Fadenbild (§ 44.) die Berichtigung der Spiegelneigungen ungemein genau und sicher geschehen könnte. Es ist unseren Mechanikern dringend zu rathen, die Theilung und Alhidadendrehung der Sextanten künftig immer etwa bis auf — 30° (wenn $\beta = 15^0$ ist) auszudehnen, was ohne merkliche Gewichtsvermehrung oder mechanische Schwierigkeiten ausführbar sein muss.

Wenn man sich entschliesst, der Alhidadenexcentricität wegen, Reflexionskreise an Stelle der Sectoren anzuwenden, so liefert uns die deutsche Technik heut zu Tage zu diesem Zwecke in der Regel den Pistor-Martins'schen Spiegel-Prismenkreis, dem, ausser der Doppelalhidade, Lichtstärke und die Möglichkeit, grosse Winkel zu messen, nachgerühmt wird; der alte Borda'sche Spiegelkreis scheint bei uns in Vergessenheit gerathen zu sein.

Indem wir für den nächsten Zweck die Excentricitäts-Elimination, welche allen Vollkreisen gemeinsam ist, oder wenigstens bei allen Vollkreisen leicht ausgeführt werden kann, ausser Auge setzen, vergleichen wir nur die übrigen Eigenschaften der genannten Reflexionskreise, und heben zu Gunsten der Reflexion nach dem alten Sextantenprincip hervor, dass der Schärfungswinkel β, welcher beim eigentlichen Sextanten kaum unter 14° betragen kann, bei den Vollkreisen wegen genügender räumlicher Verhältnisse bis auf 7° herabgebracht werden kann, so dass der messbare Winkel theoretisch auf $180^0 - 2\beta = 166^0$ und praktisch auf etwa 150° steigt, und grössere Winkel zu messen, hat man doch selten das Bedürfniss. Sollte aber dieses Bedürfniss eintreten, so möchten wir für Winkel in der Nähe von 180° am liebsten den Steinheil'schen Doppelprismenkreis und nicht den Pistor-Martins'schen Spiegel-Prismenkreis empfehlen.

In Bezug auf die Schädlichkeit der Spiegel- und Fernrohrneigungen halten sich das Sextantenprincip und das Pistor-Martins'sche Princip nahezu die Waage, wie aus der Tabelle S. 243 zu ersehen ist, es bliebe also für den Pistor-Martins'schen Kreis nur noch die vielfach behauptete grössere Helligkeit der Bilder. Indessen fällt doch hiebei sofort in die Augen, dass gerade für die am häufigsten vorkommende Nullstellung der Alhidade der grosse Spiegel sich in so ungünstig schiefer Stellung befindet, dass er auch beim besten Schliff hier unmöglich gute Bilder geben kann, und in der That zeigt unser Instrument (Fig. 1. S. 230), dessen Spiegel nach § 49. S. 249 sich als sehr gut planparallel erwiesen hat, bei den Einstellungen

für den Indexfehler kaum gleich gute Bilder wie ein gewöhnlicher Sextant. Was nützt nun aber die schärfste Messung eines Winkels von 100°, bei welchem allerdings der Spiegel in günstiger Stellung ist, wenn bei dem zugehörigen Indexfehler wegen der ungünstigen Stellung des Spiegels Sonnenberührungen mit verwaschenen Rändern genommen werden müssen? Den Indexfehler aber zu eliminiren (z. B. durch Sterne links und rechts vom Mond), darauf kann im Allgemeinen nicht gerechnet werden. Dazu kommt, dass der Pistor-Martins'sche Kreis ohne Stativ ein unhandliches Instrument ist. Das Fernrohr ragt mit seiner ganzen Länge über den Kreis hinaus, und sitzt deswegen, wenigstens bei den grossen Exemplaren, nicht sehr fest am Kreis. Der Arm des Beobachtenden wird beim Halten dieses Instrumentes zu sehr gestreckt.

Es bleibt noch die Messung von Winkeln in der Nähe von 180° zu betrachten, da diese Messung nach der Sextantenreflexion unmöglich, mit dem Pistor-Martins'schen Kreise aber, nach Vorsetzung eines Ocularprismas, möglich ist. Indessen deutet schon die theoretische Fehlerformel (23) § 47. S. 242, welche für $\alpha = 180^0$ beim Pistor-Martins-Kreise den Fehler ∞ liefert, an, dass die Messung von 180°-Winkeln misslich ist; und in der That kann man die Bilder zweier um 180° abstehender Punkte im Allgemeinen gar nicht zur Deckung bringen, sondern nur über oder untereinander stellen, wenn nicht das Instrument in Bezug auf die Prismenneigungen a b s o l u t fehlerfrei ist. Aehnliches findet zwar auch beim Prismenkreis statt (vgl. S. 267, $n + n' = i \sqrt{2}$), der Prismenkreis eignet sich aber in mechanischer Beziehung viel besser zur Messung in der Nähe von 180°. Die Prismen werden dann gegen einander rechtwinklig gestellt und bilden den besonderen Fall des Bauernfeind'schen Prismenkreuzes.

Aus diesen Vergleichungen haben wir für uns die Ueberzeugung gewonnen, dass die Pistor-Martins'sche Spiegel-Prismen-Combination im Vergleich mit ihren Nachtheilen wenig Vortheile bietet, und dass beim Verlassen des Sextanten es angezeigt ist, zu dem nach dem Sextantenprincip construirten Reflexionskreise mit 2 Nonien, und zwar am besten mit Repetitionseinrichtung nach Borda, ferner mit unserer D o p p e l spiegel-Einrichtung § 43. S. 222 überzugehen.

Der D o p p e l - P r i s m e n k r e i s hat sich in der S t e i n h e i l'schen Form in der Praxis wenig eingebürgert, was bei den zahlreichen Vorzügen dieses Instrumentes zu bedauern ist.

Jedenfalls ist es mit Freuden zu begrüssen, dass Mechaniker W e g e n e r in Berlin neuerdings wieder Prismenkreise construirt, deren schöne und helle Bilder wir schon bei der Beschreibung S. 272 hervorgehoben haben.

Der Vorwurf, dass man mit Steinheil's Instrumente das Fernrohr im Allgemeinen weder nach dem einen noch nach dem andern Zielpunkt, sondern z w i s c h e n beiden hindurch zu richten hat, hat wenig Gewicht, denn dieser Uebelstand wird nach geringer Uebung überwunden, wie wir auf S. 272 an dem Beispiel einer Monddistanzmessung gezeigt haben.

Wir möchten nur hiezu bitten, dass die von Steinheil ursprünglich angeordnete Drehbarkeit des Fernrohrs gegen b e i d e Prismen beibehalten

werden möge. Auch wäre uns ein kleineres Instrument, etwa mit 15 cm Kreisdurchmesser und Gewicht von höchstens 1000 Gramm für den Handgebrauch erwünscht.

Wenn die Reflexionsinstrumente nicht in freier Hand, sondern auf einem Stativ gebraucht werden, so stellt sich ihre Vergleichung zum Theil anders. Das geringe Gewicht und die Handlichkeit des Sextanten treten dann zurück, und man wird dann jedenfalls Vollkreise anwenden.

Bei Monddistanzen ist die Auswahl des directen und des zweifach reflectirten Strahles fast immer vorgeschrieben. Bei Tage ist der Mond direct und die Sonne zweifach reflectirt zu nehmen, bei Nacht der Stern direct und der Mond zweifach reflectirt, so dass unter Umständen das Instrument verkehrt gehalten werden muss. Dieses ist ein Umstand, welcher die Messung mit den meisten Reflexionsinstrumenten, sei es aus freier Hand, sei es auf dem Stativ, beeinträchtigt. Wer nicht mindestens eine einjährige Uebung besitzt, wird zwar Monddistanzen von freier Hand mit Normalhaltung (links direct) wohl messen können, aber die umgekehrte Sextantenhaltung (rechts direct) immer noch scheuen.

Auch auf dem Stativ wird man, wenn es irgend möglich ist, das Instrument so stellen, dass die Theilung und die Nonien oben sind, damit man besser beikommen kann, und namentlich damit man Reihen von 5—10 Distanzeinstellungen und Ablesungen nehmen kann, ohne das ganze Instrument verrücken zu müssen, d. h. Beobachtungsreihen, bei welchen die Bilder im Gesichtsfelde bleiben, so dass auch ein Beobachter wiederholt Distanzeinstellungen und ein zweiter Beobachter die zugehörigen Kreisablesungen machen kann.

In dieser Beziehung bietet unser Doppelspiegelkreis (§ 43. S. 222) einen wesentlichen Vortheil (neben dem schon früher (S. 223) erwähnten Vortheil der leichten Eliminirung des prismatischen Spiegelfehlers). Mit unserem Doppelspiegelkreis kann man nämlich nach Belieben das Fernrohr links oder rechts einschrauben, kann also auch den Mond nach Belieben direct oder doppelt reflectirt nehmen, ohne das Instrument umzuwenden.

Denselben Vortheil bietet auch der Prismenkreis, sei es dadurch, dass man nach Umständen das obere oder untere Prisma in beliebiger Stellung für den Mond nimmt, oder (beim Wegener'schen Kreis) dadurch, dass wenigstens ein Prisma in alle Stellungen von 0^0 bis 360^0 gegen das Fernrohr gebracht werden kann.

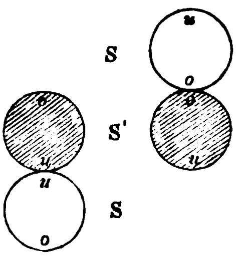
§ 57. Höhenwinkelmessung mit Reflexionsinstrumenten.

Von der Theorie der Reflexionsinstrumente, deren Gebrauch zu terrestrischen Messungen in § 40. zwischen die Instrumententheorie gelegentlich eingeschaltet wurde, gehen wir nun zur astronomisch-praktischen Anwendung dieser Instrumente, namentlich des Sextanten, über, und betrachten zuerst die Höhenwinkelmessung. Das Princip derselben mit dem

künstlichen Horizont haben wir schon in § 30. mit Fig. 1. S. 163 angegeben, und auch die seemännische Höhenmessung über der Kimm, durch die Formeln und Tabellen von § 9. S. 34—36 vorbereitet.

Die Haltung des Sextanten geschieht jedenfalls von freier Hand, ein Stativ wäre für Höhenwinkel viel zu umständlich. Man geht mit dem Sextanten möglichst nahe an den Horizont heran, damit man nicht in Gefahr kommt, beim unvermeidlichen Schwanken das Bild zu verlieren. Misst man in einem geschlossenen Zimmer mit dem Flüssigkeitsteller Fig. 2. S. 163, so kann man auch bei ziemlich bewegter äusserer Luft doch zeitweise ruhige Bilder erhalten, wenn man das Fenster nur so weit öffnet, dass gerade ein Spalt für die Sonne frei bleibt. Wer noch nicht sehr geübt ist, thut gut daran, zuerst das Fernrohr herauszuschrauben, und von freiem Auge visirend die Alhidade roh so zu stellen, dass beide Bilder S' und S (Fig. 1. S. 163) in gleiche Höhe kommen; setzt man nun das Fernrohr wieder an seine Stelle, so wird man bei Sonnenbeobachtungen den Anblick der nebenstehenden Fig. 1. *a* oder *b*, oder ähnlich, erhalten, und muss nun, mit der rechten Hand beständig seitwärts schwingend, mit der linken Hand durch die Alhidadenschraube die Berührung der beiden Sonnenbilder erlangen.

Fig. 1.
a. Unterrand. *b.* Oberrand.



S' und S entsprechen der Fig. 1. S. 163.

Nun entsteht die Frage, ob man den Fall 1 *a.* oder 1 *b.*, d. h. ob man den Sonnenunterrand oder den Oberrand hat. Wendet man verschiedenfarbige Blendgläser an, so kann man direct nach Fig. 1. die Bilder S' und S unterscheiden, und dann auch beurtheilen, ob man den Fall 1 *a.* oder 1 *b.* hat. Bei gleichfarbigen Blendungen sieht man dieses nicht unmittelbar, man kann aber nach kurzer Ueberlegung die Regel ableiten:

Vormittags (bei wachsenden Höhen) gehen nach der Berührung die Oberränder in einander, die Unterränder aus einander. Nachmittags ist es umgekehrt. Wenn man also z. B. Nachmittags nach einer Randberührungsmessung nochmals nach den Bildern sieht und dieselben dann in einander greifen, so hatte man den Unterrand.

Indessen kann bei Anwendung dieser Regel auch ein Irrthum unterlaufen; wir haben daher uns gewöhnt, in jeder Beobachtungsreihe immer mindestens zwei verschiedene Randeinstellungen zu nehmen.

Nimmt man abwechselnd beide Ränder, und combinirt deren Mittel mit dem Zeitenmittel, so bekommt man Zahlenwerthe, welche für den Sonnenmittelpunkt gelten, ohne dass man sich Rechenschaft zu geben braucht, was der eine oder andere Rand war.

Da man aber bei dieser Methode zu einer Reihe von 4 bis 8 Ablesungen, welche man meist rasch hintereinander nimmt, sehr viel an der Alhidade zu schrauben haben würde, ist es bequemer, zu einem Satz von Beobachtungen nur einen Rand zu nehmen; wir machen dann aber am

Schluss rasch noch eine flüchtige Einstellung und Ablesung auf den „anderen Rand" welche um etwa 1° grösser oder kleiner ausfällt, als die vorhergehende Ablesung, und damit unzweideutig zeigt, welcher Rand bei der Hauptreihe genommen war.

Wir nehmen nun zwei Beispiele von Sonnenhöhenmessungen, welche nebenbei insofern von Interesse sind, als sie eine Vergleichung von Höhen über dem künstlichen Flüssigkeitshorizont und Höhen über der Meereskimm enthalten.

Niendorf an der Ostsee ($\varphi = 53^\circ\ 59'\ 50''$, $\lambda = 0^h\ 43^m\ 18^s$ von Greenw.), 8. August 1883, Morgens (7. August astr.).

Sonnenhöhenmessung mit dem Sextanten von S. 157 über einem Horizont von Rothwein:

	Chronometer	Sextant		
	$7^h\ 9^m\ 56^s$	$46^\circ\ 57'\ 30''$		
	7 10 34	47 8 30		
	7 11 10	47 20 0		
	7 11 50	47 31 0	Anderer Rand	
	7 12 35	47 43 0	48° 40′	
Mittel	$7^h\ 11^m\ 13{,}0^s$	$47^\circ\ 20'\ 0''$		(1)

Die Indexbestimmung ebenso wie auf S. 172 oben gab . . . . $i =$ 7′ 47″

$$2\,h'_u = 47^\circ\ 12'\ 13'' \qquad (2)$$

Correctionen für die Blendgläser kommen nicht hinzu, weil sowohl die Höhenmessungen als auch die Indexmessungen mit d e n s e l b e n Gläsern [1] und (1) gemacht sind. Die am Schluss der Messungen beigefügte Bemerkung „Anderer Rand = 48° 40′" sagt, dass die Messungen selbst sich auf den Unterrand beziehen, weshalb bei (2) die Bezeichnung h'_u angewendet ist. Nach S. 214 fügen wir zu (2) noch die Excentricitäts- und Theilungscorrection — 21″ und haben jetzt:

$$2\,h_u = 47^\circ\ 11'\ 52'' \qquad (3)$$

$$h_u = 23\ \ 35\ \ 56$$

Luft 15°, Barometer 760 mm gibt nach S. [7], [9] und [11] die Refraction — (2′ 11″ — 3″ + 2″) =.	— 2′ 10″	
Höhenparallaxe nach S. [7] unten	+ 8	
Wahre Höhe des Sonnenunterrandes	23° 33′ 54″	(4)
Hiezu der Sonnenhalbmesser nach S. [7] unten	+ 15 49	
Wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes h =.	23° 49′ 43″	(5)

Damit kann die Zeitberechnung nach § 13. begonnen werden.

Wir nehmen nun eine zweite Sonnenhöhenmessung, über der Kimm, welche vor der vorstehenden gemacht wurde, Berührung eines Sonnenrandes (im Fernrohr scheinbar oben) mit der Kimm.

	Chronometer	Sextant		
	$6^h\ 41^m\ 42$	$19^\circ\ 29'\ 30''$		
	6 42 20	19 35 30		
	6 43 5	19 41 0	Anderer Rand	
	6 44 0	19 49 0	20° 24′	
Mittel	$6^h\ 42^m\ 46{,}7^s$	$19^\circ\ 38'\ 45''$		(6)

Als Blendglas diente hiebei [2] (vgl. S. 171). Der Index wurde nachher mit den Blendgläsern (1) und (2) bestimmt, und zwar $i' = 7' \, 26''$. Da das Glas [2] sowohl beim Index als bei den Messungen (6) gebraucht ist, kommt seine Correction nicht in Betracht, dagegen nach S. 173 (1) $= + 3''$ zu i' genommen, gibt $i = 7' \, 26'' + 3'' = 7' \, 29''$ und dieses von (6) abgezogen gibt:

$$h'_u = 19^0 \, 31' \, 16'' \qquad (7)$$

Nun kommt die Excentricitäts- und Theilungscorrection nach S. 214 $= - 10''$, was zu (7) hinzugefügt gibt:

$$h'_u - 10'' = 19^0 \, 31' \, 6'' \qquad (8)$$

Die Aughöhe war 4 m über der Ostsee (die Kimm nach Osten frei, siehe Fig. 1. § 58.), also nach S. 35. die Kimmtiefe $= 3' \, 36''$, was von (7) abgezogen, gibt:

$$19^0 \, 27' \, 30'' \qquad (9).$$

Die Lufttemperatur war 14° und der Barometerstand 760 mm, also nach S. [7], [9] und [11] die Refraction $= 2' \, 42'' - 2'' + 2'' = 2' \, 42''$, hiezu, nach S. [7] unten, noch die Höhenparallaxe 8″, gibt $- 2' \, 42'' + 8'' = - 2' \, 34''$ als Correction von (9) und damit:

Wahre Höhe des Sonnenunterrandes	19° 24′ 56″	(10)
Hiezu der Sonnenhalbmesser wie bei (4)	+ 15′ 49″	
Wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes	19° 40′ 45″	(11)

Ausser diesen in aller Ausführlichkeit vorgelegten Reihen von Messungen sind noch zwei ähnliche Reihen gemessen, so dass wir im Ganzen haben:

	Kimm		Künstlicher Horizont		
Chronometer . . .	$6^h \, 39^m \, 13{,}6^s$	$6^h \, 42^m \, 46{,}7^s$	$7^h \, 11^m \, 13{,}0^s$	$7^h \, 14^m \, 35{,}8^s$	(12)
Wahre Höhe . . .	19° 9′ 2″	19° 40′ 43″	23° 49′ 43″	24° 19′ 31″	

Damit kann man die Ortszeit nach § 13. berechnen (φ und λ s. o. bei (1)). Der Nautical Almanac 1883, S. 129 gibt für diese vier Zeitmomente:

$$\delta = + 16^0 \, 15' \, 6'' \quad + 16^0 \, 15' \, 4'' \quad + 16^0 \, 14' \, 44'' \quad + 16^0 \, 14' \, 41''$$
$$g = + 5^m \; 29{,}8^s \quad + 5^m \; 29{,}8^s \quad + 5^m \; 29{,}7^s \quad + 5^m \; 29{,}6^s$$

und die weitere Ausrechnung nach § 13. S. 59 oder S. 60 gibt:

Mittlere Ortszeit $= 6^h \, 47^m \, 0{,}3^s \quad 6^h \, 50^m \, 36{,}1^s \quad 7^h \, 18^m \, 54{,}2^s \quad 7^h \, 22^m \, 18{,}2^s$ (13)

Die Vergleichung von (13) mit (12) gibt die Correction des Chronometers:

Correction =	$+ 7^m 46{,}7^s$	$+ 7^m 49{,}4^s$	$+ 7^m 41{,}2^s$	$7^m 42{,}4^s$
Mittel	Kimm $+ 7^m 48{,}0^s$		Künstlicher Horizont $+ 7^m 41{,}8^s$	

Differenz $6{,}2^s$ (14)

Die Beobachtungen über der Kimm verlangen eine um 6^s grössere Uhrcorrection als die Beobachtungen über dem künstlichen Horizont.

Da nach der Tabelle auf S. 67 im August bei einem Stundenwinkel von 5^h bis 6^h etwa 9,5″ Höhenänderung auf 1 Zeitsecunde kommen, so entsprechen den bei (14) angegebenen 6,2 Zeitsecunden $6{,}2 \times 9{,}5 = 59''$ Höhenänderung, welche man vermuthlich als Höhenfehler der Kimmmessung anzusehen hat, und zwar wären hiernach die Kimmhöhen um 1′ zu gross.

Ein solcher Fehler darf uns gar nicht wundern, wenn man nur bedenkt, dass allein schon die zu 4 m gemessene Aughöhe über der Uferbrandung mindestens auf 0,5 m unsicher anzunehmen ist, was nach S. 53 14″ ausmacht. Dazu kommt noch die Refractionsunsicherheit an der Kimm selbst.

Nach Freeden, „Handbuch der Nautik“ (Oldenburg 1864) S. 237 kann die Kimmhöhenmessung bis zu 3′ unsicher werden.

Die Höhenmessung über dem künstlichen Horizont ist auch schon deswegen genauer, weil man hier den doppelten Höhenwinkel misst, so dass also die Messungsfehler nur hälftig in das Resultat eingehen.

Mit einem guten Sextanten oder Reflexionskreis kann man über dem künstlichen Horizont leicht Höhen auf 10″ genau messen.

Mit unserem Sextanten von S. 157 sind auch die Messungen gemacht, welche wir schon in § 21. behandelt haben. Der mittlere Höhenfehler einer Reihe von 2—5 Messungen fand sich aus der Ausgleichung $= \pm 12''$ (s. (13) S. 115) und der mittlere Breitenfehler $= \pm 4''$ ((16) S. 116), (vergl. hiezu auch (40) S. 287).

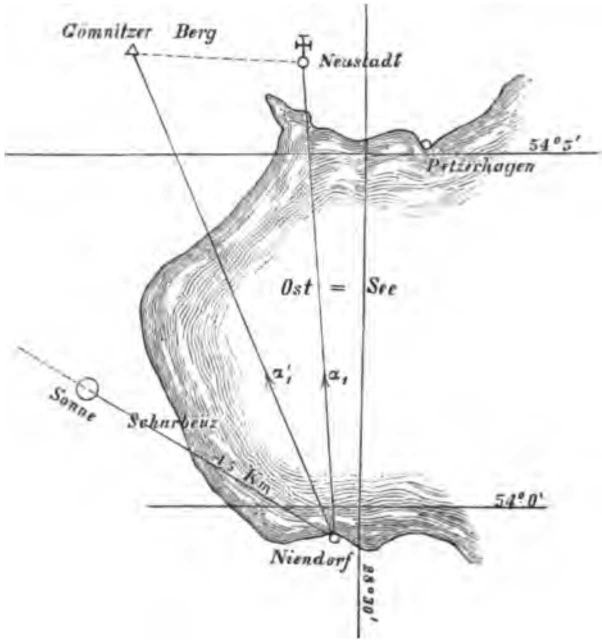
§ 58. Azimutbestimmung mit dem Sextanten.

Wenn die Sonne geringe Höhe hat, kann man durch Distanzmessung zwischen der Sonne und einem terrestrischen Zielpunkte das Azimut dieses letzteren bestimmen. So ist z. B. das Azimut Tübingen-Kornbühl, welches heute noch zur Orientirung des Württembergischen Landes-Coordinatensystems dient, am Ende des vorigen Jahrhunderts von Bohnenberger mit einem Spiegelsextanten so bestimmt worden. Heute wird diese Methode wohl nur noch zur See bei Küstenaufnahmen gebraucht. Als Beispiel diene Folgendes (vgl. Fig. 1.):

Am 20. Juli 1883 Abends vor Sonnenuntergang maass ich in Niendorf zwei Reihen von Distanzen zwischen der Sonne (links) und dem Kirchthurm von Neustadt (rechts). In der Pause zwischen den beiden Distanzmessungen wurden mehrere Sonnenhöhenmessungen eingeschaltet und zwar über der Kimm. Der Standpunkt war am Strande von Niendorf, Aughöhe 4 m über der Ostsee, die Sonne stand jedoch hiebei nicht über der freien Kimm, sondern im Azimut 120° von Süd, über Scharbeuz, mit Strandweite

nach der Karte = 4,5 km (vgl. Fig. 1.). Es war daher nach der Formel (9) § 9. S. 36 (h = 4 m s = 4,500 m) eine Kimmtiefe rund $t' = 4' \; 0''$ anzunehmen, mit welcher die Zeithöhen nach § 13. berechnet

Fig. 1. Neustädter Bucht.
(Maassstab 1 : 200 000.)



worden sind ($\varphi = 53^0 \; 59' \; 50''$ und $\lambda = 0^h \; 43^m \; 18^s$ von Gr.). Die Uhrcorrection fügte sich in den schon anderwärts bekannten Gang der Uhr, weshalb wir jetzt sofort die in zwei Gruppenmittel zusammengefassten Distanzmessungen mit richtiger mittlerer Ortszeit angeben:

Mittlere Ortszeit, 20. Juli 1883	$7^h \; 21^m \; 24^s$	$8^h \; 0^m \; 35^s$	
Distanz: Sonne-Neustadt $D =$	$60^0 \; 26' \; 17''$	$52^0 \; 31' \; 55''$	(1)

Der Indexfehler, Blendung etc. ist an der Distanzmessung mit dem Sextanten bereits angebracht, auch der Sonnenhalbmesser ist berücksichtigt, nämlich eliminirt, weil abwechselnd beide Sonnenränder auf die Thurmspitze eingestellt wurden.

Man hat jetzt für die beiden angegebenen Zeitmomente die Azimute und Höhen der Sonne zu berechnen. Hiezu verwandelt man mittelst der Zeitgleichung ($- g = - 6^m \; 5^s$) die mittleren Zeiten in wahre Zeiten, d. h. Stundenwinkel der Sonne, nimmt die Sonnendeclination aus dem Jahrbuch bzw. $+ 20^0 \; 38' \; 40''$ und $+ 20^0 \; 38' \; 22''$, und kann dann,

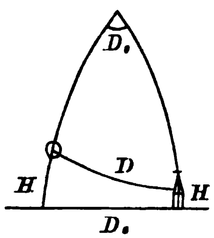
nach den Formeln von § 4. (1) und (2) S. 11 oder (3) S. 13 die Azimute und die Höhen der Sonne berechnen:

Azimute	117° 0′ 53″	124° 45′ 7″	(2)
Wahre Höhen . . . $h =$	6° 10′ 54″	1° 14′ 28″	

Diese wahren Höhen verwandelt man durch Addition der Refraction und Subtraction der Parallaxe (Tafel S. [13] und S. [7] unten) in scheinbare Höhen, nämlich:

Scheinbare Höhen $H =$ 6° 18′ 42″ 1° 36′ 53″ (3)

Fig. 2. Distanzreduction $D_0 - D$.



Nun kommt es nach Fig. 2. darauf an, die gemessenen Distanzen D auf den Horizont zu reduciren, d. h. D_0 zu berechnen. Dabei fragt es sich, welches die Höhe H' des terrestrischen Zielpunktes war. Diese Höhe wird oft = Null zu setzen sein, z. B. in unserem Fall erschien der Kirchthurm Neustadt nahe über der Kimm. Wir nehmen zunächst $H' = 0$, und dann erscheint D als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten D_0 und H, also

$$\cos D_0 = \frac{\cos D}{\cos H} \tag{4}$$

Wendet man diese Gleichung auf (1) und (3) an, so bekommt man:

$$D_0 = 60^\circ\ 14'\ 23'' \qquad 52^\circ\ 30'\ 52'' \tag{5}$$

Dieses zu dem Sonnenazimut von (2) addirt gibt das gesuchte

Azimut Neustadt = 177° 15′ 16″ 177° 15′ 59″ (6)

Mittel 177° 15′ 38″ (7)

Wenn H' in Fig. 2. nicht nahezu gleich Null ist, so könnte man etwa nach der Horizont-Reductionsformel von § 40. (4) S. 208 rechnen, da diese aber selbst von der Annahme ausgeht, dass die Sonnenhöhe H in Fig. 2. klein sei (etwa unter 5°), was nicht immer zutrifft, so ziehen wir vor, die strenge Reductionsformel zu benutzen, nämlich nach Fig. 2.:

$$\cos D = \cos (90^\circ - H) \cos (90^\circ - H') + \sin (90^\circ - H) \sin (90^\circ - H') \cos D_0$$

$$\cos D_0 = \frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'} \tag{8}$$

was mit $H' = 0$ in die Näherungsformel (4) übergeht. Man kann nach (8) sofort rechnen, ausser wenn D und D_0 in die Nähe von 0° oder 180° fallen, was man aber ohnehin vermeiden muss. Jedenfalls kann man übrigens auch (8) umformen, indem man setzt:

$$1 - \cos D_0 = 2 \sin^2 \frac{D_0}{2} = \frac{\cos H \cos H' - \cos D + \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'}$$

woraus man findet:

$$sin\,\frac{D_0}{2} = \sqrt{\frac{sin\,\frac{D+(H-H')}{2}\;sin\,\frac{D-(H-H')}{2}}{cos\,H\;cos\,H'}} \qquad (9)$$

Um zu sehen, ob diese stengere Rechnung ein merklich anderes Resultat gibt als das frühere (7), nehmen wir nun auch die Höhe H'. Es wurde nämlich mit dem Sextanten die Höhe der Kirchthurmspitze über der freien Kimm $= 16'\,37''$ gemessen, die Kimm selbst hat bei 4 m Aughöhe nach S. 35 eine Tiefe von $3'\,36''$, es ist also die scheinbare Höhe $H' = 0^0\,13'\,1''$. Setzt man dieses ein, so bekommt man aus (8) und (9) übereinstimmend:

$$D_0 = 60^0\,17'\,2'' \qquad 52^0\,31'\,19''$$

Dieses zu den Sonnenazimuten (2) addirt gibt:

$$\text{Azimut Neustadt} = 177^0\,17'\,55'' \qquad 117^0\,16'\,26''$$

$$\text{Mittel}\;\; 177^0\,17'\,10'' \qquad (10)$$

Dieses genauere Resultat weicht von dem genäherten (7) um $1'\,32''$ ab, man hat also immerhin mit der Näherung (4) vorsichtig zu sein, wenn man im Azimut auch nur auf $1'$ genau rechnen will.

Anhang zu § 58.

Rückwärtseinschneiden durch zwei Azimute (s. o. Fig. 1. S. 281). Ausser dem Azimut nach Neustadt wurde in Niendorf auch der Winkel zwischen Gömnitzerberg und Neustadt mit dem Sextanten gemessen, es ist nämlich Gömnitzerberg ein hochgelegener Thurm, welcher ebenso, wie der Kirchthurm Neustadt, trigonometrischer Punkt der Landesaufnahme ist. Es bietet dieses eine Gelegenheit, im Anschluss an die vorstehende astronomische Azimutmessung, auch das geodätische Rückwärtseinschneiden durch zwei Azimute zu behandeln.

Nach Mittheilung der trigonometrischen Abtheilung der preussischen Landesaufnahme sind durch die Triangulirung von Schleswig - Holstein folgende geographische Coordinaten bestimmt worden:

Gömnitzer Berg. . . $\varphi_3 = 54^0\,6'\,43{,}888''$ $\quad \lambda_3 = 28^0\,24'\,39{,}286''$ (11)

Neustadt, Kirchthurm $\varphi_2 = 54^0\,6'\,30{,}589''$ $\quad \lambda_2 = 28^0\,28'\,54{,}954''$ (12)

(Der von Niendorf aus ebenfalls sichtbare Leuchtthurm Pelzerhagen, ist leider kein trigonometrischer Punkt der Landesaufnahme.) Für den Standpunkt Niendorf wurden aus der topographischen Karte folgende Näherungs-Coordinaten entnommen:

Niendorf, Näherung, $(\varphi) = 53^0\,59'\,50''$ $\quad (\lambda) = 28^0\,29'\,20''$ (13)

Aus der oben behandelten astronomischen Messung nebst der Winkelmessung zwischen Gömnitzerberg und Neustadt wurden folgende Azimute erhalten:

Azimut Niendorf-Gömnitzerberg $= 158^0\ 1'$ von Süd über West
" " Neustadt (s. o. (10)) $= 177^0\ 17'$ " " " "
" " Pelzerhagen $= 195^0\ 46'$ " " " "

Es ist uns jedoch dieses Mal bequemer, die Azimute von Nord nach West (linksseitig) zu zählen (vgl. Fig. 3.), d. h.:

$$\text{Gömnitzerberg } \alpha_1' = 21^0\ 59' \text{ von Nord über West} \tag{14}$$

$$\text{Neustadt } \alpha_1 = 2^0\ 43' \text{ " " " "} \tag{15}$$

Wenn die Azimute, welche (nach (10) zu schliessen) etwa auf 30'' thatsächlich genau sind, hier auf 1' abgerundet werden, so dürfte man die geographischen Coordinaten, entsprechend (11) und (12), auf 0,1'' abrunden (1' Azimutfehler auf 13 km Entfernung gibt 4 m, und 0,1'' Breite ist = 3 Meter Erdbogen). Wir rechnen jedoch genauer, um ein formell consequentes Beispiel zu haben.

Die Beziehungen zwischen den Breiten $\varphi_1\ \varphi_2$ zweier Punkte des Erdellipsoids nebst ihrem Längenunterschied $\Delta\lambda$ einerseits, und der Entfernung s nebst den Azimuten α_1 und α_2 andererseits (vgl. Fig. 3.) werden geodätisch so dargestellt:

Man setze:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha = \text{Mittelazimut} \tag{16}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = c = \text{Meridianconvergenz} \tag{17}$$

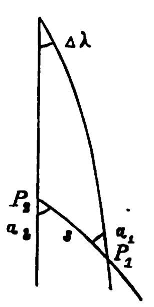
$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = \text{Mittelbreite} \tag{18}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{Breitendifferenz} \tag{19}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda = \text{Längendifferenz von West nach Ost} \tag{20}$$

$$\frac{\varrho}{R_m} = (1) \text{ und } \frac{\varrho}{R_n} = (2) \text{ (Geodätische Hauptcoefficienten)} \tag{21}$$

Fig. 3. Geodätische Uebertragung von Breite, Länge und Azimut.



wo R_m der Meridiankrümmungshalbmesser und R_n der Querkrümmungshalbmesser für die Mittelbreite φ ist, $\varrho = 206\,265''$, und *log* (1) und *log* (2) aus den „Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme" zu entnehmen sind. (In des Verfassers „Handb. d. Verm." II S. 286—287 sind diese *log* (1) und *log* (2) mit *log* M und *log* N bezeichnet, und auf S. 424—427 sind sie, nach Gauss verwechselt, mit *log* (2) und *log* (1) bezeichnet.) Damit hat man:

$$tang\,\alpha = \frac{\frac{\Delta\lambda}{(2)} \cos\varphi}{\frac{\Delta\varphi}{(1)}} = \frac{(1)}{(2)}\ \frac{\Delta\lambda \cos\varphi}{\Delta\varphi} \tag{22}$$

$$s = \frac{\Delta\lambda \cos\varphi}{(2) \sin\alpha} = \frac{\Delta\varphi}{(1) \cos\alpha} \tag{23}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = c = -\Delta\lambda \sin\varphi \text{ (wenn } + \Delta\lambda \text{ von West nach Ost geht)} \tag{24}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{c}{2} \qquad \alpha_1 = \alpha - \frac{c}{2} \tag{25}$$

Nun besteht die Auflösung unserer Aufgabe darin, dass man mit den Näherungen (13), nebst den gegebenen Coordinaten (11) und (12) die diesseitigen Azimute α_1 und α_1' nach den Bezeichnungen und Formeln (16) bis (25) berechnet, und zusieht, ob diese Azimute mit den astronomisch gemessenen Azimuten (14) und (15) stimmen.

(Das Formelsystem (16) bis (25) ist daher zweimal anzuwenden, wobei für Gömnitzerberg α_1' an Stelle von α_1 und überall $_3$ an Stelle von $_2$ tritt.)

Aus der Vergleichung der so berechneten Azimute mit den bei (14) und (15) angegebenen astronomisch gemessenen Azimuten kann man auf die Verbesserungen der Näherungs-Coordinaten (φ) und (λ) von (13) schliessen, indem man die Azimutformel (22) nach φ und nach λ differentiirt. Dieses gibt:

$$d \tan g\, \alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(1)}{(2)} \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} d\Delta\lambda - \frac{(1)}{(2)} \frac{\Delta\lambda \cos\varphi}{\Delta\varphi^2} d\Delta\varphi$$

oder wegen (23), mit Zusetzung von ϱ für $d\alpha$ in Secunden:

$$d\alpha = \frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi \, d\Delta\lambda - \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\Delta\varphi \tag{26}$$

Wenn man die Bedeutungen von $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ nach (19) und (20) nebst Fig. 3. ins Auge fasst, und wenn man nun bestimmt, dass die Aenderungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ nur auf den diesseitigen Punkt P_1 = Niendorf (Fig. 1. und Fig. 3.) fallen sollen, so ist in (26) zu setzen:

$$d\Delta\varphi = -d\varphi \qquad d\Delta\lambda = +d\lambda$$

also statt (26):

$$d\alpha = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi \, d\lambda \tag{27}$$

Auch die Meridianconvergenz nach (24) ändert sich ein wenig:

$$dc = -d\lambda \sin\varphi \tag{28}$$

Die Aenderungen $d\alpha_2$ und $d\alpha_1$ von α_2 und α_1 setzen sich ebenso aus (27) und (28) zusammen, wie sich α_2 und α_1 selbst nach (25) zusammensetzen, d. h.:

$$d\alpha_2 = d\alpha + \frac{dc}{2} = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \left(\frac{\varrho}{(2)} \frac{\cos\alpha}{s} \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{2}\right) d\lambda$$

$$d\alpha_1 = d\alpha - \frac{dc}{2} = \frac{\varrho}{(1)} \frac{\sin\alpha}{s} d\varphi + \left(\frac{\varrho}{(2)} \cos\alpha \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{2}\right) d\lambda \tag{29}$$

Für jedes der beiden vorhandenen Azimute (14) und (15) schreibt man die Gleichung (29) an, löst diese beiden Gleichungen nach $d\varphi$ und $d\lambda$ auf, und fügt diese Correctionen den Näherungen (13) hinzu.

Mit (11), (12) und (13) berechnet man zu diesem Zweck:

Niendorf-Gömnitzerberg. Näherung $\log s' = 4.139207$ $\alpha_1' = 21^\circ\ 44'\ 48''$ (30)

" Neustadt " $\log s = 4.093159$ $\alpha_1 = 2^\circ\ 6'\ 24''$ (31)

Die Vergleichung mit (14) und (15) gibt:

$$d\alpha_1' = +14'\ 12'' = +852'' \qquad d\alpha_1 = +36'\ 36'' = +2196''$$

und wenn man auch noch die Coefficienten nach (29) ausrechnet, erhält man die zwei Gleichungen:

$$+852'' = 170{,}5\, d\varphi + 253{,}8\, d\lambda$$
$$+2196'' = 19{,}0\, d\varphi + 303{,}4\, d\lambda$$

Deren Auflösung gibt:

$$d\varphi = -6{,}370'' \qquad d\lambda = +7{,}638$$

Diese Correctionen werden zu den Näherungsannahmen (13) hinzugefügt und geben:

Niendorf $\varphi_1 = 53^\circ\ 59'\ 43{,}630''$ $\lambda_1 = 28^\circ\ 29'\ 27{,}638''$

Wiederholt man damit die Azimutberechnung, so findet man noch kleine (sachlich unerhebliche) Widersprüche, welche man durch eine zweite Gleichungsauflösung vollends zum Verschwinden bringen kann, deren Resultat ist:

Niendorf endgültig (Preuss.) $\varphi_1 = 53^\circ\ 59'\ 43{,}583''$ $\lambda_1 = 28^\circ\ 29'\ 27{,}779''$ (32)

Diese Coordinaten beziehen sich auf das geodätische System der Preussischen Landesaufnahme. Zur Reduction auf astronomische Werthe können wir die Angaben der Grossherzoglich Mecklenburgischen Landesvermessung benutzen, deren „Verzeichniss von geographischen Positionen, rechtwinkligen Coordinaten und Höhen, Schwerin 1882" (C. Tafeln S. 8 und 9) Folgendes gibt (auf 0,1" abgerundet):

Mecklenburgische astron. Breite = Preuss. Breite — 3,4" (33)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Preussische Länge} = 29^\circ\ 5'\ 0'' + 14{,}5'' - \text{Mecklenburgische Länge} \\ \text{Greenwicher " } = 11^\circ\ 25'\ 1'' + 14{,}5'' - \text{ " " } \end{array}\right\}$$

also:

Greenwicher Länge = — 17° 39' 51" + Preussische Länge (34)

Fügt man diese Correctionen (33) und (34) zu (32), so erhält man:

Niendorf $\varphi = 53^\circ\ 59'\ 40{,}2''$ $\lambda = 10^\circ\ 49'\ 36{,}8''$ östlich von Greenw.
$= 0^h\ 43^m\ 13{,}453^s$ " " " (35)

Die Länge von Greenwich ist hier „nach dem System der deutschen Küstenkarten" gezählt.

Eine andere Längenreduction erhält man auch durch Vergleichung der Preussischen geodätischen Fundamentallänge, nämlich Berliner Sternwarte, Annahme vom Jahre 1865:

Berlin $= 2^h\ 4^m\ 14{,}75^s = 31^\circ\ 3'\ 41{,}25''$ östlich von Ferro (36)

Der Generalbericht der Europäischen Gradmessung für 1880, Anhang III. S. 30 gibt:

$$\text{Berlin-Greenwich} = 0^h\,53^m\,34{,}870^s = 13^\circ\,23'\,43{,}05'' \qquad (37)$$

(Dieses ist der berechnete, ausgeglichene Werth, wobei zu beachten ist, dass auf S. 30, Anhang III. des Gen.-Ber. der Europ. Gradm. durch einen Druckfehler oben „Berechnete Länge“ und „Beobachtete Länge“ verwechselt sind.)

Aus (36) und (37) zusammen folgt, dass die Geodätischen Längen der Preussischen Landesaufnahme in astronomische Greenwicher Länge verwandelt werden durch die Zufügung von

$$-\,1^h\,10^m\,39{,}880^s = -\,17^\circ\,39'\,58{,}20'' \qquad (38)$$

dieses differirt um $0{,}5^s = 7{,}2''$ gegen (34).

Da wir diese Vergleichung nur aus theoretischem Interesse so scharf durchgeführt haben, haben wir, in der Länge jedenfalls auf 1^s genügend, für unseren mehrfach benutzten Beobachtungspunkt Niendorf, Strandhütte Schröder, am westlichen Ende des Dorfes nach (35):

$$\text{Niendorf} \quad \varphi = 53^\circ\,59'\,40'' \qquad \lambda = 0^h\,43^m\,18^s \text{ von Greenwich} \qquad (39)$$

Mit diesem geodätisch übertragenen Resultat stimmt unsere mit dem Sextanten aus Sonnenhöhen erhaltene astronomische Breite von § 21. (16) S. 116:

$$\varphi = 53^\circ\,59'\,52'' \pm 4'' \qquad (40)$$

innerhalb der allen Umständen entsprechenden Genauigkeit überein (für welche der früher zu $\pm\,4''$ berechnete mittlere Fehler kein genügendes Maass ist).

§ 59. Monddistanzen. Grundgedanke und Grundformeln.

Die Eigenbewegung des Mondes am Himmel ist so bedeutend, nämlich etwa 13° in 1 Tag, dass diese Bewegung zur Bestimmung absoluter Zeit, — im Gegensatz zur Ortszeit — benutzt werden kann; so dass aus der Vergleichung jener absoluten Zeit mit einer Ortszeit die geographische Länge des Ortes bestimmt wird.

Das Himmelsgewölbe mit seinen Sternen und dem darauf wandelnden Monde stellt gewissermaassen eine grosse Weltuhr vor; der Himmel ist das Zifferblatt, die Sterne sind die Ziffern, der Mond ist der Zeiger, und ohne Messinstrumente könnte man unter Umständen diese Weltuhr benutzen um das Datum eines Tages zu bestimmen, wenn man die in den astronomischen Jahrbüchern voraus berechneten Abstände des Mondes von einzelnen Sternen kennt. Man habe z. B. im Frühling 1884 am Anfang April eines Abends beobachtet, dass der Mond nahe der Mitte zwischen den beiden hellen Planeten Venus und Jupiter stand, jedoch etwa 1 Handbreit näher an Jupiter als an Venus; am folgenden Tage Abends war

der Mond um eine starke Handbreite mehr nach links (gegen Osten) dem Jupiter zu gerückt, und hatte seinen Abstand der Venus gegenüber um ebensoviel vergrössert. Schlagen wir das astronomische Jahrbuch nach, so ergibt sich unzweifelhaft, dass der erste genannte Tag der 1. April gewesen sein muss, denn um 9 Uhr Abends am 1. April war die Monddistanz nach rechts gegen Venus $= 34^0$ und nach links gegen Jupiter $= 26^0$.

Was wir durch dieses Beispiel der Abstände zwischen Mond und Jupiter oder Mond und Venus im Groben zu veranschaulichen gesucht haben, das soll die mathematische Monddistanzenmessung im Feinen weiter verfolgen. An Stelle der groben Abstandsschätzung nach Handbreiten (eine ausgestreckte Hand deckt etwa 10^0) tritt die Distanzmessung mit dem Sextanten oder anderen Reflexionsinstrumenten; und an Stelle der Entscheidung, ob die fragliche Distanz am 1. oder 2. April stattgefunden hat, tritt die Frage: Wie viel Uhr (nach Stunden, Minuten, Secunden) war es an der Sternwarte des benutzten Jahrbuchs (Greenwich) in dem Moment, als der Mond einen gewisssen gemessenen Abstand von einem Stern (oder der Sonne) hatte?

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob hiezu nichts nöthig wäre, als die Vergleichung der gemessenen Distanz mit den im Jahrbuch von 3 zu 3 Stunden mitgetheilten Distanzen, und entsprechende Zeitbestimmung durch Interpolation; allein die Jahrbuchsdistanzen beziehen sich auf den Mittelpunkt der Erde, und da der Mond eine beträchtliche Parallaxe hat und auch die Refraction hiebei wirksam wird, erscheint eine Monddistanz von einem Punkt der Erdoberfläche aus gesehen, wesentlich anders (im Mittel etwa um $20'$ verschieden, und in der Mehrzahl der Fälle grösser) als vom Mittelpunkt der Erde. Zur Messung der Distanz tritt daher noch die Reduction derselben auf den Erdmittelpunkt hinzu, und diese „Reduction" bildet einen der wesentlichsten Theile der bei der Längenbestimmung durch Monddistanzen auftretenden Rechnungen.

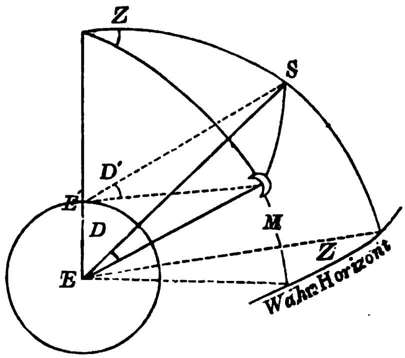
Die Genauigkeit, mit welcher Zeitbestimmung durch Monddistanzen erreicht werden kann, lässt sich nach dem Grundgedanken der Methode summarisch schätzen: Die Umlaufszeit des Mondes (der siderische Monat) beträgt 27 Tage 8 Stunden; in dieser Zeit werden 360^0 durchlaufen, es kommt also auf 1 Tag im Mittel $360^0 : 27{,}3 = 13{,}2^0$, d. h. auf 1 Stunde $33'$, auf 1 Minute $33''$. Schätzt man also eine Distanzmessungs-Genauigkeit von $15''$, so erhält man eine Zeit- oder Längen-Genauigkeit von etwa $^1/_2$ Zeitminute oder 30 Zeitsecunden. Aus verschiedenen Gründen wird diese rohe Genauigkeitsschätzung noch manche Aenderung erfahren und zwar meist in dem für die Genauigkeit ungünstigen Sinn; bis zur endgültigen Erörterung aller Fehlerursachen werden wir diese erste Schätzung vorläufig beibehalten.

Indem wir die Erde vorerst als kugelförmig voraussetzen, können wir die Grundformel für Distanzreduction rasch bilden.

Die unmittelbare Messung kann sich zwar nicht auf die Mittelpunktsdistanz erstrecken, sondern nur auf die Randdistanz, da man aber

den Mondhalbmesser (nebst seiner Parallaxenvergrösserung § 8. S. 33—34) in Rechnung bringen kann, so nehmen wir in Fig. 1. an, es sei in E', einem Punkte der Erdoberfläche, die scheinbare Mittelpunktsdistanz D' durch Messung bestimmt, und es soll die wahre Distanz D, vom Erdmittelpunkt aus gesehen, berechnet werden. Hiezu braucht man die beiden Höhen der Gestirne, und zwar sowohl die scheinbaren, als die wahren. Wir setzen hier voraus, es seien die scheinbaren Höhen gleichzeitig mit der Distanz gemessen worden, was etwa von drei Beobachtern gemeinsam geschehen sein kann.

Fig. 1.
Scheinbare Monddistanz D'.
Wahre Monddistanz D.



Wenn H' die scheinbare Mondhöhe ist, so hat man nach S. 33 die wahre Höhe H:

$$H = H' - \text{Refraction} + \text{Höhenparallaxe}$$

$$H = H' - r + \pi \cos H' \qquad (1)$$

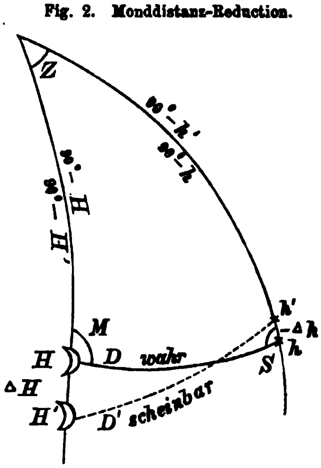
$$H - H' = \pi \cos H' - r = \varDelta H \text{ (Mond)} \qquad (2)$$

desgleichen für den Stern oder die Sonne:

$$h - h' = \pi' \cos h' - r' = \varDelta h \text{ (Stern oder Sonne)} \qquad (3)$$

beim Mond ist die durch (2) eingeführte Höhenreduction $\varDelta H$ immer positiv, wegen des grossen Werthes der Parallaxe π (nahezu 1°), dagegen bei der Sonne und den Planeten überwiegt die Refraction über die kleine Höhenparallaxe, und vollends bei Fixsternen verschwindet die Parallaxe, es ist also die Grösse $\varDelta h$ nach (3) negativ.

Fig. 2. Monddistanz-Reduction.



Wir wollen nun die wahren und die scheinbaren Höhen und Distanzen in einer Figur vereinigen, welche dadurch entsteht, dass man die von E und E' (Fig. 1.) ausgehenden Strahlen parallel in einen Punkt verlegt, und dann durch eine Kugel von beliebigem Halbmesser schneidet. So entsteht Fig. 2., welche folgende zwei Gleichungen bietet:

$$\cos D = \cos(90^0 - H) \cos(90^0 - h) + \sin(90^0 - H) \sin(90^0 - h) \cos Z$$
$$\cos D' = \cos(90^0 - H') \cos(90^0 - h') + \sin(90^0 - H') \sin(90^0 - h') \cos Z$$

oder mit Weglassung der 90^0:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \qquad (4)$$
$$\cos D' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos Z \qquad (5)$$

Um bei gegebenen H, H', h, h' die Beziehung zwischen D und D' zu gewinnen, braucht man nur $\cos Z$ aus beiden Gleichungen (4) und (5) zu eliminiren, d. h. man bestimmt $\cos Z$ aus (5) und setzt es in (4) ein. Indem wir zur Abkürzung schreiben:

$$\frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} = q \qquad (6)$$

erhalten wir auf diese Weise:

$$\cos D = q \cos D' - q \sin H' \sin h' + \sin H \sin h \qquad (7)$$

Nach diesen directen und strengen Formeln (6) und (7) rechnet man aber selten, denn weil die Differenzen $D - D'$, $H - H'$, $h - h'$ im Allgemeinen klein sind, nämlich höchstens etwa $= 1^0$, so empfiehlt es sich, durch Reihenentwicklung unmittelbar auf die Differenz $D - D'$ auszugehen.

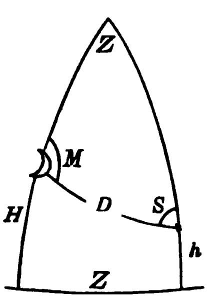
Zu diesem Zweck wird die Gleichung (4) nach D, H und h differentiirt, und gibt:

$$-\sin D\, dD = \cos H \sin h\, dH + \cos h \sin H\, dh$$
$$- \sin H \cos h \cos Z\, dH - \sin h \cos H \cos Z\, dh$$

$$\left.\begin{aligned} -dD = &\left(\frac{\cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z}{\sin D}\right) dH \\ &+ \left(\frac{\cos h \sin H - \sin h \cos H \cos Z}{\sin D}\right) dh \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Klammercoefficienten von dH und dh haben hier geometrische Bedeutungen, sie sind nämlich bezw. $= \cos M$ und $= \cos S$, wenn M und S, wie in Fig. 2. und Fig. 3. eingeschrieben, die Winkel am Mond und am Stern (oder Sonne) sind.

Fig. 3.
Monddistanz-Reductionsdreieck.



Um dieses zu beweisen, nehmen wir die erste der Formeln (8) von der Formelsammlung der sphärischen Trigonometrie § 1. S. 2 zur Hand, nämlich:

$$\operatorname{cotg} \alpha \sin \gamma = \operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

diese Formel auf das Dreieck von Fig. 3. angewendet gibt:

$$\operatorname{cotg} M \sin Z = \operatorname{cotg}(90^0 - h) \sin(90^0 - H) - \cos(90^0 - H) \cos Z \qquad (9)$$

hiezu die Sinusbeziehung nach Fig. 3.:

$$\frac{\sin Z}{\sin D} = \frac{\sin M}{\sin (90^0 - h)} \tag{10}$$

(9) und (10) zusammen geben:

$$\cotg M \sin D \frac{\sin M}{\cos h} = \tang h \cos H - \sin H \cos Z$$

woraus:

$$\cos M = \frac{\sin h \cos H - \sin H \cos h \cos Z}{\sin D} \tag{11}$$

Die hiezu symmetrische Formel für $\cos S$ lautet:

$$\cos S = \frac{\sin H \cos h - \sin h \cos H \cos Z}{\sin D} \tag{12}$$

Wir haben also, wie schon oben bei (8) in Worten ausgesprochen wurde, durch Einsetzen von (11) und (12) in (8) die wichtige Distanz-Reductionsformel:

$$- dD = dH \cos M + dh \cos S \tag{13}$$

Gibt man den Differentialen dD, dH und dh die Bedeutung, dass sie den Uebergang von (4) auf (5) vermitteln sollen, so wird (13):

$$-(D - D') = (H - H') \cos M + (h - h') \cos S$$

oder wegen (2) und (3):

$$D - D' = - \Delta H \cos M - \Delta h \cos S \tag{14}$$

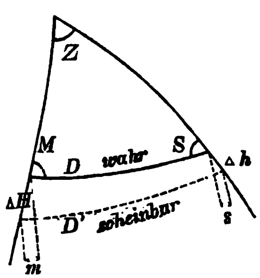
Dieses ist die gebräuchlichste Näherungsformel für die Distanzreduction. Die geometrische Deutung dieser Formel ist in Fig. 4. gegeben, wo

$$\Delta H \cos M = m \qquad \Delta h \cos S = s \tag{15}$$

also:

$$D' - D = \Delta H \cos M + \Delta h \cos S = m + s \tag{16}$$

Fig. 4. Distanzreduction $D' - D = m + s$.



In Fig. 4. ist angenommen, dass ΔH und Δh, und entsprechend auch m und s, gleiche Zeichen haben, was nach der bei (3) gemachten Bemerkung im Allgemeinen nicht der Fall ist. In Fig. 4. handelt es sich nur um eine geometrische Veranschaulichung der allgemein algebraisch gültigen Formel (16), welcher durch eine einzelne Annahme von ΔH und Δh nicht vorgegriffen wird.

Unsere Entwicklung gibt keine Auskunft über die Genauigkeit der Näherungsformel (14). Mit demselben Rechte wie bei (14) könnte man auch schreiben:

$$D - D' = - \Delta H \cos M' - \Delta h \cos S' \tag{17}$$

wo M' und S' die Winkel in dem zur scheinbaren Distanz D' (Fig. 2.) gehörigen Dreieck bedeuten, und da keine von den beiden Formeln (14)

und (17) einen Vorzug vor der andern hat, ist es sehr nahe liegend, weder (14) noch (17), sondern das arithmetische Mittel beider anzuwenden, oder was im Wesentlichen dasselbe ist, man berechnet $\cos M$ und $\cos S$ nach (11) und (12) oder den nachfolgenden Formeln (19), (20) oder (21), indem man dort unter H, h und D die arithmetischen Mittel aus den wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen versteht. Bei der Distanz, deren wahren Werth man noch nicht hat, muss man hiebei eine anderwärts hergenommene Näherung benutzen.

Wir haben also nun die Reductionsformel:

$$D' - D = \Delta H \cos M_0 + \Delta h \cos S_0 \tag{18}$$

wo M_0 und S_0 diejenigen Werthe der Winkel M und S sind, welche mit den arithmetischen Mitteln der wahren und scheinbaren Höhen und Distanzen berechnet sind.

Was die Berechnung selbst betrifft, so haben wir für M und S verschiedene Formeln. Die zuerst aufgefundenen (11) und (12) eignen sich zur numerischen Anwendung nicht. Wenn die Distanz D und beide Höhen H und h gegeben sind, so rechnet man für M:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos D \cos(90^\circ - H) + \sin D \sin(90^\circ - H) \cos M$$

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \tag{19}$$

und entsprechend

$$\cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \tag{20}$$

Wenn alle vier Stücke H, h, D, Z gegeben sind, so rechnet man M und S am besten nach dem Sinussatz:

$$\sin M = \frac{\sin Z \cos h}{\sin D} \qquad \sin S = \frac{\sin Z \cos H}{\sin D} \tag{21}$$

§ 60. Die Halbmesser-Correctionen.

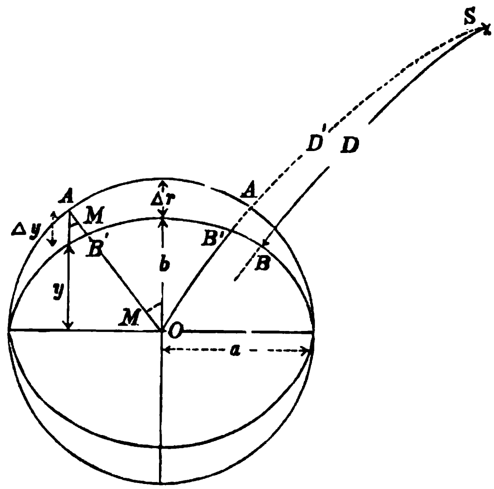
Der Mondhalbmesser, wie er im Jahrbuch angegeben ist, bezieht sich auf den Mittelpunkt der Erde, und da von einem Punkt der Erdoberfläche aus der Mond im Allgemeinen grösser erscheint, als vom Erdmittelpunkt aus, bedarf der Jahrbuchs-Halbmesser einer positiven Correction, welche wir schon in § 8. S. 33—34 behandelt haben. Die zugehörige Tabelle findet sich auf S. [18] des Anhangs.

Eine zweite Halbmessercorrection, und zwar nicht blos für den Mond, sondern auch für die Sonne, entsteht aus der Wirkung der Strahlenbrechung. Ein Punkt erscheint um so mehr gehoben, je näher er dem Horizonte ist, also wird der Sonnen- oder Mondmittelpunkt relativ mehr in die Höhe gedrückt als der Oberrand, und die Folge davon ist, dass wir in der Nähe des Horizontes die Sonne und den Mond nicht kreis-

förmig, sondern in verticalem Sinne plattgedrückt erblicken. Insofern die Refractionsdifferenzen nahezu proportional den Höhendifferenzen sind, kann man die abgeplattete Sonnen- oder Mondscheibe als Ellipse behandeln, und findet dann die Halbmesserverkürzung in schiefer Richtung durch eine einfache Näherungsformel.

In Fig. 1. sei der um O gezogene Kreis die Gestalt des Mondes oder der Sonne, wie sie ohne Refraction erscheinen würde, dagegen die Ellipse um O die durch Refraction abgeplattete Mond- oder Sonnenform.

Fig. 1.
Verkürzung des Mond- und Sonnenhalbmessers durch Refraction.



Es handle sich um eine Distanz vom Punkte S aus, welche direct bis zum Mittelpunkt in dem Bogen SO gemessen würde, während der kürzeste Abstand von der Ellipse in dem Bogen SB gesucht werden muss, welcher die Ellipse in B rechtwinklig trifft. Mit Annahme der aus der Anschauung der Figur begründeten Näherung $SB + B'O = SO$ hat man die schiefe Verkürzung AB' zu bestimmen, um $SO = SB + (OA - AB')$ berechnen zu können. Zur Verdeutlichung ist auf dem linken Theil von Fig. 1. nochmals AB' gezeichnet mit der Kreisordinate $y + \Delta y$ des Punktes A und der Ellipsenordinate y, welche A entspricht. Dann ist nach dem Ellipsengesetz:

$$\Delta y : (y + \Delta y) = \Delta r : (b + \Delta r) \text{ oder } = \Delta r : a \tag{1}$$

$$\Delta y = \Delta r \frac{y + \Delta y}{a} = \Delta r \frac{y + \Delta y}{OA} = \Delta r \cos M \tag{2}$$

Zugleich ist hinreichend genähert:

$$AB' = \Delta y \cos M$$

also nach (2):

$$AB' = \Delta r \cos^2 M \tag{3}$$

d. h. man hat die Refractionsdifferenz Δr für Mitte und Oberrand mit $\cos^2$ des Winkels M zu multipliciren, welchen der Distanzbogen OS mit dem Verticalkreis des Mondes (oder der Sonne) macht.

Die Refractionsdifferenz Δr für Mitte und Oberrand, oder für Unter-

rand und Mitte, ist in der Nähe des Horizontes nicht unbeträchtlich, und kann beim Untergang oder Aufgang gut mit freiem Auge beobachtet, jedenfalls mit dem Sextanten gemessen werden.

Für den verticalen Halbmesser 15′ geben die Refractionstafeln:

Wahre Höhe des Mittelpunkts h	Scheinbare Höhe des Mittelpunkts H	Refractionsdifferenz Δr für h und $h - 15'$	$h + 15'$
0°	0° 29′ 12″	2′ 20,8″	2′ 7,8″
1	1 21 44	1 36,2	1 24,8
2	2 16 54	1 1,8	0 56,0
3	3 13 33	43,9	39,4
4	4 11 16	30,2	28,2
5	5 9 32	23,4	21,5
10	10 5 14	7,6	7,4
15	15 3 31	3,5	3,5
20	20 2 37	2,1	2,1
30	30 1 40	1,0	1,0

(4)

Diese Beträge Δr gehen unter Umständen ganz in die Distanz ein, wenn nämlich M oder S nahe $= 0^0$ oder 180^0 ist. Eine Tafel der Werthe (3) ist auf S. [18] gegeben für Höhen über 5^0, streng gültig für einen Mittelwerth des Mond- oder Sonnenhalbmessers $= 15' \, 40''$. Für Höhen unter 5^0 kann man eine solche Tafel nicht mehr mit einem constanten Halbmesserwerth behandeln, und da die Refractionen hier sehr rasch zunehmen, ist es besser, die Refractionsdifferenz für Mitte und Oberrand, bzw. für Unterrand und Mitte aus der Refractionstafel S. [18] zu entnehmen, und mit $\cos^2 M$ bezw. $\cos^2 S$ zu multipliciren.

Die oben in der Formel (3) mit Fig. 1. gegebene Reduction des Mond- und Sonnenhalbmessers beruht auf verschiedenen Näherungs-Annahmen, welche wir nun noch genauer verfolgen wollen.

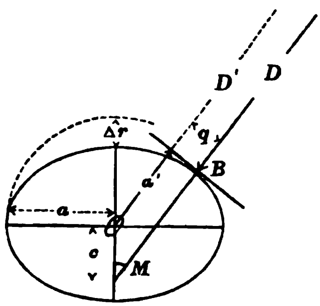
Zuerst entsteht die Frage, ob die zusammengedrückt erscheinende Sonnen- oder Mondscheibe hinreichend genau als Ellipse behandelt werden darf, d. h. ob die Refractionsdifferenzen der einzelnen Randpunkte gegen den Mittelpunkt hinreichend proportional den Höhendifferenzen sind. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir, für die Höhe $h = 1^0$ als wahre Mittelpunktshöhe, und für einen wahren Sonnen- oder Mondhalbmesser $= 15'$, folgende Tabelle zusammengestellt, in welcher Δr die Refractionsdifferenzen zwischen den einzelnen Randpunkten und der Mitte bezeichnen, und Δe die durch Proportionalvertheilung erhaltenen, also der Ellipsenform entsprechenden Refractionsdifferenzen bedeuten, wobei indessen für die untere und für die obere Hälfte der Sonnen- oder Mondscheibe zwei verschiedene Halbellipsen gelten.

Wahre Höhe h	Mittlere Refraction r	Refractions-Differenzen Δr	Ellipse Δe	Differenzen $\Delta e - \Delta r$
0° 45'	23' 20,0"	1' 35,7"	1' 35,7"	0,0"
0 50	22 46,9	1 2,6	1 3,8	+ 1,2
0 55	22 15,0	0 30,7	0 31,9	+ 1,2
1 0	21 44,3	0 0,0	0 0,0	0
1 5	21 14,7	0 29,6	0 28,5	— 1,1
1 10	20 46,3	0 58,0	0 57,0	— 1,0
1 15	20 18,9	1 25,4	1 25,4	0,0

(5)

Die Fehler gegenüber der Ellipsenannahme erreichen also bei 1° Höhe etwa 1" und mit Rücksicht auf die in kleinen Höhen stattfindenden Unsicherheiten der Refraction selbst ist daher die Ellipsenannahme zulässig.

Fig. 2. Verkürzung $a - a'$.



Nun betrachten wir in Fig. 2. die Verkürzung $a - a'$ genauer als in Fig. 1. geschehen ist, unter Benutzung einiger in der Geodäsie geläufiger Formeln. (J. Handb. der Vermessungskunde II. § 66.). Der in Fig. 2. mit c bezeichnete Abstand c ist:

$$c = R \cos M - y$$

wo

$$R = \frac{a}{W}, \qquad y = \frac{a\,(1 - e^2) \cos M}{W}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 M}$$

Dieses zusammen gibt:

$$c = \frac{a e^2 \cos M}{W} \tag{6}$$

$$a' = \frac{a}{W} - c \cos M = \frac{a}{W} (1 - e^2 \cos^2 M) = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 M}$$

$$a' = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 M - \frac{e^4}{8} \cos^4 M\right)$$

$$a - a' = \frac{a e^2}{2} \cos^2 M + \frac{a e^4}{8} \cos^4 M \tag{7}$$

Nun ist:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad b = a - \Delta r$$

$$e^2 = \frac{2a\,\Delta r - \Delta r^2}{a^2} = 2\,\frac{\Delta r}{a} - \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2 \tag{8}$$

$$e^4 = 4 \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2 + \dots$$

Dieses in (7) eingesetzt und geordnet gibt:

$$a - a' = \varDelta r \cos^2 M \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varDelta r}{a} \sin^2 M\right) \tag{9}$$

Für die wahre Höhe $h = 1^0$ und $a = 15' = 900''$ wird $\varDelta r = 90''$ und nimmt man hiebei $M = 45^0$, so wird:

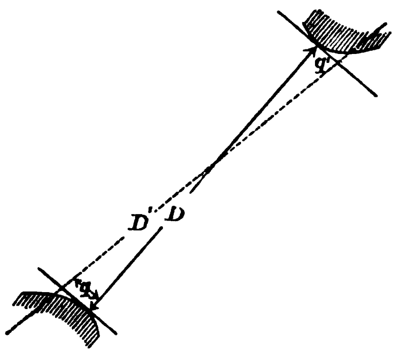
$$a - a' = 45'' - 1''$$

also die Näherung (3) hinreichend genau.

Zugleich nehmen wir aus Fig. 2. mit (6) und (8):

$$q = c \sin M = 2 \varDelta r \sin M \cos M \tag{10}$$

Fig. 8. Distanzreduction $D - D'$.



Dieser Werth q wird nämlich gebraucht, wenn man nun nach Fig. 3. weiter überlegt, wie sich die wirklich gemessene Distanz, d. h. der kürzeste Berührungsabstand D beider Himmelskörper zu dem nach der Formel (9) auf die Ränder reducirten Mittelpunktsabstande verhält. Man wird dadurch auf eine Reduction von der Art wie die Reduction eines Winkels auf den Horizont (§ 40. Fig. 1. S. 207) geführt, welche zunächst zu erkennen gibt, dass die Reduction $D' - D$ nur dann von Belang sein kann, wenn D klein ist, und in diesem Falle kann man näherungsweise setzen:

$$D' - D = \frac{2 (\varDelta r + \varDelta r')^2 \sin^2 M \cos^2 M}{\varrho \sin D}$$

Man kann daraus entnehmen, dass nur bei sehr kleinen Distanzen unter 1^0 ein bemerkbarer Fehler aus der gewöhnlichen Reduction nach der auf die Anschauung von Fig. 1. gegründeten Näherung (3) entstehen kann.

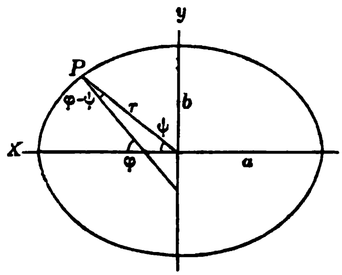
Als allgemeines Resultat finden wir aus diesen Betrachtungen, dass die gewöhnliche Halbmesserreductionsmethode (3) S. 303 für alle praktischen Fälle der Monddistanz-Reduction genügend ist, dass sie aber auf extreme Fälle, kleine Distanzen sehr nahe am Horizont, nicht anzuwenden ist.

§ 61. Mondparallaxe mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde.

Die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt hat auf die Monddistanz-Reduction einen Einfluss, der 10″—20″ erreichen kann, weshalb er bei genauen Berechnungen nicht vernachlässigt werden darf.

Die Abplattung der Erde äussert sich in der Bestimmung der Mondparallaxe, welche durch die Formel $\pi \cos H'$ in (2) S. 289 nur genähert angegeben ist.

Fig. 1. Das Erdellipsoid.



Voraus zu schicken haben wir im nachfolgenden (*a*) bis (*h*) die Entwicklung der Formeln für die geocentrische Breite ψ und den geocentrischen Halbmesser r des Erdellipsoids.

Wenn man in Fig. 1. die Erdmeridianellipse auf ein Coordinatensystem x, y bezieht, dessen x-Achse mit der grossen Halbachse a und dessen y-Achse mit der kleinen Halbachse b zusammenfällt, so heisst die Ellipsengleichung bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{a}$$

und unter der Excentricität e versteht man die Grösse:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \tag{b}$$

(*a*) gibt differentiirt:

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\operatorname{cotg} \varphi \tag{c}$$

Der zweite Theil von (*c*) ist richtig, weil φ der Winkel der Ellipsoidnormalen mit der x-Achse ist. Ferner ist:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \psi \tag{d}$$

also durch Division von (*d*) und (*c*) mit Rücksicht auf (*b*):

$$\frac{\operatorname{tang} \psi}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \tag{e}$$

Setzt man nun

$$\psi = \varphi - (\varphi - \psi), \qquad \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi - (\varphi - \psi) \sec^2 \varphi,$$

so findet man wegen (*e*):

$$1 - (\varphi - \psi) \sec \varphi \operatorname{cosec} \varphi = 1 - e^2$$

$$\varphi - \psi = e^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \tag{f}$$

Einige Zahlenwerthe hiefür haben wir bereits auf S. 3 angegeben.

Zum geocentrischen Halbmesser übergehend, welcher in Fig. 1. oben mit r eingeschrieben ist, haben wir

$$r^2 = x^2 + y^2$$

oder wegen (*a*) und (*b*):

$$r^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + y^2 = a^2 - y^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = a^2 - y^2 e^2 \qquad (g)$$

Da die Abplattung der Ellipse gering ist, kann man hier näherungsweise für die Ordinate y die entsprechende Kreisordinate nehmen, d. h. $y = a \sin \varphi$, womit (*g*) wird:

$$r^2 = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi) \qquad r = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

genähert:

$$r = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi\right) \qquad (h)$$

Nach diesen Vorbereitungen (*f*) und (*h*) zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehend, setzen wir voraus, dass die in Rechnung zu nehmenden Höhen bereits von der Refraction befreit sind, es sei also:

$$H' = \text{Beobachtete Mondhöhe} - \text{Refraction} \qquad (1)$$

Fig. 2. Höhenparallaxe des Mondes.

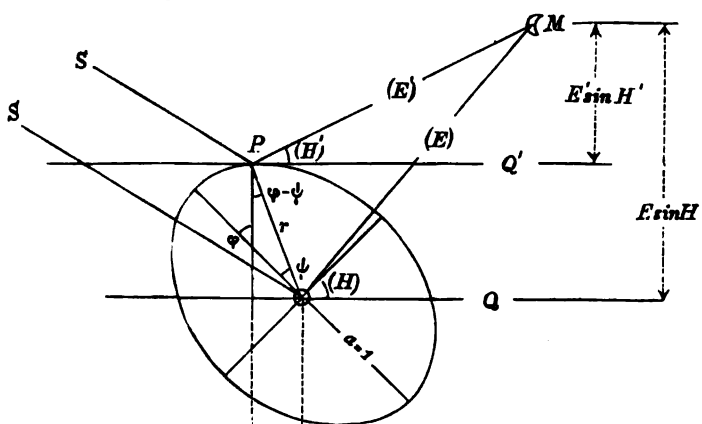


Fig. 3. Seitenparallaxe Fall I. Mond östlich vom Meridian.

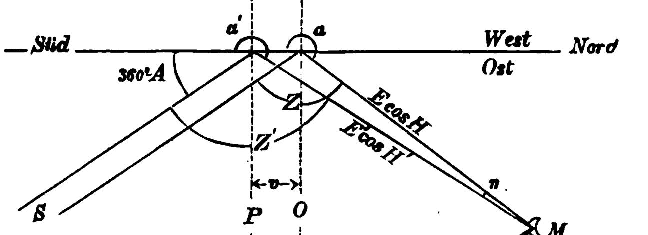
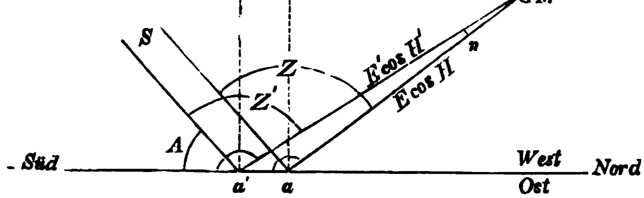


Fig. 4. Seitenparallaxe Fall II. Mond westlich vom Meridian.



In Fig. 2. ist die Erde mit den zur Monddistanzmessung nöthigen Strahlen auf den Meridian des Beobachtungspunktes P projicirt. PQ' ist der scheinbare Horizont, OQ der wahre Horizont, $OP = r$ ist der geocentrische Halbmesser, φ die geographische Breite, ψ die geocentrische Breite. Für r und $\varphi - \psi$ haben wir die nöthigen Formeln in der Vorbereitung (f) und (h) entwickelt, d. h. wenn wir nun $a = 1$ setzen, wie auch in Fig. 2. eingeschrieben ist, so haben wir nach (h):

$$r = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \tag{2}$$

ferner, mit Zusetzung von ϱ zu der Formel (f):

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2} e^2 \varrho \sin 2\varphi \tag{3}$$

Da der Aequatorhalbmesser der Erde $a = 1$ gesetzt wurde, ist die Entfernung des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkt nach (1) § 8. S. 32:

$$E = \frac{1}{\sin \pi} \tag{4}$$

wenn π die (im astr. Jahrbuch gegebene) Horizontal-Aequatorial-Parallaxe des Mondes ist.

Diese Entfernung E und die Entfernung E' des Mondes vom Beobachtungspunkt P sind, auf die Meridianebene von Fig. 1. projicirt, mit (E) und (E') bezeichnet, und ähnlich sind die Höhenwinkel in Fig. 2. mit (H) und (H') eingeschrieben, wodurch angedeutet sein soll, dass H die wahre Höhe und H' die scheinbare Höhe (d. h. nach (1) die beobachtete Höhe — Refraction) des Mondes sein soll. Damit hat man in Fig. 2. die Projectionen $E \sin H$ und $E' \sin H'$, d. h. die linearen Höhen des Mondes über dem wahren Horizont OQ und über dem scheinbaren Horizont PQ'.

Während Fig. 2. den Aufriss unseres Systems vorstellt, sind Fig. 3. und Fig. 4. Grundrisse desselben, projicirt auf den Horizont von P. Fig. 3. und Fig. 4. stellen zwei verschiedene Fälle vor, nämlich mit dem Mond östlich oder westlich vom Meridian. Wir finden hier die Horizontal-Projectionen $E \cos H$ und $E' \cos H'$ der Entfernungen E und E', und die Horizontalprojection v des geocentrischen Halbmessers r, und zwar ist nach Fig. 2.:

$$v = r \sin (\varphi - \psi) \tag{5}$$

d. h. nach (2) und (3) hinreichend genähert:

$$v = \frac{1}{2} e^2 \varrho \sin 2\varphi \tag{6}$$

Die Mondazimute werden in Fig. 3. und Fig. 4. durchaus von Süden über Westen positiv gezählt, und zwar sei a das wahre (auf den Erdmittelpunkt bezogene) Azimut, und a' das scheinbare (im Punkt P selbst messbare) Azimut. Zugleich sei auch das Azimut A der Sonne oder des Sterns S eingeführt, ebenfalls von Süden über Westen gezählt. S selbst

wird als unendlich entfernt angenommen, weshalb die von O und P nach S gehenden Strahlen parallel gezeichnet sind, und eine Unterscheidung zwischen wahren und scheinbaren Azimuten von S nicht gemacht ist.

Höhenparallaxe des Mondes.

Fig. 2. gibt:

$$E' \sin H' = E \sin H - r \cos(\varphi - \psi)$$

oder genügend:

$$E' \sin H' = E \sin H - r = E \sin H \left(1 - \frac{r}{E \sin H}\right) \tag{7}$$

Fig. 3. und 4. geben gemeinsam:

$$(E' \cos H')^2 = (E \cos H)^2 + v^2 - 2 v E \cos H \cos a$$

v^2 ist zu vernachlässigen, also:

$$(E' \cos H')^2 = (E \cos H)^2 \left(1 - 2 \frac{v \cos a}{E \cos H}\right)$$

$$E' \cos H' = E \cos H \left(1 - \frac{v \cos a}{E \cos H}\right) \tag{8}$$

(7) und (8) dividirt geben:

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang} H \left(1 - \frac{r}{E \sin H} + \frac{v \cos a}{E \cos H}\right)$$

r, E und v werden nach (2), (4) und (6) eingesetzt, wonach:

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang} H \left(1 - \frac{\sin \pi}{\sin H}\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \frac{\sin \pi}{\cos H}\right)$$

$$\operatorname{tang} H' - \operatorname{tang} H = - \frac{\sin \pi}{\cos H}\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \frac{\sin \pi}{\cos^2 H} \sin H$$

Andererseits ist goniometrisch:

$$\operatorname{tang} H' - \operatorname{tang} H = \frac{\sin (H' - H)}{\cos H \cos H'}$$

also:

$$\sin (H' - H) = - \sin \pi \cos H' \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) + \frac{1}{2} e^2 \sin \pi \sin 2\varphi \cos a \sin H \frac{\cos H'}{\cos H}$$

$$\sin (H - H') = \sin \pi \cos H' \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \operatorname{tang} H\right) \tag{9}$$

Der Werth $$H - H' = p$$

ist die Höhenparallaxe des Mondes, und die erste Näherung von (9):

$$\sin p = \sin \pi \cos H' \tag{10}$$

stimmt überein mit der schon in (6) § 8. S. 33 gefundenen Formel.

Zur weiteren Umformung darf auch statt (10) kürzer geschrieben werden:

$$H - H' = p_0 = \pi \cos H' \qquad (11)$$

denn es ist in nächster Entwicklung:

$$p_0 - \frac{p_0^3}{6} = \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}\right) \cos H'$$

$$p_0 - \frac{(\pi \cos H')^3}{6} = \pi \cos H' - \frac{\pi^3}{6} \cos H'$$

$$p_0 = \pi \cos H' - \frac{\pi^3}{6} \cos H' \sin^2 H' \qquad (12)$$

Das zweite Glied gibt mit $\pi = 1^0 = 3600''$ den Factor:

$$\frac{(3600'')^3}{6\,\varrho''^2} = 0{,}18''$$

Da hiezu noch in (12) der verkleinernde Factor $\cos H' \sin^2 H'$ kommt, ist das zweite Glied von (12) immer zu vernachlässigen; wir rechnen daher mit (9) weiter in der Form:

$$p = \pi \cos H' \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \operatorname{tang} H\right) \qquad (13)$$

oder

$$p = \pi \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) \cos H' \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \operatorname{tang} H\right) \qquad (14)$$

Statt des letzten Factors in (14) kann man auch eine Correction von H' einführen, denn es ist:

$$\cos \left(H' + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a\right) = \cos H' - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \sin H'$$

$$= \cos H' \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \cos a \operatorname{tang} H'\right)$$

wenn man also die hier jedenfalls zulässige Verwechslung von H' mit H vornimmt, so wird (14) (mit Zusetzung von ϱ''):

$$p = \pi \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi\right) \cos \left(H' + \frac{1}{2} e^2 \varrho'' \sin 2\varphi \cos a\right) \qquad (15)$$

Wenn die Höhe H' (s. o. (1)) nicht unmittelbar gegeben ist, sondern die wahre Höhe H, so berechnet man zuerst eine Näherung:

$$p_0 = \pi \cos H \qquad (15a)$$

und dann

$$H' = H - p_0 \qquad (15b)$$

worauf die genaue Berechnung von p nach (15) folgen kann.

Auf diese Formeln (15) (15 a) und (15 b) gründet sich unsere Hülfstafel S. [19] mit $\log e^2 = 7.82441$. Das Mondazimut a ist dabei nach Fig. 3. und Fig. 4. von Süden über Westen gezählt, da aber nur $\cos a$ in Frage kommt, und $\cos a = \cos (360^0 - a)$ ist, kann a beliebig von Süden nach Westen oder nach Osten gezählt werden.

Die Höhencorrection $\frac{1}{2}\, e^2\, \varrho''\, sin\, 2\, \varphi\, cos\, a$ in (15) ist in dem Berliner „Nautischen Jahrbuch" durch Tafel XVIII gegeben, und die dortige Tafel XIX bezieht sich auf die erste Klammer von (15), indem gesetzt ist

$$\pi\,(1 - \frac{1}{2}\, e^2\, sin^2\, \varphi) = \pi - \frac{1}{2}\, e^2\, \pi\, sin^2\, \varphi \qquad (16)$$

Der Abzug $\frac{1}{2}\, e^2\, \pi\, sin^2\, \varphi$, z. B. $= 11''$, für $\pi = 60'$ und $\varphi = 75^0$ wird durch jene Tafel XIX gegeben.

Da man hier das Hauptglied doch logarithmisch rechnet, haben wir auf S. [19] vorgezogen, den Correctionsfactor $1 - \frac{1}{2}\, e^2\, sin^2\, \varphi$ logarithmisch zu nehmen.

Wenn in Fig. 2. der Punkt P nicht in der Meereshöhe, sondern in der Höhe h über dem Meere liegt, so entsteht dadurch eine weitere Correction der Höhenparallaxe, welche aber für $h = 1000$ m höchstens $0{,}6''$ ausmacht.

Seitenparallaxe des Mondes.

Es handelt sich in Fig. 3. und Fig. 4. S. 298 um die Horizontalprojection n der Mondparallaxe und um deren Einfluss auf die Distanzreduction. Dieser Werth n hat Einfluss auf den Zenitwinkel Z, denn während für die kugelförmige Erde der Zenitwinkel derselbe ist, mag man den Standpunkt auf der Erdoberfläche in P, oder im Erdmittelpunkt O annehmen, erhält man bei ellipsoidischer Erdgestalt zwei solcher Winkel, Z oder Z', je nachdem O oder P als Standpunkt gilt, wie bereits in Fig. 3. und 4. eingeschrieben ist.

Nach Fig. 3. ist:

$$sin\, n : v = sin\,(a' - 180^0) : E\, cos\, H$$

$$n = -\frac{v\, sin\, a'}{E\, cos\, H}$$

$$a - a' = n$$

also zusammen:

$$a - a' = -\frac{v\, sin\, a'}{E\, cos\, H} \qquad (17)$$

Nach Fig. 4. ist:

$$sin\, n : v = sin\,(180^0 - a') : E\, cos\, H$$

$$n = \frac{v\, sin\, a'}{E\, cos\, H}$$

$$a' - a = n$$

$$a - a' = -\frac{v\, sin\, a'}{E\, cos\, H} \qquad (18)$$

Die beiden Fälle Fig. 3. und Fig. 4. geben also dieselbe Formel (17) oder (18) für die Azimutdifferenz $a - a'$, und diese Azimutdifferenz ist zugleich die Differenz der Zenitwinkel Z und Z', es kommt aber nun

in Hinsicht auf das Vorzeichen darauf an, ob der Mond links oder rechts von dem Stern S steht.

Fig. 3.: Mond links gibt:

$$a' + Z' = a + Z = A$$

$$Z' - Z = a - a' = -\frac{v \sin a'}{E \cos H} \tag{19}$$

Fig. 4.: Mond rechts gibt:

$$a' - Z' = a - Z = A$$

$$Z' - Z = a' - a = +\frac{v \sin a'}{E \cos H} \tag{20}$$

Setzt man E und v nach (4) und (6) ein, so erhält man aus (19) und (20):

$$Z' - Z = \mp \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi \sin a \frac{\pi}{\cos H} \tag{21}$$

wo $\frac{\pi}{\varrho}$ statt $\sin \pi$ und $\sin a$ statt $\sin a'$ geschrieben ist, was jedenfalls zulässig ist. Das Doppelzeichen $\mp$ in (21) bezieht sich darauf, ob bei der Distanzmessung der Mond links oder rechts stand. Das Azimut a ist von Süden nach Westen gezählt, also wenn der Mond östlich steht, ist a grösser als 180°.

Nun kommt es darauf an, den Einfluss zu bestimmen, welchen der Uebergang von Z' auf Z auf die Distanzreduction ausübt. Man hatte für kugelförmige Erde in (4) und (5) § 59. S. 290 zwei Gleichungen, bei welchen Z dasselbe war. Statt dessen hat man jetzt:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \tag{22}$$

$$\cos D' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos Z' \tag{23}$$

Diese zwei Gleichungen sind durch (21) unter sich verbunden, man denke sich daher Z' aus (23) bestimmt, und das nach (21) zugehörige Z in (22) eingesetzt, dieses gibt:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos \left(Z' \pm \frac{1}{2} e^2 \frac{\pi}{\cos H} \sin 2\varphi \sin a\right).$$

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z' \mp \frac{1}{2} e^2 \pi \sin 2\varphi \cos h \sin a \sin Z$$

d. h. im Gegensatz zu derjenigen Rechnung (S. 290), bei welcher die beiden Gleichungen (22) und (23) ein und denselben Zenitwinkel Z' enthalten, haben wir jetzt eine Aenderung, welche, als Differential betrachtet, so heisst:

$$d \cos D = \mp \frac{1}{2} e^2 \pi \sin 2\varphi \cos h \sin a \sin Z \tag{24}$$

Da

$$d \cos D = -d D \sin D$$

ist, und nach Fig. 3. S. 290

$$\frac{\sin Z}{\sin D} = \frac{\sin M}{\cos h}$$

so wird jetzt (24):

$$dD = \pm \frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin M \sin 2\varphi \tag{25}$$

Diese Correction ist derjenigen Monddistanz D noch hinzuzufügen, welche man mittelst der Formel (14) S. 291 erhalten hat.

Das Doppelzeichen $\pm$ in (25) bezieht sich darauf, ob der Mond bei der Distanzmessung in azimutalem Sinne links oder rechts vom Stern (oder der Sonne) stand, und das Azimut a ist von Süden über Westen gezählt worden. Wenn daher der Mond östlich vom Meridian steht (a grösser als 180°), so wird $\sin a$ negativ.

Um alle diese Verhältnisse nicht jedesmal besonders überlegen zu müssen, haben wir die 4 Fälle, welche unterschieden werden müssen, auf S. [20] unten aufgezeichnet. Es kommt dabei nur auf die Lage des Mondes links oder rechts vom Stern (oder Sonne) und auf die Lage des Mondes westlich oder östlich vom Meridian an, der Quadrant, in welchem der Stern (oder Sonne) sich befindet, ist gleichgültig.

Zur praktischen Anwendung der Formel (25) haben wir auf S. [20] zunächst die Function für $\varphi = 45°$, d. h.

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin M$$

tabellarisch ausgerechnet, und es kann also diese Tafel I sofort gebraucht werden für Messungen in der Nähe von 45°, d. h. nahezu auf der ganzen Zone von 40° bis 50° Breite.

Die Tafel II S. [20] gibt dann die fragliche Correction für die Breiten $\varphi = 40°$ und $\varphi = 50°$, und diese Tafel II kann für ganz Deutschland gebraucht werden.

Hat man es mit anderen Breiten unter 35° und über 55° zu thun, so nehme man zuerst den Tabellenwerth I und multiplicire ihn mit dem zu diesem Zweck auf S. [20] III, angegebenen Werth $\sin 2\varphi$, was uns bequemer scheint, als noch weitere Tabellen zu benützen. Ausserdem hat man die Möglichkeit, wenn man eine grössere Zahl von Monddistanzen auf einem Gebiet innerhalb 5—10° Breitenunterschied zu reduciren hat, sich rasch ein besonderes Hülfstäfelchen ähnlich wie II S. [20] anzulegen. So habe ich z. B. für alle Monddistanzen der libyschen Wüste ein solches Täfelchen mit $\varphi = 27°$ benützt.

Das Berliner „Nautische Jahrbuch" hat für die Correction (25) die zwei Hülfstafeln XX und XXI, es ist nämlich:

$$\mathrm{XX} = \frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin 2\varphi$$

$$\mathrm{XXI} = \mathrm{XX} \sin M$$

Gesammtreduction.

Wenn man nun die Gesammt-Monddistanzreduction mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde bilden will, und dabei das in (18) § 59. benützte

Princip der Mittelhöben wieder anwenden will, so hat man zunächst an der Methode des § 59. weiter keine Aenderungen anzubringen, als dass statt $\pi \cos H'$ in (2) § 59. S. 289 nun die genauere Mondhöhenparallaxe p nach (15) S. 301 einzusetzen ist, und dass am Schlusse noch die Correction (25) S. 304 für Seitenparallaxe zuzufügen ist.

Bei näherer Betrachtung findet man dann, dass auch die **Refraction** des Mondes eine Art Seitenparallaxe erzeugen muss, denn die Refraction wirkt im Sinne des scheinbaren Zenits Z' (Fig. 2. bis 4. S. 298) und gibt daher auf Z reducirt eine Correction von ähnlicher Form wie (25) S. 304. Da aber diese Formel mit dem Factor $\pi = 60'$ höchstens $11''$ ausmacht, so würde sie mit der Refraction, welche über 2^0 Höhe weniger als $18''$ beträgt, hier höchstens $3''$ geben, welche neben der Unsicherheit der Refraction in kleinen Höhen zu vernachlässigen sind.

§ 62. Interpolation mit Rücksicht auf zweite Differenzen.

Der Nautical Almanac und das Berliner Nautische Jahrbuch geben die Monddistanzen von 3 zu 3 Stunden mittlerer Greenwich-Zeit, also mit einem Intervall von $3^h = 10800^s$ oder tabellarisch:

Greenwich-Zeit	Distanz	Differenzen		
t_n	D_n			
		ΔD		
t_{n+3}	D_{n+3}		$\Delta D' - \Delta D$	(1)
		$\Delta D'$		
t_{n+6}	D_{n+6}		$\Delta D'' - \Delta D'$	
		$\Delta D''$		
t_{n+9}	D_{n+9}			

Wenn man also irgend eine Distanz D hat, welche zwischen D_n und D_{n+3} fällt, so ergibt die einfache Interpolation die zugehörige Zeit $t_n + i$, wobei:

$$i = (D - D_n)\frac{10800}{\Delta D} \text{ in Secunden oder } = (D - D_n)\frac{180}{\Delta D} \text{ in Minuten} \quad (2)$$

Wir schreiben:

$$\frac{10800}{\Delta D} = p, \qquad \log \frac{10800}{\Delta D} = \log p \quad (3)$$

Diese Werthe $\log p$, welche „Proportional-Logarithmen" heissen, sind zwischen je 2 Distanzen des Jahrbuchs angegeben, in Einheiten der 4. Logarithmen-Decimale mit Weglassung der Charakteristik. Diese Proportional-Logarithmen, welche auch in anderen Fällen gebraucht werden (Domke, Nautische Tafeln S. 216 — 230) sind zur Ausrechnung von (2) sehr bequem.

Wenn nun aber die Differenzen ΔD und damit auch die Proportional-Logarithmen sehr ungleich werden, so reicht diese Interpolation ersten Grades nicht mehr aus, und es muss nach § 6. S. 24 verfahren werden.

Nach Formel (11) S. 24 ist irgend eine Distanz D, welche zu der Zeit $t_n + z$ gehört, dargestellt durch:

$$D = D_n + z\,\Delta D - \frac{z\,(1-z)}{2}\,(\Delta D' - \Delta D) \tag{4}$$

dabei ist z in Einheiten des 3stündigen Zeitintervalls zu verstehen, d. h. wenn man in Zeitminuten rechnet, und die Zeit von t_n bis zur Distanzzeit $= i$ Minuten beträgt, so ist:

$$z = \frac{i}{180} \qquad 1 - z = \frac{180 - i}{180}$$

also nach (4):

$$D = D_n + \frac{i}{180}\,\Delta D - \frac{1}{2}\,\frac{i}{180}\,\frac{180 - i}{180}\,(\Delta D' - \Delta D) \tag{5}$$

Statt der zweiten Differenz $\Delta D' - \Delta D$ ist die Differenz der Proportional-Logarithmen einzuführen. Nach (3) ist:

$$p = \frac{10800}{\Delta D} \qquad p' = \frac{10800}{\Delta D'}$$

$$\log p' - \log p = \log \frac{p'}{p} = -\log \frac{\Delta D'}{\Delta D} = -\log\left(1 + \frac{\Delta D' - \Delta D}{\Delta D}\right)$$

$$\log p' - \log p = -M\,\frac{\Delta D' - \Delta D}{\Delta D}$$

Dieses in (5) eingesetzt gibt

$$D = D_n + \frac{i}{180}\,\Delta D + \frac{1}{2}\,\frac{i}{180}\,\frac{180 - i}{180}\,\Delta D\,\frac{\log p' - \log p}{M} \tag{6}$$

$$i = (D - D_n)\,\frac{180}{\Delta D} - \frac{1}{2}\,\frac{i}{180}\,\frac{180 - i}{180}\,180\,\frac{\log p' - \log p}{M} \tag{7}$$

Der erste Theil hievon stimmt mit (2) überein, der zweite Theil stellt also die Zeitcorrection für zweite Differenz vor, wobei M der logarithmische Modul $= 0{,}43429$ ist. Versteht man nun unter $\Delta \log p$ die Differenz der Proportional-Logarithmen in Einheiten der 4. Decimale, und rechnet man in Zeitsecunden, so wird das zweite Glied von (7):

$$\Delta i = -\frac{1}{2}\,\frac{i}{180}\,\frac{180 - i}{180}\,10800\,\frac{\Delta \log p}{1000\,M}$$

oder indem man alles Constante zusammenfasst:

$$\Delta i = -0{,}000038376\; i\,(180 - i)\,\Delta \log p$$

Hiernach sind folgende Werthe für $\Delta \log p = 100$ berechnet:

$i =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$180 - i =$	170	160	150	140	130	120	110	100	90
	6,52	12,28	17,27	21,49	24,94	27,63	29,55	30,70	31,08

woraus man, weiter proportional rechnend, das folgende Hülfstäfelchen erhält:

Zeitcorrection für die Differenz $\Delta \log p$ der Proportional-Logarithmen.

i		$\Delta \log p$									
		± 2	± 4	± 6	± 8	± 10	± 12	± 14	± 16	± 18	± 20
0h 0m	3h 0m	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s	∓ 0s
0 10	2 50	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 20	2 40	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2
0h 30m	2h 30m	∓ 0s	∓ 1s	∓ 1s	∓ 1s	∓ 2s	∓ 2s	∓ 2s	∓ 3s	∓ 3s	± 3s
0 40	2 20	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4
0 50	2 10	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
1h 0m	2h 0m	∓ 1s	∓ 1s	∓ 2s	∓ 2s	∓ 3s	∓ 3s	∓ 4s	∓ 4s	∓ 5s	∓ 6s
1 10	1 50	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6
1 20	1 40	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6
1 30	1 30	1	1	2	2	3	4	4	5	6	6

Eine weitergehende Tafel dieser Art findet man in jedem Jahrgange des Nautical Almanac, 1885 S. 470, 1886 S. 480, 1887 S. 476 oder in jedem Jahrgang des Nautischen Jahrbuchs, z. B. 1885 S. 197.

§ 63. Praktische Bemerkungen zur Messung und Reduction von Monddistanzen.

Die Monddistanzen des Nautical Almanac und des Berliner Nautischen Jahrbuchs beziehen sich auf die Sonne, auf die drei hellen Planeten Venus, Jupiter und Saturn und auf 7 Fixsterne 1. und 2. Grösse in der Nähe der Mondbahn, welche mit ihren mittleren Rectascensionen α und Declinationen δ (für das Jahr 1886) in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

Stern		Grösse	Rectascension α	Declination δ
	α Arietis	2	2h 0m 45s	+ 22° 55′ 22″
Aldebaran,	α Tauri	1	4 29 23	+ 16 16 45
Pollux,	β Geminorum	1.2	7 38 20	+ 28 18 2
Regulus,	α Leonis	1.2	10 2 18	+ 12 31 26
Spica,	α Virginis	1	13 19 11	— 10 33 57
Antares,	α Scorpii	1.2	16 22 25	— 26 10 41
Fomalhaut,	α Pisc. Austr.	1.2	22 51 21	— 30 13 34
Markab,	α Pegasi	2	22 59 5	+ 14 35 31

Um sich unter diesen Sternen zu orientiren, genügt eine Kenntniss des Himmels, wie sie bei jedem Liebhaber der Astronomie vorausgesetzt wird. (Vgl. § 3. S. 8—9, Sternkarten).

Ehe man an eine Monddistanzmessung selbst geht, muss man wissen, wie gross ungefähr (auf etwa 1°—2° genau) die Distanz ist, denn ohne vorläufige Einstellung kann man die Bilder zweier Himmelskörper im Fernrohr nicht sofort zusammenbringen. Hat man das Jahrbuch zur Hand, das ja zur Auswahl dessen, was man überhaupt messen will, nöthig ist, so findet man hier auch die Distanz beiläufig auf 1°—2°. Ist man genöthigt, ohne dieses Hülfsmittel zu beginnen, so schraubt man das Fernrohr heraus, und sucht zuerst mit freiem Auge, die der Distanz entsprechende erste genäherte Alhidadenstellung.

Fig. 1.
Sonnen-Monddistanz. Anblick am Himmel.

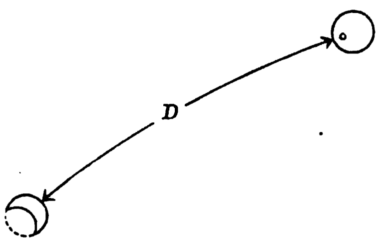
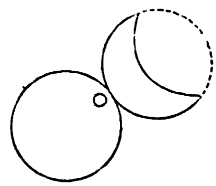


Fig. 2.
Sonnen-Monddistanz. Anblick im Fernrohr.



Wir nehmen nun nach Fig. 1. den einfachsten und bequemsten Fall an: Distanzmessung bei Tage zwischen Mond links und Sonne rechts, was bei zunehmendem Mond, etwa in der Zeit des ersten Viertels, eintritt. Die Messung geschehe von freier Hand (ohne Stativ).

Man schraubt das Fernrohr möglichst hoch, und schlägt vor den grossen Spiegel die sarke (rothe) Blendung.

Dann nimmt man den Sextanten in die rechte Hand, visirt mit dem Fernrohr direct nach dem Mond, und wenn man ihn im Gesichtsfelde hat, hält man das Mondbild unbedingt fest, und beginnt das ganze Instrument um das Fernrohr in der Richtung nach der Sonne zu drehen, bis plötzlich auch die Sonne als rothe Scheibe ins Gesichtsfeld kommt, und bei der Berührung mit dem Mond den Anblick von Fig. 2. gibt. Da man nicht so ruhig halten kann, dass beide Scheiben sich wirklich berühren, setzt man nun dieses Drehen und Schwingen langsam fort, hat dabei die linke Hand an der Mikrometerschraube, und stellt mit dieser Schraube langsam so ein, bis man die Ueberzeugung erlangt, dass die auf- und niederschwingende Sonnenscheibe den Mondrand berührt. Das kann man trotz der Bewegung sehr scharf machen. Nun schaut man rasch auf die Uhr (oder sagt dem die Uhr ablesenden Gehülfen „Top!" vgl. S. 50), notirt zuerst die Zeit und dann die in aller Ruhe abgelesene Distanz. Solcher Messungen macht man 5 — 10 unmittelbar nacheinander (bei einiger Uebung kann man in 10 Minuten 10 Distanzen messen), den Indexfehler bestimmt man vor oder nachher, am besten vor und nachher, mittelst der Sonne (vgl. S. 169—170). Endlich wird noch das Luftthermometer und das Barometer abgelesen, und

damit hat man einen Satz von Messungen, welche nach § 64. berechnet werden können.

Die Sonnen-Monddistanz kann immer nur zwischen den beiden sich zugekehrten Rändern gemessen werden, wie Fig. 1. andeutet; den Anblick im Fernrohr zeigt Fig. 2., von deren Richtigkeit man sich, ausser durch den Versuch, durch die Ueberlegung der verschiedenen Bildumkehrungen überzeugt: links wird einmal durch das Fernrohr umgekehrt, rechts wird durch jeden der beiden Spiegel, und durch das Fernrohr, also im Ganzen dreimal umgekehrt. Man hat also bei der Berechnung immer zu einer Sonnen-Monddistanz die Summe der beiden Halbmesser zu addiren, was man sich ein für allemal merkt.

Wenn bei abnehmendem Mond (letztes Viertel) der Mond rechts von der Sonne steht, so muss man, um den lichtschwachen Mond direct ins Fernrohr zu kriegen, den Sextanten verkehrt halten (vgl. § 56. S. 276). Alles Uebrige bleibt wie im ersten Fall.

Die Zeit, während welcher Sonnen-Monddistanzen im Nautical Almanac angegeben sind, beträgt im Mittel etwa 18 Tage in einem Monat. Es fällt also von den $29^1/_2$ Tagen des synodischen Monats etwa ein Drittel für den fraglichen Zweck aus. Die Vertheilung der Zeiten und die ungefähre Grösse der Distanzen zeigt folgende Zusammenstellung:

Neumond		
Erstes Viertel	Distanz 25° Distanz 135°	} 9 Tage Messung
Vollmond	7,5 Tage Pause	
Letztes Viertel	Distanz 135° Distanz 25°	} 9 Tage Messung
Neumond	4 Tage Pause	
	Distanz 25°	

Von diesen 18 Messungstagen sind aber diejenigen mit kleinen Distanzen, zwischen 25° und 40°, sehr ungünstig, denn es gehört erstens ein sehr heller Himmel, und zweitens ein gutes Auge und Gewandtheit dazu, um eine Distanz zu messen, wenn die schmale Mondsichel, die man mit freiem Auge kaum sieht, sehr nahe der Sonne ist, und wenn die Sonne selbst hoch steht. Man kann hiezu eine kleine Rechnung anstellen: Aus der Monddistanz D lässt sich auch die Mondphase berechnen, für den Halbmesser r des Mondes ist nämlich bei einer Distanz D:

$$\text{Der dunkle Theil der Mondscheibe} = \frac{r^2\pi}{2}(1+\cos D) = r^2\pi\cos^2\frac{D}{2}$$

$$\text{,, helle ,, ,, ,,} \quad \frac{r^2\pi}{2}(1-\cos D) = r^2\pi\sin^2\frac{D}{2}$$

wornach man die erleuchtete Fläche, in Theilen der vollen Scheibe ausgedrückt, so berechnet:

Distanz D =	20°	30°	40°	60°	90°	120°	150°	180°
Helle Fläche =	0,03	0,07	0,12	0,25	0,50	0,75	0,93	1,00

Diese Zahlen machen theoretisch ganz erklärlich, was die Erfahrung lehrt, dass kleine Sonnen-Monddistanzen, die ja sonst sehr erwünscht wären, schwer zu messen sind. Die kleinsten Distanzen dieser Art, welche ich selbst gemessen habe, sind: 43°, 41°, 38°. Ich fand es dabei nützlich, nachdem die Alhidade zum Voraus beiläufig auf die Distanz eingestellt ist, das zweifach reflectirte Bild der Sonne zuerst aufzusuchen, dieses festzuhalten, und dann erst durch Schwingen den Mond ins Gesichtsfeld zu bringen. Man kann auf diese Weise Distanzen messen, ohne den Mond mit blossem Auge überhaupt zu sehen.

Was die obere Grenze der Distanzen betrifft, so hätte man kurz vor oder nach der Vollmondszeit wohl oft Gelegenheit, auch Distanzen bis zu 150° oder gar 160° zu messen, nicht mit dem Sextanten, wohl aber mit dem Prismenkreis (s. §§ 53. 55. und 56.), man müsste dann aber zuvor diese im Nautical Almanac nicht mehr angegebenen Distanzen selbst aus den Rectascensionen und Declinationen berechnen.

Sterndistanzen sind schon deswegen weniger bequem, weil man bei Nacht, wo alle Hülfen weniger zur Hand sind, operiren muss. Auch lässt sich die Berührung des Sternpunktes mit dem Mondrand nicht so scharf auffassen, wie die Berührung zweier Ränder. Andererseits haben Sterndistanzen den Vorzug, dass sie zahlreicher zu haben sind, und namentlich den unschätzbaren Gewinn, dass man durch Combination von Distanzen mit Stern links vom Mond und Stern rechts vom Mond den Indexfehler, und, wenn die Distanzen nahe gleich sind, die Instrumentenfehler überhaupt eliminiren kann.

Man nimmt im Allgemeinen den Stern direct und den Mond mit grüner Blendung doppelt reflectirt, also wenn der Stern rechts steht, mit umgekehrtem Sextanten. Jupiter und Venus können auch ohne Blendung, beliebig links und rechts genommen werden (vgl. das Beispiel mit Jupiter S. 262).

In der Zeit kurz vor oder nach dem Vollmond kann man dem Mond nicht unmittelbar ansehen, welcher Rand der volle und welcher Rand der durch Phase verkleinerte ist. Man nimmt in diesem Falle am einfachsten abwechselnd beide Ränder und bringt die Phasencorrection nachher in Rechnung. Hiezu entnimmt man aus dem Jahrbuch (Naut. Alm. am Schluss der Mondephemeride jedes Monats) die Zeit T des Vollmonds und hat dann für die Beobachtungs-Greenwichzeit das Zeitintervall $T - t$ in Stunden $= (T - t)^h$; und da der Mond zu einer vollen Umdrehung im Mittel 29,5 Tage = 708 Stunden braucht, so wird der Phasenwinkel:

$$w = \frac{(T - t)^h}{708} 360^0$$

und die Phasencorrection

$$= R - R \cos w = 2 R \sin^2 \frac{w}{2}$$

Zur Uebersicht ist folgendes Täfelchen mit $R = 15' \, 40'' = 940''$ berechnet:

$T - t$	w	$2 R \sin^2 \frac{w}{2}$
1h	0° 30'	0,04''
2	1 1	0,1
3	1 31	0,3
6	3 3	1,3
12	6 6	5,3
24	12 12	21,2

Die Phase kann also bis zu 3^h vor oder nach dem theoretischen Vollmond vernachlässigt werden; bis etwa zu einem Tag Abstand genügt vorstehende Näherung, von da an müsste der Phasenwinkel w als Rectascensionsdifferenz von Sonne und Mond berechnet werden. Zur Entscheidung, ob die Phase links oder rechts liegt, hat man die bekannten populären Hülfsmittel (☾ *a*bnehmend, ☽ *z*unehmend, **D**ecrescit **D**extra, sed crescit luna sinistra etc.).

Sobald übrigens die Phase erheblich wird, soll man überhaupt an dem nicht scharfen Rand keine Messung mehr machen.

Vollmond-Distanzen, abwechselnd an beiden Rändern, haben die sonst vermisste Annehmlichkeit, dass man entweder den Mondhalbmesser überhaupt eliminiren kann, oder in seiner Berücksichtigung eine gute Probe findet. Als Beispiel nehmen wir eine Messung vom 2. Januar 1874 Abends in der Oase Farafrah (Phys. Geogr. und Meteorol. der libyschen Wüste S. 34). Distanz: Pollux-Mond.

Die Messung fand statt nur $^1/_2$ Stunde vor der wahren Vollmondszeit, es war also die Phase unbedingt zu vernachlässigen.

Chronometer	Distanz vom jenseitigen Rand	Chronometer	Distanz vom diesseitigen Rand
7h 23m 10s	9° 27' 30''		
		7h 25m 22s	8° 55' 20''
7 26 55	9 25 40		
		7 28 38	8 54 50
7 30 30	9 24 10		
		7 33 8	8 51 20
7 35 10	9 23 0		
		7 37 5	8 50 40
7 39 0	9 21 0		
		7 41 8	8 47 20
7 43 23	9 18 30		
Mittel 7h 33m 1s	9° 23' 18''	7h 33m 4s	8° 51' 46''

Da die Zeitmittel für diesseits und jenseits zufällig auf 3s zusammen stimmen, soll die Differenz 31' 32'' der Distanzmittel gleich dem zwei-

fachen Halbmesser sein. Der Jahrbuchshalbmesser ist 15′ 27″, der scheinbare (nach § 60. corrigirte) Halbmesser ist 15′ 37″, also $2\,R = 31'\,14''$, was mit der Messung auf 18″, also immerhin noch hinreichend, stimmt. Das Gesammtmittel:

$$\text{Chron.} = 7^h\,33^m\,3^s \qquad D = 9^0\;7'\;32''$$

kann man wie eine Messung der Mittelpunktsdistanz weiter behandeln.

So viel über die Monddistanzen-Messung von freier Hand, welche zu Schiff die einzig mögliche und auch zu Land die am raschesten zu erledigende ist.

Nun bietet aber bei fester Aufstellung die Befestigung des Sextanten oder Prismenkreises auf einem mit Universalgelenk versehenen Stativ (§ 29. S. 160—162) unter Umständen bedeutende Vortheile. Allerdings das erste Aufsuchen der Bilder geht viel langsamer als von freier Hand, hat man aber einmal die Sextantenebene in die Ebene der zwei Himmelskörper gebracht, und die Berührung im Gesichtsfeld hergestellt, so geht das übrige Messen, Einstellen mit der Mikrometerschraube und Ablesen der Nonien, fast so ruhig und bequem wie mit einem Theodolit vor sich (ein Beispiel haben wir in § 55. S. 272 gegeben). Da die Sextantenfernröhre grosses Gesichtsfeld haben, ist auch das allmälige Nachrücken entsprechend der Bewegung des Himmels, mit passend angeordneten Schrauben des Stativs nicht schwer.

Wenn das Fernrohr nach rechts gerichtet werden soll, was nur bei umgekehrtem Sextanten möglich ist, so wird die Anwendung des Stativs unbequem, weil die Ablesung an den Nonien von unten her zu machen wäre und weil Umwenden und Neueinrichten des ganzen Instruments nach jeder Ablesung zu umständlich würde. Der Vortheil, nach einer Einrichtung des Ganzen lange und schöne Reihen von Distanzmessungen zu erhalten, würde bei umgekehrtem Instrument wieder verloren gehen (vgl. hiezu § 56. S. 276).

Die zur Reductionsberechnung nöthigen Höhen kann man entweder messen oder berechnen. Zu Schiff werden die Höhen meist gemessen, indem neben dem Hauptbeobachter für die Distanz noch zwei Nebenbeobachter für die Höhen thätig sind. Dieses mag sich dadurch rechtfertigen, dass zur See die Höhen, welche man berechnen würde, nicht nur mit den Fehlern der nächst vorhergegangenen Breiten und Ortszeitmessungen, sondern auch mit der Uebertragung derselben auf den Distanzmessungsort durch die Schifffahrtsrechnung („das Besteck“) behaftet sind, zudem ist an Bord grosser Schiffe genügendes Personal für jene Höhenmessungen vorhanden.

Ganz anders verhält sich die Sache für einen einzelnen Beobachter zu Lande: Die Höhen vor und nach der Distanz zu messen, und Alles auf gleichen Zeitpunkt zu reduciren, ist eine mühsame und dazu unsichere Sache; man thut viel besser daran, diese Arbeit auf die Breite und Ortszeit, die man ja ohnehin braucht, und dann auf die Berechnung der Höhen zu verwenden. An der Breite, die viele Tage vor oder nachher gemessen sein kann, geht nichts verloren, und auch die Ortszeit kann mit einem

mässig guten Chronometer mehrere Tage genügend genau übertragen werden. Mit diesen Elementen nebst genäherter Länge kann man aber die wahren Höhen, so genau man sie braucht, d. h. etwa auf 1′ genau, nach § 4. S. 11—13, berechnen. Nach den ersten Versuchen auf diesem Gebiete habe ich bald das Messen der Reductionshöhen unbedingt aufgegeben, und durch Berechnung ersetzt.

Damit werden wir zu der Berechnung geführt, über welche ebenfalls einiges im Allgemeinen zu sagen ist. Die Vorbereitungsberechnung der Höhen und Azimute ist auf 1′ genau genügend. Die Azimute mit zu berechnen, und zwar nach den Gauss'schen Formeln (3) S. 13, und nicht die Höhenberechnung auf die Formel (1) S. 11 zu beschränken, ist sehr nützlich, denn das Mondazimut braucht man für die Parallaxencorrectionen zweiter Ordnung ohnehin (zur See nimmt man hier Compasspeilung), ferner gewinnt man mittelst der beiden Azimute auch den Zenitwinkel Z, und kann dann die Winkel M und S nach den bequemen Sinusformeln (21) § 59. S. 292 berechnen, auch kann man dann eine Figur, wie Fig. 1. § 64. aufzeichnen, welche alle Verhältnisse klar legt, und vor groben Fehlern schützt.

Höhenparallaxen und Refractionen werden auf 1″ genau berechnet, während die Höhen selbst nur auf 1′ genau sind.

Für die eigentliche Reductionsberechnung ist die gewöhnliche Mittelbreitenformel (14) oder (16) § 59. S. 291 ohne Frage die beste Methode.

W i e d e r h o l u n g d e r B e r e c h n u n g wird oft nicht zu umgehen sein, wenn die vorläufig angenommene Länge sich nachher als ungenügend erweist, indessen hat auch eine Längenänderung von 2^m kaum Einfluss von 1″—2″ auf die Distanzreduction. Hat man auf einer Reise selbst Berechnungen gemacht, so genügen diese, nebst dem Itinerar, zur Gewinnung vorläufiger Längen, auf welche sich dann die endgültige Berechnung stützen kann.

(Nach der libyschen Expedition legte ich die Berechnung der 317 gemessenen Monddistanzen von Anfang an auf Wiederholung an, indem zuerst alle Gruppen in Mittel zusammengefasst wurden und dann erst die Berechnung nach der am Schluss von § 64. anzugebenden Methode von Neuem begann.)

Die D i s t a n z ä n d e r u n g, von deren Geschwindigkeit hauptsächlich die Genauigkeit der Längenbestimmung abhängt, ist im Jahrbuch durch den Proportional-Logarithmus angezeigt, nämlich nach (3) § 62. S. 305 durch $log\ p$; wo

$$p = \frac{10800}{\Delta D}, \text{ für } \Delta D \text{ in Secunden.}$$

Für viele Zwecke ist uns ein anderes Aenderungsmaass bequemer, wir nehmen die Reciproke von p, d. h. die Geschwindigkeit:

$$v(') = \frac{1}{p} \Big\} \begin{array}{l}\text{in Bogenminuten pro 1 Zeitminute}\\ \text{oder in Graden pro 1 Stunde}\end{array}$$

oder

$$v('') = \frac{60}{p} \Big\} \begin{array}{l}\text{in Secunden pro 1 Zeitminute}\\ \text{oder in Minuten pro 1 Stunde}\end{array}$$

Zur Uebersicht bilden wir folgendes Täfelchen:

Prop. Log.	Bewegung in 1 Minute		Prop. Log.	Bewegung in 1 Minute	
log p	$v(')$	$v('')$	*log p*	$v(')$	$v('')$
0.2000	0,631′	37,9″	0.3000	0,501′	30,1″
0.2100	0,617	37,0	0.3100	0,490	29,4
0.2200	0,603	36,2	0.3200	0,479	28,7
0.2300	0,589	35,3	0.3300	0,468	28,1
0.2400	0,575	34,5	0.3400	0,457	27,4
0.2500	0,562	33,7	0.3500	0,447	26,8
0.2600	0,550	33,0	0.3600	0,436	26,2
0.2700	0,537	32,2	0.3700	0,427	25,6
0.2800	0,525	31,5	0.3800	0,417	25,0
0.2900	0,513	30,8	0.3900	0,407	24,4
0.3000	0,501	30,1	0.4000	0,398	23,9

Dass die Geschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn im Mittel etwa $v('') = 33''$ in 1 Minute beträgt, haben wir schon auf S. 288 erwähnt. Bei Sonne-Mond-Distanzen geht aber die Eigenbewegung der Sonne, welche in demselben Sinne wie diejenige des Mondes stattfindet, für die Distanzen wieder verloren; es vermindert sich also $v('')$ um $\frac{1}{12}$ seines Werthes, und wird $= 33'' - 2{,}8'' = 30{,}2''$. Die Durchzählung des Jahrgangs 1883 hat ergeben, dass die Proportional-Logarithmen der Sonne-Monddistanzen eine ziemlich gleichförmige (aber nicht mit der Distanz selbst gleichlaufende) monatliche Periode haben, und zwar im Mittel der Monate:

Maximum	$\log p = 0.346$	$v('') = 27{,}0''$
Minimum	$\log p = 0.245$	$v('') = 34{,}1''$
Mittel	$\log p = 0.296$	$v('') = 30{,}5''$

Die grösste Aenderung einer Fixsterndistanz im Jahre 1883 zeigt Aldebaran am 10. März mit Prop. Log. = 2003, und unter den Planetendistanzen zeigt Jupiter am 13. November das Minimum Prop. Log. = 1990, d. h. diese beiden gaben gemeinsam das Maximum 38″ Aenderung in 1 Minute. Bei raschen rückläufigen Planetenbewegungen können vielleicht noch grössere Distanzänderungen vorkommen. Die sehr grossen Prop. Logarithmen, also kleinen Distanzänderungen (bis herab zu 12″) des Jahr-

buchs treten auf bei Sternen, die weit von der Mondbahn abliegen, namentlich Fomalhaut, mit 30° südlicher Declination.

Es erhellt aus diesen bedeutenden Unterschieden der Distanzänderungen, dass es sich wohl lohnt, vor Beginn der Messungen zu überlegen, ob der Mond gerade in langsamer oder rascher Bewegung ist, und welche Distanzen zu gegebener Zeit die günstigsten sind (die kleinsten Prop. Log. haben). Später werden wir noch andere Umstände ähnlicher Art kennen lernen (§ 66.), von denen wir zum Voraus bemerken, dass man den Mond im Meridian vermeiden soll.

Die Mondhorizontal-Parallaxe, das wichtigste Element der Reductionsberechnung, schwankt zwischen ziemlich weiten Grenzen, nämlich zwischen 61′ 24″ und 53′ 56″, das Mittel ist = 57′ 40″, also die grösste Abweichung vom Mittel = 6 %. Die in die Reductionsrechnung eingehenden Höhendifferenzen des Mondes stellen wir, um einen Ueberblick ihres Verlaufes zu erhalten, in runden Zahlen in folgender Tabelle zusammen:

Scheinbare Höhe H	Refraction r	$\pi \cos (H - r) - r$		
		Maximum	Mittel	Minimum
0°	34,9′	26,5′	22,8′	19,0′
2	18,1	43,3	39,5	35,8
5	9,8	51,4	47,7	44,0
10	5,3	55,2	51,5	47,8
15	3,5	55,8	52,2	48,6
20°	2,6′	55,1′	51,6′	48,1′
25	2,0	53,7	50,3	46,9
30	1,7	51,5	48,3	45,0
35	1,3	49,0	45,9	42,9
40	1,1	46,0	43,1	40,2
45°	1,0	42,4′	39,8′	37,1′
60	0,5	30,2	28,3	26,5
75	0,2	15,8	14,8	13,8
90	0,0	0,0	0,0	0,0

Die Function $\pi \cos (H - r) - r$ hat ein sehr flaches Maximum mit geringer Aenderung zwischen 5° und 35°. In Hinsicht auf die Functionsgrösse ist hier der Werth von π selbst wichtiger als der Höhenwinkel H.

§ 64. Beispiel einer Monddistanz-Reduction.

In der Oase Dachel der libyschen Wüste machte ich am 9. Januar 1874, Vormittags, mit dem auf S. 157 gezeichneten Sextanten folgende 13 Distanzmessungen zwischen dem Mond und der Sonne. Der Mond stand rechts, die Sonne links, der Sextant musste daher verkehrt gehalten

werden. Der Mond wurde ohne Blendung, die Sonne mit dem stark rothen Glas [[1] S. 173] vor dem grossen Spiegel beobachtet.

Nummer	Chronometer 9. Januar 1874, Vormittag	Abgelesene Distanz	
1.	$8^h\ 57^m\ 52^s$	106° 18′ 0″	Lufttemperatur = 17° C. Barometerstand = 756 mm (1)
2.	8 59 2	106 17 30	
3.	8 59 50	106 16 40	
4.	9 3 10	106 14 30	
5.	9 5 55	106 13 20	
6.	9 7 30	106 12 50	
7.	9 8 23	106 12 0	
8.	9 9 3	106 12 0	
9.	9 9 58	106 11 40	
10.	9 10 41	106 12 0	
11.	9 11 42	106 11 0	
12.	9 12 28	106 10 0	
13.	9 13 15	106 10 20	
Mittel	$9^h\ 6^m\ 50^s$	106° 13′ 13″	

Aus 14 Einstellungen der Sonne mit Ocularblendung ergab sich die Indexcorrection = — 7′ 17″, hiezu kommt für die Distanzen noch der Einfluss der Blendung vor dem grossen Spiegel, nämlich nach S. 173 (Bestimmung von 1874), [1] = — 24″, ferner für Excentricität und Theilung, nach S. 214, — 36″ und endlich noch eine besondere Correction von — 7″ für den Mondort, welche, als nachträgliche Correction zu den Angaben des Nautical Almanac für 1874, von Greenwich mitgetheilt war, also zusammen:

$$\text{Correction} = -7'\,17'' \quad -24'' \quad -36'' \quad -7'' = -8'\,24'' \qquad (2)$$

bringt man dieses an dem Mittel der Messungen (1) an, so hat man:

$$\text{Chronometer} = 9^h\,6^m\,50^s \qquad \text{Distanz} = 106^0\,4'\,49'' \qquad (3)$$

oder für astronomische Zeitzählung (S. 16):

$$\text{8. Januar 1874:}\quad \text{Chronometer} = 21^h\,6^m\,50^s \qquad \text{Distanz} = 106^0\,4'\,49'' \qquad (3a)$$

Indem wir es vorerst unentschieden lassen, ob man so lange Reihen, wie die obige (1), schlechthin in arithmetische Mittel zusammenfassen, und dann wie eine Beobachtung weiter behandeln darf, führen wir die Reductionsberechnung für das Mittel (3) nun aus.

Da die Höhen nicht gemessen sind, brauchen wir zu deren Berechnung die Breite, die Ortszeit und die genäherte Länge. Die Breite wurde mit dem Theodolit von S. 38 durch Polarsternhöhen und Sonnenmittagshöhen gefunden, wie schon auf S. 136 angegeben ist, nämlich im Mittel:

$$\text{Dachel:}\quad \varphi = 25^0\,42'\,0'' \qquad (4)$$

die Ortszeit durch correspondirende Sonnenhöhen:

$$\text{Ortszeit} = \text{Chronometer} + 1^h\,0^m\,22^s \qquad (5)$$

Endlich die geographische Länge, theils aus älteren Karten, theils aus dem Itinerar, vorläufig genähert:

$$\lambda = 1^h\,56^m\,0^s \text{ östlich von Greenwich} \qquad (6)$$

Es folgt jetzt die Entnahme von Rectascension und Declination der beiden Gestirne aus dem Jahrbuch, und die Berechnung der Stundenwinkel. Man hat zuerst für den Mond mit allen Einzelheiten:

Chronometer 1874, 8. Januar		$21^h\ 6^m\ 50^s$	
Reduction auf Ortszeit nach (5)	+	$1^h\ 0^m\ 22^s$	
Mittlere Ortszeit t'		$22^h\ 7^m\ 12^s$	(7)
Genäherte Länge gegen Greenwich (6)	—	$1^h\ 56^m\ 0^s$	
Genäherte mittlere Greenwicher Zeit.		$20^h\ 11^m\ 12^s$	(8)

Damit geht man in den Nautical Almanac ein und entnimmt durch Interpolation zwischen die Angaben für 8. Januar 20^h und 8. Januar 21^h:

Rectascension des Mondes	$\alpha =$	$12^h\ 15^m\ 40^s$	(9)
Declination des Mondes	$\delta = +$	$1^\circ\ 49'\ 18''$	(10)

Mit der Ortszeit (7) rechnet man weiter nach S. 21—22:

Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag, 8. Januar. . .		$19^h\ 11^m\ 28^s$	
($\Delta\lambda$) für $\lambda = 1^h\ 56^m$ nach der Hülfstafel S. [4] I.	—	19^s	
		$19^h\ 11^m\ 9^s$	
Mittlere Ortszeit nach (7)		$22^h\ 7^m\ 12^s$	
Zur Verwandlung in Sternzeit nach S. [4] I.	+	$3^m\ 38^s$	
Ortssternzeit =.		$41^h\ 21^m\ 59^s$	
Oder mit Abzug von 24^h Sternzeit = ...		$17^h\ 21^m\ 59^s$	(11)
Die Rectascension (9) abgezogen	—	$12^h\ 15^m\ 40^s$	
Stundenwinkel des Mondes t = ...		$5^h\ 6^m\ 19^s$	
Oder in Bogen verwandelt nach S. [2] t = ...		$76^\circ\ 34'\ 45''$	
	$\frac{t}{2} =$	$38^\circ\ 17'\ 22''$	(12)

Dieselbe Rechnung macht man auch für das zweite Gestirn, doch kann man, wenn, wie in unserem Fall, dieses zweite Gestirn die Sonne ist, den Stundenwinkel auch mittelst der Zeitgleichung bestimmen, dieselbe findet sich für die Greenwicher Zeit (8) $g = +\ 7^m\ 22^s$, und subtrahirt man dieses von der mittleren Ortszeit (7), so bekommt man die wahre Ortszeit oder den Stundenwinkel der Sonne, nämlich:

$$\text{Sonne } t = 21^h\,59^m\,50^s = 329^\circ\,57'\,30'' \qquad \frac{t}{2} = 164^\circ\,58'\,45'' \qquad (13)$$

Hiezu auch die Declination der Sonne

$$\delta = -\ 22^\circ\,6'\,52'' \qquad (14)$$

Nun folgt nach dem Muster von § 4. S. 13 die Berechnung der Höhen und Azimute beider Gestirne, nur auf 1′ genau. In unserem Fall hat man für den Mond gegeben (4), (10), (12) und für die Sonne (4), (14) und (13), die Resultate sind:

	Mond	Sonne	
Wahre Höhen	$H = 12^0\ 52'$	$h = 34^0\ 1'$	(15)
Azimute	$a = 85^0\ 46'$	$a_s = 325^0\ 58'$	(16)

$$Z = a - a_s = (360^0 + 85^0\ 46') - 325^0\ 58' = 119^0\ 48' \qquad (17)$$

Diese Höhen und Azimute werden in dem Schema von S. 319 an ihren Stellen unter (*b*), (*a*) und (*e*) eingetragen.

Dieses Schema S. 319 enthält die ganze Monddistanz-Reductions-Berechnung, welche wir nun in ihren einzelnen Theilen verfolgen.

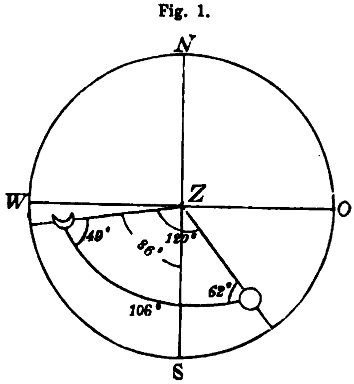
Mit den bei (15), (16) und (17) angegebenen Höhen und Azimuten zeichnet man zuerst die Figur 1. (s. unten) in nahezu richtigen Verhältnissen.

Nun entnehmen wir vollends alle aus dem Nautical Almanac nöthigen Zahlenwerthe und setzen sie auf S. 319 an die mit * bezeichneten Stellen, nämlich vom Nautical Almanac 1874, S. 4 die Mondparallaxe $\pi = 54'\ 12''$ und den Mondhalbmesser 14′ 47″, vom Nautical Almanac 1874, S. 2 den Sonnenhalbmesser 16′ 18″, zugleich auch vom Nautical Almanac S. 15 die nächst vorhergehende Nautical Almanac-Distanz für XVIII[h] 107° 3′ 13″ mit dem Proportional-Logarithmus 0.3483.

Die Berechnung von S. 319 beginnt oben bei (*a*) mit der Höhenparallaxe p des Mondes nach S. [19].

Mit vorläufiger Uebergehung von (*c*) und (*d*) kommt dann in (*e*) die Einsetzung der Refractionen aus den Tafeln S. [5]—[13], die Zufügung der Höhenparallaxen, und damit die Berechnung der Höhendifferenzen $\varDelta H$ und $\varDelta h$ nach (2) und (3) § 59. S. 289.

Fig. 1.



Indem man die bei (*e*) auftretenden scheinbaren Höhen 12° 3′ und 24° 2′ nach (*b*) hinauf an ihre Stellen setzt, hat man dort nun alles ausgefüllt bis auf die Spalte mit den Distanzen D, D' und D_0. Um diese vorerst auf etwa 1′ genau zu erhalten, muss man die Berechnungen (*f*) vorläufig ausfüllen, womit $D' = 106^0\ 36'$ in (*b*) eingesetzt werden kann. Um auch die wahre Distanz D vorläufig auf 1′ genau zu erhalten, muss man entweder die Berechnung (*c*) vorläufig machen oder die Berechnung (*h*) mit einer vorläufig angenommenen Länge λ rückwärts ausführen bis zum Werthe 106° 4′, den man als D nach (*b*) hinaufsetzt.

Reduction einer Monddistanz.

Oase Dachel. 9. Januar 1874, Vormittag. $\varphi = 25^0\ 42'$.

(a)

Hor. Parallaxe des Mondes* π =	54′ 12″ = 3252″	$\log \pi$	3.51215
Wahre Höhe des Mondes H = .	12° 52′	$\log \cos H''$ . . .	9.99040
Correction S. [19] I. — p_0 = —	53′	Correct. S. [19] II.	9.99973
H' = ...	11° 59′	$\log p$	3.50228
Correction S. [19] III. . . . . +	1′	p = ...	3179″
H'' = ...	12′ 0″	p = ...	52′ 59″

(b)

	Distanz	Mondhöhe	Sonnenhöhe		
wahr D	106° 4′	12° 52′	34° 1′	Azimut-Mond	85° 46′
scheinbar D'	106° 36′	12° 3′	34° 2′	Azimut-Sonne	325° 58′
Mittel D_0 =	106° 20′	H_0 = 12° 28′	h_0 = 34° 2′	Zenitwinkel Z =	119° 48′

(c)

$\log \sin Z$	9.93840		$\log \sin Z$ . . .	9.93840	
Erg. $\log \sin D_0$.	0.01781		Erg. $\log \sin D_0$	0.01781	
$\log \cos h_0$	9.91840		$\log \cos H_0$ . .	9.98964	
$\log \sin M$	9.87461	M = 48° 31′	$\log \sin S$ . . .	9.94585	S = 51° 59′
$\log \cos M$	9.82112		$\log \cos S$ . . .	9.67161	
$\log \Delta H$	3.46538		$\log \Delta h$	1.88081_n	
$\log \Delta H \cos M$ . .	3.28650		$\log \Delta h \cos S$.	1.55266_n	

(d) $m = +\ 1934'' = +\ 32'\ 14''$, $s = -\ 36$, $(m + s = +\ 31'\ 38'')$

(e)

	Mond		Sonne	
Wahre Höhen		12° 52′ 0″		34° 1′ 0″
Höhenparallaxen (s. o. (a) u. S. [7])		— 52′ 59″		— 8″
Wahre Höhen für Refraction. .		11° 59′ 1″		34° 0′ 52″
Mittlere Refraction S. [13]. . .	4′ 24″		1′ 25″	
Correction für 17° S. [9] . . .	— 7″	+ 4′ 19″	— 2″	+ 1′ 24″
Correction für 756 mm S. [11] .	+ 2″		+ 1″	
Scheinbare Höhen		12° 3′ 20″		34° 2′ 16″
Höhendifferenzen		ΔH = + 48′ 40″		Δh = — 1′ 16″
		= + 2920″		= — 76″

(f)

Gemessene Randdistanz . . .	106° 13′ 13″		
Indexcorrection etc. — . . .	8′ 24″		
Scheinbare Randdistanz . . .	106° 4′ 49″		
Mondhalbmesser* . . 14′ 47″			
Correction S. [18] I. + 3″		+ 14′ 48″	
Correction S. [18] II. — 2″			
Sonnenhalbmesser* . 16′ 18″		+ 16′ 18″	
Correction S. [18] II. — 0″			

Zusammenfassung

+	—
	8′ 24″
14′ 48″	
16′ 18″	
	31′ 38″
	6″
+ 31′ 6″	— 40′ 8″

$y = -\ 9'\ 2''$

(g)

Mittelpunktsdistanz D' = . .	106° 35′ 55″
S. oben bei (d): — $(m + s)$ =	— 31′ 38″
	106° 4′ 17″
Correct. f. Seitenparallaxe S. [20]	— 6″
Reducirte Distanz D = . . .	106° 4′ 11″

(h)

Nächst vorhergehende Nautical Almanac-Distanz* .	107° 3′ 13″	für XVIII^h Prop. Log.*	0.34830
ΔD	0° 59′ 2″ = 3542″	$\log \Delta D$ . .	3.54925
		$\log \Delta T$ . .	3.89755
ΔT = 7899 = ...	2^h 11^m 39^s		
Correct. f. zweite Diff. nach S. 307	0^s		
Gr.-Zeit = XVIII + ΔT =	20^h 11^m 39^s	. . . .	20^h 11^m 39^s
Mittlere Ortszeit (7) S. 317 . .	22^h 7^m 12^s	Chronometer	21^h 6^m 50^s
Länge östl. von Greenw., λ =	1^h 55^m 33^s	Gr.-Zeit — Chron. =	— 0^h 55^m 11^s

(Fortsetzung von S. 318.)

Zur Controlle kann man auch aus den Tafeln [22] und [23] die Differenz $D - D'$ näherungsweise nachsehen.

Nun folgt die Berechnungsgruppe (*c*) nach den Formeln (21) und (15) § 59. S. 291—292 mit dem Resultat (*d*).

Bei (*c*) hat man als Nebenresultat auch die Winkel M und S erhalten, und kann damit die Halbmesser-Correctionen für Refraction bei (*f*), welche bei der ersten vorläufigen Durchrechnung noch übergangen wurden, nach S. [18] II. endgültig einsetzen, worauf auch die übrige Berechnung (*g*) und (*h*) keine Schwierigkeit mehr bietet.

So umständlich auch diese Rechnung nach dem Schema S. 319 auf den ersten Blick zu sein scheint, so ist sie doch, sobald man einmal den Gang im Kopfe hat, und sich eines autographirten Schemas bedient, sehr kurz und übersichtlich; die verschiedenen indirecten Rechnungen treten in einem solchen Schema gar nicht besonders auf, denn man schreibt nur einmal definitiv (mit Tinte) und füllt, so lange ein Werth erst genähert bekannt ist, seine Spalte vorläufig (mit Blei) aus. Die Rechnung entsteht also nicht in der Aufeinanderfolge des Schemas, wie wir schon in der Anleitung S. 318 angegeben haben.

Reduction der Einzeldistanzen. Die in dem bisher behandelten Beispiel vorgenommene Zusammenfassung einer grossen Gruppe von Messungen (13) in ein arithmetisches Mittel gibt wohl rasch ein Schlussresultat, es ist aber, namentlich bei kleinen Höhen, nicht unbedenklich, die hiebei nöthige Annahme zu machen, dass die Reduction proportional der Zeit verläuft. Auch lässt man sich bei solcher Zusammenfassung die Genauigkeitsprobe entgehen, welche in der Vergleichung verschiedener Reductionsberechnungen liegt.

Besser als ein Gruppenmittel sind mehrere Gruppen von je 2—4 Einzelmessungen.

Man kann aber auch, ohne viel mehr Reductionsarbeit als bei der Bildung von solchen Partialmitteln, alle einzelnen Distanzen reduciren, indem man so verfährt: Man wählt für jede grosse Gruppe 3—4 Zeiten aus, z. B. in gleichen Intervallen, ohne dass gerade auf diese Zeiten auch Messungen fallen. Man betrachtet nun nicht die reducirte Distanz selbst, sondern die Reductionsdifferenz als Ziel der Reductionsrechnung, wozu ja eine beiläufige Distanz (auf 1') genügt. Hat man dann durch 3—4 solcher Rechnungen die Reduction als Function der Zeit dargestellt, so kann man die Reduction für jede Zwischenzeit angeben und folglich jede einzelne Distanz reduciren.

Für das vorgelegte Beispiel (S. 319) von der Oase Dachel, nebst einer zweiten nach einer Pause von sechs Minuten darauf folgenden Gruppe, sind folgende Reductionen (einschliesslich Index, Blendung etc. nach der Zusammenfassung bei (*f*) auf S. 319) berechnet worden, deren Vertheilung eine durch den allmäligen Gang der Rechnung erzeugte ungleichförmige ist.

Nummer	Chronometer	Δt	Reduction y	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta t}$
1.	9h 0m 0s		— 9′ 2″		
		3m 5s = 3,08m		— 1″	— 0,3″
2.	9 3 5		— 9 3		
		3 45 = 3,75		+ 1	+ 0,3
3.	9 6 50		— 9 2		
		4 23 = 4,38		+ 3	+ 0,7
4.	9 11 13		— 8 59		
		11 5 = 11,08		+ 23	+ 2,1
5.	9 22 18		— 8 36		
		3 9 = 3,15		+ 11	+ 3,5
6.	9 25 27		— 8 25		
		3 10 = 3,17		+ 14	+ 4,4
7.	9 28 37		— 8 11		
		1 23 = 1,38		+ 7	+ 5,1
8.	9 30 0		— 8 4		

(19)

Der Verlauf der Differenzen oder besser noch eine graphische Darstellung der Function y, zeigt, dass keine unregelmässigen Fehler in der Rechnung sind, sie zeigt aber auch, dass im Verlauf der halben Stunde die Reductionen sich nichts weniger als gleichförmig ändern (die Mondhöhe fiel von 14° auf 7°, die Sonnenhöhe stieg von 33° auf 37°), die Curve der y hat in der Mitte eine Pfeilhöhe von 20″. Innerhalb 10 Minuten darf man wohl Alles proportional rechnen, denn hier würde die Pfeilhöhe nur $\frac{20''}{3^2} = 2''$, was nach (10) § 15. S. 69—70 ganz unschädlich wäre.

Die Einzelheiten der Reduction sämmtlicher 13 Distanzen der Gruppe (1) S. 316, welche auf die erste Hälfte von (19) fallen, brauchen wir nun nicht weiter vorzuführen, zumal in dieser ersten Hälfte von (19) die Reduction fast constant bleibt (zwischen 9′ 2″ und 8′ 59″, im übrigen haben wir die Einzelreductionen stets graphisch aus der Curve der y bestimmt). Nachdem dann noch für jede so reducirte Distanz mit Benützung des Proportional-Logarithmus die Greenwichzeit berechnet ist, hat man folgende Einzelresultate nebst Mittelbildung und Genauigkeitsberechnung.

Nummer	Greenwichzeit — Chronometer	v	v^2
1.	— 0h 56m 31s	+ 79	6241
2.	56 54	+ 102	10404
3.	55 51	+ 39	1521
4.	54 22	— 50	2500
5.	54 29	— 43	1849
6.	54 58	— 14	196
7.	54 1	— 71	5041
8.	54 43	— 29	841
9.	54 55	— 17	289
10.	56 24	+ 72	5184
11.	55 16	+ 4	16
12.	53 50	— 82	6724
13.	55 24	+ 12	144
Mittel	— 0h 55m 12s		40950

Mittlerer Fehler einer Bestimmung $\mu = \sqrt{\frac{40950}{12}} = \pm 58^s$ (20)

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels $\mu' = \frac{\mu_1}{\sqrt{13}} = \pm 16^s$

Also Gesammtresultat:

Greenwichzeit = Chronometer — $0^h\ 55^m\ 12^s \pm 16^s$ (21)

(vorbehältlich Berücksichtigung constanter Fehler).

§ 65. Weitere Entwicklung der Distanz-Reductionsformel.

Die Distanz-Reductionsformel (14) oder (16) § 59. S. 291 wurde dort nur bis auf Glieder der ersten Potenz von $\varDelta H$ oder $\varDelta h$ entwickelt, und die Einführung von Mittelwerthen M_0 und S_0 in (18) S. 292 wurde dort zwar plausibel gemacht, aber nicht mathematisch streng begründet.

Wir werden nun die Entwicklung von S. 292 fortsetzen zu zwei Zwecken:

1) Es soll die Einführung der Mittelwerthe M_0 und S_0 mathematisch begründet werden.

2) Es soll der nach Einführung der Mittelwerthe der Formel noch anhaftende Fehler bestimmt werden.

Hiezu brauchen wir den Taylor'schen Satz für zwei Veränderliche, welcher mit den üblichen Bezeichnungen bis zur dritten Potenz lautet:

$$\left.\begin{aligned} f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) &= f(x,y) + \varDelta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \varDelta y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varDelta x^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2\varDelta x \varDelta y \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \varDelta y^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(\varDelta x^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} + 3\varDelta x^2 \varDelta y \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial^2 x \partial y}\right. \\ &\left. + 3\varDelta x \varDelta y^2 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} + \varDelta y^3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right) \end{aligned}\right\} (1)$$

Wir wenden diesen Satz an auf die Function:

$$\cos D = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos Z \tag{2}$$

und erhalten:

$$\frac{\partial \cos D}{\partial H} = \cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial \cos D}{\partial h} = \sin H \cos h - \cos H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} = -\sin H \sin h - \cos H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H \partial h} = \cos H \cos h + \sin H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2} = -\sin H \sin h - \cos H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} = -\cos H \sin h + \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial^3 H \, \partial h} = -\sin H \cos h + \cos H \sin h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \, \partial h^2} - \cos H \sin h + \sin H \cos h \cos Z$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3} = -\sin H \cos h + \cos H \sin h \cos Z$$

Nach (11) und (12) § 59. S. 291 bestehen die zwei Gleichungen:

$$\cos H \sin h - \sin H \cos h \cos Z = \sin D \cos M \qquad (3)$$

$$\sin H \cos h - \cos H \sin h \cos Z = \sin D \cos S \qquad (4)$$

Ferner setzen wir:

$$\left.\begin{array}{r}\cos H \cos h + \sin H \sin h \cos Z \\ = \cos (d)\end{array}\right\} (5)$$

wo (d) die Bedeutung einer Distanz hat, welche zu Z und den Complementen $90^0 - H$, $90^0 - h$ als Höhen gehört, wie in Fig. 1. angedeutet ist.

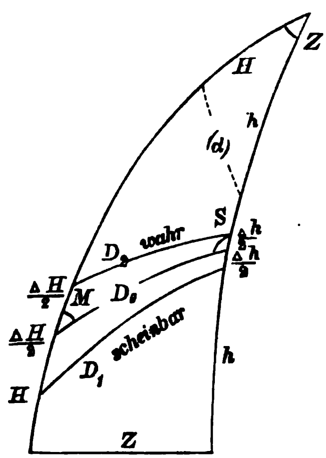
Benützt man ausser (3), (4) und (5) auch die ursprüngliche Gleichung (2), so kann man alle oben angegebenen 9 Differentialquotienten bequem umformen:

Fig. 1. Monddistanzreduction.

$$D_1 - D_2 = \varDelta$$

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = D$$

$$D - D_0 = x$$



$$\varDelta H \cos M = m \qquad \varDelta h \cos S = s$$

$$\varDelta H \sin M = m' \qquad \varDelta h \sin S = s'$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \cos D}{\partial H} = \sin D \cos M \\[2ex] \dfrac{\partial \cos D}{\partial h} = \sin D \cos S\end{array}\right\} (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} = -\cos D \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2} = -\cos D\end{array}\right\} (7)$$

$$\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H \, \partial h} = \cos (d) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} = -\sin D \cos M \qquad \frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3} = -\sin D \cos S \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2 \, \partial h} = -\sin D \cos S \qquad \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \, \partial h^2} = -\sin D \cos M \qquad (10)$$

Nun wird die Reihe (1) auf die Function (2) angewendet, und zwar nach Fig. 1. auf den Uebergang von D_0 auf D_2:

21*

$$\left.\begin{aligned} \cos D_2 = \cos D_0 + \frac{\Delta H}{2}\frac{\partial \cos D}{\partial H} + \frac{\Delta h}{2}\frac{\partial \cos d}{\partial h} \\ + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\Delta H}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} + 2\,\frac{\Delta H}{2}\,\frac{\Delta h}{2}\,\frac{\partial^2 \cos H}{\partial h\,\partial H} + \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2}\right. \\ + \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\Delta H}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} + 3\left(\frac{\Delta H}{2}\right)^2 \frac{\Delta h}{2}\,\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2 \partial h}\right. \\ \left. + 3\,\frac{\Delta H}{2}\left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \partial h^2} + \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3}\right) \end{aligned}\right\}(11)$$

Wenn man ebenso auch den Uebergang von D_0 nach D_1 behandelt, so bekommt man dieselben Coefficienten wie in (11), jedoch entsteht bei den Gliedern der ersten und der dritten Ordnung ein Zeichenwechsel, d. h.:

$$\cos D_1 = \cos D_0 - \frac{\Delta H}{2}\ldots \quad - \frac{\Delta h}{2}\ldots \quad + \frac{1}{2}(\ldots \quad) \quad - \frac{1}{6}(\ldots \quad) \quad (12)$$

und wenn man jetzt aus (11) und (12) die Differenz und das Mittel bildet, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \cos D_2 - \cos D_1 = \Delta H\,\frac{\partial \cos D}{\partial H} + \Delta h\,\frac{\partial \cos D}{\partial h} \\ + \frac{\Delta H^3}{24}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^3} + \frac{\Delta H^2\,\Delta h}{8}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H^2 \partial h} + \frac{\Delta H \Delta h^2}{8}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial H \partial h^2} + \frac{\Delta h^3}{24}\frac{\partial^3 \cos D}{\partial h^3} \end{aligned}\right\}(13)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D_0 + \frac{\Delta H^2}{8}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H^2} + \frac{\Delta H \Delta h}{4}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial H \partial h} \\ + \frac{\Delta h^2}{8}\frac{\partial^2 \cos D}{\partial h^2} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Wenn man hier die Ableitungen (6) bis (10) einsetzt, und zwar mit dem Ausgangswerth D_0 an Stelle des allgemeinen D, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \cos D_2 - \cos D_1 = \sin D_0\,(\Delta H \cos M + \Delta h \cos S) \\ - \sin D_0\left(\frac{\Delta H^3}{24}\cos M + \frac{\Delta H^2 \Delta h}{8}\cos S\right. \\ \left. + \frac{\Delta H \Delta h^2}{8}\cos M + \frac{\Delta h^3}{24}\cos S\right) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D_0 - \left(\frac{\Delta H^2}{8} + \frac{\Delta h^2}{8}\right)\cos D_0 + \frac{\Delta H \Delta h}{4}\cos (d) \quad (16)$$

Um von $\cos D$ auf D selbst zu kommen, muss auch $\cos D$ entwickelt werden. Wir setzen hiezu:

$$D_1 - D_2 = \Delta \quad (17)$$

und

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = D \quad (18)$$

wo das arithmetische Mittel D zwar sehr nahe mit D_0 von Fig. 1. übereinstimmt, aber innerhalb der Genauigkeit dritter Ordnung nicht mit D_0 verwechselt werden darf. Mit diesen Bezeichnungen ist:

$$D_1 = D + \frac{\varDelta}{2}$$

$$\cos D_1 = \cos D - \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{1}{2}\left(\frac{\varDelta}{2}\right)^2 \cos D + \frac{1}{6}\left(\frac{\varDelta}{2}\right)^3 \sin D$$

$$\cos D_1 = \cos D - \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D + \frac{\varDelta^3}{48} \sin D$$

ebenso

$$\cos D_2 = \cos D + \frac{\varDelta}{2} \sin D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D - \frac{\varDelta^3}{48} \sin D$$

$$\cos D_2 - \cos D_1 = \sin D \left(\varDelta - \frac{\varDelta^3}{24}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\cos D_2 + \cos D_1}{2} = \cos D - \frac{\varDelta^2}{8} \cos D \tag{20}$$

(15) und (19) werden verglichen und geben:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} = \frac{\sin D_0}{\sin D} \Big(& \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S - \frac{\varDelta H^3}{24} \cos M \\ & - \frac{\varDelta H^2 \varDelta h}{8} \cos S - \frac{\varDelta H \varDelta h^2}{8} \cos M - \frac{\varDelta h^3}{24} \cos S \Big) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ebenso werden auch (16) und (20) verglichen:

$$\cos D \left(1 - \frac{\varDelta^2}{8}\right) = \cos D_0 \left(1 - \frac{\varDelta H^2 + \varDelta h^2}{8} + \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D_0}\right) \tag{22}$$

In erster Näherung ist nach (21):

$$\varDelta = \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S \tag{23}$$

was mit dem früheren (14) § 59. S. 291 übereinstimmt, also:

$$\varDelta^2 = \varDelta H^2 \cos^2 M + 2 \varDelta H \varDelta h \cos M \cos S + \varDelta h^2 \cos^2 S \tag{24}$$

Dieses in (22) gesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 - \frac{\varDelta H^2}{8} - \frac{\varDelta h^2}{8} + \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \frac{\cos (d)}{\cos D_0} \\ + \frac{\varDelta H^2}{8} \cos^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \cos^2 S + \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \cos M \cos S \end{aligned}$$

$$\frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 - \frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M - \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S + \frac{\varDelta H \varDelta h}{4} \left(\frac{\cos (d)}{\cos D_0} + \cos M \cos S\right) \tag{25}$$

Zur Vorbereitung von (21) gehen wir von dem Cosinusquotienten in (25) zum Sinusquotienten über, und setzen zunächst:

$$D = D_0 + x \tag{26}$$

$$\cos D = \cos D_0 - x \sin D_0, \qquad \sin D = \sin D_0 + x \cos D_0$$

$$\frac{\cos D}{\cos D_0} = 1 - x \operatorname{tang} D_0 \qquad \frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + x \operatorname{cotg} D_0$$

$$x = \left(1 - \frac{\cos D}{\cos D_0}\right) \cot g\, D_0 \tag{27}$$

$$\frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + \left(1 - \frac{\cos D}{\cos D_0}\right) \cot g^2 D_0 \tag{28}$$

also nach (25):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin D}{\sin D_0} = 1 + \Big\{&\frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S \\ &- \frac{\varDelta H \varDelta h}{4}\left(\frac{\cos (d)}{\cos D_0} + \cos M \cos S\right)\Big\} \cot g^2 D_0\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Es empfiehlt sich nun, Abkürzungen einzuführen:

$$\varDelta H \cos M = m \qquad \varDelta h \cos S = s \tag{30}$$

$$\varDelta H \sin M = m' \qquad \varDelta h \sin S = s' \tag{31}$$

auch ist in den höheren Gliedern D und D_0 nicht mehr zu unterscheiden. Damit werden (21) und (29):

$$\varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} = \frac{\sin D_0}{\sin D}\left(m + s - \frac{\varDelta H^2}{24}(m + 3s) - \frac{\varDelta h^2}{24}(s + 3m)\right)$$

$$\frac{\sin D_0}{\sin D} = 1 - \left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{ms}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4}\frac{\cos(d)}{\cos D}\right) \cot g^2 D$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen zusammen, bis zur dritten Potenz einschliesslich genau:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta - \frac{\varDelta^3}{24} &= m + s - \frac{\varDelta H^2}{24}(m + 3s) - \frac{\varDelta h^2}{24}(s + 3m) \\ &- (m + s)\left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{ms}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4}\frac{\cos(d)}{\cos D}\right) \cot g^2 D\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Das Glied $\varDelta^3$ links wird nach rechts hinüber gebracht in der Form

$$\varDelta^3 = (m + s)^3 = m^3 + 3m^2 s + 3ms^2 + s^3 \tag{33}$$

$$\frac{\varDelta^3}{24} = \frac{m^2}{24}(m + 3s) + \frac{s^2}{24}(s + 3m)$$

Indem man dieses mit der ersten Linie von (32) zusammen nimmt, und nach (30) und (31) berücksichtigt, dass

$$\varDelta H^2 - m^2 = m'^2 \qquad \text{sowie} \qquad \varDelta h^2 - s^2 = s'^2$$

hat man:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta = m + s &- \frac{m'^2}{24}(m + 3s) - \frac{s'^2}{24}(3m + s) \\ &- (m + s)\left(\frac{m'^2}{8} + \frac{s'^2}{8} - \frac{ms}{4} - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4}\frac{\cos(d)}{\cos D}\right) \cot g^2 D\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

oder in anderer Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta = m + s - \frac{1 + 2\cos^2 D}{24 \sin^2 D}(m m'^2 + s s'^2) \\ + \frac{1}{8 \sin^2 D}\Big(- m'^2 s - m s'^2 + 2 m s (m + s) \cos^2 D \\ + 2 (m + s) \varDelta H \varDelta h \cos (d) \cos D\Big)\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Glieder dritter Ordnung, welche in (34) und (35) auf $m + s$ folgen, stellen den Fehler der nach der gewöhnlichen Mittelhöhenformel (23) reducirten Distanz vor.

Für gelegentliche Controllrechnung stellen wir auch die Formel für die Differenz x zwischen dem Mittel der Distanzen und der Mitteldistanz nach (27) und (25) auf:

$$\left.\begin{aligned}D - D_0 = x = \cot g D \Big(\frac{\varDelta H^2}{8} \sin^2 M + \frac{\varDelta h^2}{8} \sin^2 S \\ - \frac{\varDelta H \varDelta h}{4}\Big(\frac{\cos (d)}{\cos D} + \cos M \cos S\Big)\Big)\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

oder mit den Abkürzungen (30) und (31):

$$x = \frac{\cot g D}{8}\left(m'^2 + s'^2 - 2 m s - 2 \varDelta H \varDelta h \frac{\cos (d)}{\cos D}\right) \quad (37)$$

Dieses kann man auch wieder in (34) einsetzen, und hat damit:

$$\varDelta = m + s - \frac{m'^2}{24}(m + 3 s) - \frac{s'^2}{24}(3 m + s) - (m + s)\, x \cot g D \quad (38)$$

Zu einem Zahlenbeispiel wählen wir die Verhältnisse so, dass die Glieder höherer Ordnung möglichst gross werden, nämlich:

	Mond	Stern oder Sonne
Scheinbare Höhen	$H_1 = 10^0\ 0'$	$h_1 = 1^0\ 0'$
Wahre Höhen	$H_2 = 10^0\ 54'$	$h_2 = 0^0\ 36'$
Differenzen	$\varDelta H = +54'$	$\varDelta h = -24'$
Mittlere Höhen	$H_0 = 10^0\ 27'$	$h_0 = 0^0\ 48'$

(39)

Die scheinbare Distanz sei:

$$D_1 = 15^0\ 0' \quad (40)$$

Damit berechnet man den Zenitwinkel Z:

$$\cos Z = \frac{\cos D_1 - \sin H_1 \sin h_1}{\cos H_1 \cos h_1} \qquad Z = 12^0\ 4'\ 6{,}54'' \quad (41)$$

Damit, nebst den unter (39) gegebenen Höhen, findet man auch die übrigen Distanzen:

$$D_2 = 15^0\ 48'\ 26{,}22'' \qquad D_0 = 15^0\ 23'\ 43{,}04'' \quad (42)$$

Ferner:

$$M = 128^0\ 2'\ 54'' \qquad S = 50^0\ 45'\ 36'' \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \varDelta H \cos M = -\ 1996{,}90'' = -\ 33'\ 16{,}90'' \\ s &= \varDelta h \cos S \ \ = -\ \ 910{,}90'' = -\ 15'\ 10{,}90'' \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$m + s = -\ 2907{,}80'' = -\ 48'\ 27{,}80'' \tag{45}$$

Alles dieses ist streng sphärisch berechnet. Nun bildet man folgende Vergleichung:

$$\begin{aligned} &\text{Scheinbare Distanz } D_1 = 15^0\ 0'\ 0'' \qquad && \frac{D_1 + D_2}{2} = D = 15^0\ 24'\ 13{,}11'' \\ &\text{Wahre Distanz } D_2 = 15^0\ 48'\ 26{,}22'' && \qquad\qquad D_0 = 15^0\ 23'\ 43{,}04'' \\ & && \text{Differenz } D - D_0 = x = +\ \ 30{,}07'' \end{aligned} \tag{46}$$

Andererseits findet man nach (37):

$$x = +\ 14{,}33'' + 2{,}74'' - 8{,}01'' + 21{,}00'' = +\ 30{,}06'' \tag{47}$$

was mit (46) genügend stimmt. Diesen Werth x kann man in (38) setzen oder auch unmittelbar die Formel (35) anwenden.

In beiden Fällen erhält man:

$$D_1 - D_2 = \varDelta = -\ 48'\ 27{,}80'' + 1{,}58'' = -\ 48'\ 26{,}22'' \tag{48}$$

was mit der Vergleichung von (40) und (42) vollständig stimmt.

Die Glieder dritter Ordnung oder der Fehler, den man begeht, wenn man schlechthin nach der Mittelhöhenformel (23)

$$\varDelta = \varDelta H \cos M + \varDelta h \cos S$$

rechnet, betragen also in diesem Falle nach (48) immerhin $1{,}58''$ oder rund $2''$, indessen ist dieser Betrag ein ausnahmsweise hoher, der Fehler wird im Allgemeinen $1''$ nicht überschreiten.

Betrachten wir, um dieses zu untersuchen, die Gleichung (35) näher, so fällt zuerst auf, dass die Correctionsglieder sämmtlich $\sin^2 D$ im Nenner haben, d. h. die einfache Formel (23) ist ganz unzulässig, wenn die Distanz nahezu $= 0^0$ oder nahezu $= 180^0$ wird.

Um den Grössenbetrag der Correction summarisch zu schätzen, kann man zunächst das Hauptglied $m m'^2$ von (35) ins Auge fassen, denn wegen der grossen Mondparallaxe sind die Glieder m und m' (vgl. (30) und (31)) im Allgemeinen erheblich grösser als die Glieder s und s'.

Wir nehmen also nach (35) die Function in Betracht:

$$f = \frac{1 + 2 \cos^2 D}{24 \sin^2 D}\, m m'^2 \text{ wo } m m'^2 = \varDelta H^3 \cos M \sin^2 M \tag{49}$$

$M = 0^0$ und $M = 90^0$ macht diese Function $= 0$ und durch Differentiiren findet man, dass $\cos M \sin^2 M$ sein Maximum erreicht mit $M = 54^0\ 44'$ oder $M = 125^0\ 16'$, und zwar ist dann $\cos M \sin^2 M = 0{,}385$, also:

$$f_{\max} = 0{,}385\ \frac{1 + 2 \cos^2 D}{24 \sin^2 D}\ \frac{\varDelta H^3}{\varrho^2} \tag{50}$$

Der Maximalwerth von ΔH ist nach S. 315 rund $= 55' = 3300''$, und setzt man dieses nebst $\varrho = 206\,265''$ ein, so erhält man:

$$f_{max} = 0{,}01355'' \frac{1 + 2\cos^2 D}{\sin^2 D}$$

Hiernach wird berechnet:

$$\left.\begin{array}{ll} D = 1^0 & f_{max} = 133'' \\ 2 & \phantom{f_{max} = 1}33 \\ 5 & \phantom{f_{max} = 13}5 \\ 10 & \phantom{f_{max} = 1}1{,}3 \\ 15 & \phantom{f_{max} = 1}0{,}6 \\ 20 & \phantom{f_{max} = 1}0{,}3 \end{array}\right\} \qquad (51)$$

Wenn man die Annahme macht, dass die Distanz D klein ist, so dass $\cos D = 1$ gesetzt werden kann, dann vereinfacht sich die Formel (35) noch sehr erheblich. Wir wollen $\Delta = m + s + \Delta''$ setzen, dann ist nach (35) mit $\cos D = 1$ und auch $\cos(d) = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta'' = -\dfrac{1}{8\sin^2 D}(mm'^2 + ss'^2 + m'^2 s + ms'^2 - 2m^2 s - 2ms^2 \\ + 2m\,\Delta H\Delta h + 2s\,\Delta H\Delta h) \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Nachdem man aber $\cos D = 1$ gesetzt hat, ist es ebenso erlaubt zu setzen:

$$S = 180^0 - M \qquad \cos S = -\cos M \qquad \sin S = \sin M$$

Folglich nach (30) und (31):

$$\begin{array}{ll} m = \Delta H \cos M & s = -\Delta h \cos M \\ m' = \Delta H \sin M & s' = \Delta h \sin M \end{array}$$

und wenn man dieses in (52) setzt, so findet man erhebliche Vereinfachung und Zusammenziehung, aus welcher schliesslich hervorgeht:

$$\Delta'' = -\frac{\cos M \sin^2 M}{8 \sin^2 D} \frac{(\Delta H - \Delta h)^3}{\varrho^2} \qquad (53)$$

Dieses ist eine ganz gute Näherungsformel zur Schätzung des Fehlers, welcher bei der gewöhnlichen Mittelhöhenrechnung nach (23) begangen wird. Wir erproben die Formel (53) an dem Zahlenbeispiel (39) bis (48), nämlich:

$$M = 128^0\ 3',\quad 180^0 - S = 129^0\ 14', \text{ also jetzt im Mittel } M = 128^0\ 38'$$
$$D = 15^0\ 24',\quad \Delta H - \Delta h = 54' - (-24') = 78' = 4680''$$

Dieses in (53) eingesetzt gibt:

$$\Delta'' = +1{,}6''$$

was in der That mit dem zweiten Gliede von (48) stimmt.

Die Formel (53) führt mit $\Delta h = 0$ im Wesentlichen wieder auf die Function f in (49) zurück, wenn dort $\cos D = 1$ gesetzt wird, und da das nur von Refraction herrührende Δh in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle das von der Mondparallaxe abhängige ΔH nicht erheblich vergrössert, so kann man die kleine Tabelle (51) wohl als Fehler-

maass für die gewöhnliche Distanz-Reductionsberechnung mit Mittelhöhen nach der Formel (23) gelten lassen.

Wir entnehmen daraus, dass diese Berechnung meist innerhalb 1″ genau ist, zumal Distanzen unter 20° (welche im Nautical Almanac nicht vorkommen) selten angewendet werden.

Als Beispiel einer kleinen Distanz nehmen wir 8° bis 9°, was ich in der Oase Farafrah am 2. Januar 1874, Abends, zwischen dem Mond und dem Fixstern Pollux maass (s. o. S. 311). Diese Distanz kommt nicht im Nautical Almanac, da sie aber sehr bequem zu messen war, und bei kleinen Distanzen die Instrumentenfehler von wenig Einfluss sind, wurde sie im Verlauf von zwei Stunden 24 Mal gemessen. Es fragt sich nun, ob die gewöhnliche Reductionsrechnung noch zulässig war? Zur Anwendung unserer Formel (53) haben wir aus der Reductionsberechnung:

$$D_0 = 8' \, 36'' \qquad M = 163^\circ \, 26'$$

$$\Delta H = +25' \, 14'' = +1514'' \qquad \Delta h = -40'' \qquad \Delta H - \Delta h = +1554''$$

Damit gibt die Formel (53):

$$\Delta'' = -0{,}04''$$

Es ist also in Hinsicht auf die Schärfe der Reductionsrechnung von dieser kleinen Distanz nichts zu fürchten.

Solche kleine Distanzen geben allerdings meist auch sehr ungleiche Differenzen, z. B. in diesem Falle:

Greenwichzeit	D	1. Diff.	2. Diff.
6^h	$9^\circ \, 59' \, 43''$		
		$-31' \, 53''$	
7	9 27 50		$+8''$
		$-31 \, 45$	
8	8 56 5		$+6$
		$-31 \, 39$	
9	8 24 26		

Wenn man aber überhaupt auf Jahrbuchsdistanzen verzichtet und seine Distanzen (wie diese) selbst rechnet, so wird man das Intervall eng nehmen und kann dann die zweiten Differenzen leicht berücksichtigen.

§ 66. Geschwindigkeit der Monddistanz-Aenderung.

Die Aenderung der wahren, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen, Monddistanz ist durch den im astronomischen Jahrbuch zwischen je zwei Distanzen angegebenen Proportional-Logarithmus gegeben. Nach § 63. S. 314 schwankt diese Aenderung etwa zwischen 0,4° und 0,6° in einer Stunde und ist im Mittel etwa 0,5° = 30′ in 1 Stunde oder 30″ in 1 Minute. Die durch die Differenzen der Proportional-Logarithmen ausgedrückte Beschleunigung der Distanzänderung ist im Allgemeinen klein, so dass man innerhalb 10—15 Minuten die Distanzänderung als gleichförmig, d. h. proportional der Zeitänderung annehmen darf.

Das bezieht sich aber alles nur auf „wahre“ Distanzen, wie sie einem im Erdmittelpunkt befindlichen Beobachter erscheinen würden, dagegen

zeigen die „scheinbaren" Distanzen, welche man an der Erdoberfläche beobachtet, grossentheils ein anderes Verhalten in Bezug auf Geschwindigkeit und Beschleunigung ihrer Aenderung, und leider meist in ungünstigem Sinne. Die Geschwindigkeit der Aenderung der gemessenen Distanzen, wovon die Genauigkeit der Längenbestimmung in erster Linie abhängt, ist nämlich im Mittel nur etwa 20″ auf 1 Minute, gegen 30″ bei den wahren Distanzen, und auch die Ungleichförmigkeit der Aenderung ist bei den von Refraction und Parallaxe beeinflussten scheinbaren Distanzen viel grösser als bei den wahren Distanzen. Man darf deshalb, namentlich bei geringen Höhen, nicht unbedingt Gruppen von Messungen in der Zeit von 10—15 Minuten in ein arithmetisches Mittel zusammen fassen, was bei wahren Distanzen zulässig wäre.

Wir betrachten zuerst das Hauptglied der Distanzreduction, nämlich das von der Mondparallaxe herrührende. Dasselbe ist nach (2) § 59. S. 289:

$$\pi \cos H \cos M \tag{1}$$

Hiebei ist nach (19) § 59. S. 292:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\cos H \sin D} \tag{2}$$

also

$$\pi \cos H \cos M = \pi \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D} = m' \tag{3}$$

Für die Reductionsänderung braucht man den Differentialquotienten von (3), und hierin kann die Distanz D als constant behandelt werden im Vergleich mit der von der täglichen Drehung des Himmelsgewölbes abhängigen Aenderung der Höhen H und h. Sind T und t die Stundenwinkel des Mondes und des Sterns, so hat man für die Höhen H und h (nach (1) § 4. S. 11) die Gleichungen:

$$\text{Mond} \quad \sin H = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T \tag{4}$$

$$\text{Stern} \quad \sin h = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos t \tag{5}$$

Die Aenderungen dT und dt sind gleich, es ist dt die Zeitänderung überhaupt, also:

$$d \sin H = - \cos \varphi \cos \delta \sin T \, dt$$
$$d \sin h = - \cos \varphi \cos \delta' \sin t \, dt$$

Dieses in das Differential von (3) gesetzt gibt:

$$\frac{dm'}{dt} = \pi \frac{\cos \varphi}{\sin D} (- \cos \delta' \sin t + \cos \delta \sin T \cos D) \tag{6}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn δ und $\delta' = 0$ werden, und da es sich doch nur um Gestirne innerhalb der Wendekreise handelt, für welche $\cos \delta$ immer zwischen $\cos 23^0 = 0{,}92$ und $\cos 0^0 = 1{,}00$ schwankt, so kann die Weiterrechnung mit $\delta = \delta' = 0$ wohl als gute Näherung für irgend welchen Distanzfall genommen werden, d. h. wir haben nach dieser Annahme aus (6):

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = \pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\,(-\sin t + \sin T\cos D)$$

mit $\cos D = 1 - 2\sin^2\dfrac{D}{2}$ gibt dieses:

$$\frac{d\,m'}{t\,d} = 2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\left(\sin\frac{T-t}{2}\cos\frac{T+t}{2} - \sin^2\frac{D}{2}\sin T\right) \tag{7}$$

Die vereinfachende Annahme $\delta = \delta' = 0$ verlegt beide Gestirne auf den Aequator, es ist also dann die Distanz D gleich der Differenz der Stundenwinkel, d. h.:

$$D = (t - T) \qquad \text{oder} \qquad D = (T - t) \tag{8}$$

je nachdem der Mond links oder rechts steht. Man sieht dieses aus den zwei Figuren 1. und 2., indem man sich aus (4) und (5) erinnert, dass T

Fig. 1.
Monddistanz mit Mond links.

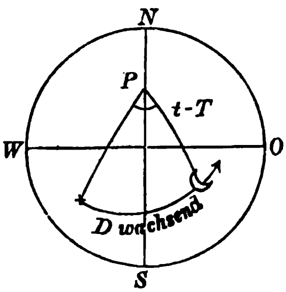
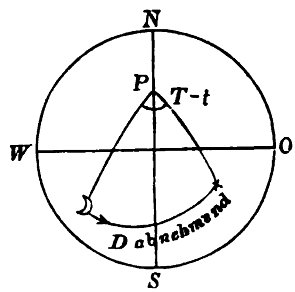


Fig. 2.
Monddistanz mit Mond rechts.



der Stundenwinkel des Mondes und t der Stundenwinkel des Sternes ist. (8) in (7) gesetzt gibt, wenn der Mond links steht:

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\left(\cos\frac{T+t}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin T\right) \tag{9}$$

Wir wollen t eliminiren und haben hiezu nach (8) für links:

$$t = T + D$$

$$T + t = 2\,T + D, \qquad \frac{T+t}{2} = T + \frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\left(\cos T\cos\frac{D}{2} - \sin T\sin\frac{D}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin T\right)$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{\sin D}\sin\frac{D}{2}\cos T\cos\frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = -\pi\cos\varphi\cos T \text{ (Mond links)} \tag{10}$$

Der zweite Fall mit Mond rechts gibt aus (7) mit $D = T - t$ nach (8):

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = 2\pi \frac{\cos\varphi}{\sin D} \sin\frac{D}{2} \left(\cos\frac{T+t}{2} - \sin\frac{D}{2} \sin T\right)$$

$$t = T - D$$

$$T + t = 2T - D \qquad \frac{T+t}{2} = T - \frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = 2\pi \frac{\cos\varphi}{\sin D} \sin\frac{D}{2} \left(\cos T \cos\frac{D}{2} + \sin T \sin\frac{D}{2} - \sin\frac{D}{2} \sin T\right)$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = +\,2\pi \frac{\cos\varphi}{\sin D} \sin\frac{D}{2} \cos T \cos\frac{D}{2}$$

$$\frac{d\,m'}{d\,t} = +\,\pi \cos\varphi \cos T \text{ (Mond rechts)} \tag{11}$$

(10) und (11) unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

In dem Falle Fig. 1. mit Mond links ist die Distanz wachsend, und im Falle Fig. 2. ist sie abnehmend, weil die Eigenbewegung des Mondes immer nach Osten geht.

Wir wollen zur Geschwindigkeit der Distanzänderung übergehen, und zwar sei:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Wahre Distanz } D \quad \text{mit Geschwindigkeit der Distanzänderung} & \dfrac{d\,D}{d\,t} = v \\ \text{Scheinbare Distanz } D' \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} & \dfrac{d\,D'}{d\,t} = v' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Indem wir hier nur den Einfluss der Mondparallaxe betrachten, haben wir nach (16) § 59. S. 291:

$$D' - D = m'$$

$$\frac{d\,D'}{d\,t} - \frac{d\,D}{d\,t} = \frac{d\,m'}{d\,t} \tag{13}$$

Die Differentialquotienten $\frac{d\,D'}{d\,t}$ und $\frac{d\,D}{d\,t}$ sind die in (12) mit v' und v bezeichneten Geschwindigkeiten, und zwar $+\,v'$, $+\,v$ oder $-\,v'$, $-\,v$, je nachdem die Distanz wachsend oder abnehmend ist, was gerade den zwei Fällen Fig. 1. mit Mond links und Fig. 2. mit Mond rechts entspricht, weil die Eigenbewegung des Mondes immer nach Osten geht. Man hat also nach (12) und (13), mit Rückschau nach (10) und (11):

Fig. 1. Mond links $\quad v' = v - \pi \cos\varphi \cos T$
Fig. 2. Mond rechts $-v' = -v + \pi \cos\varphi \cos T$

oder absolut genommen in beiden Fällen:

$$v - v' = \pi \cos\varphi \cos T \tag{14}$$

Nehmen wir als Zeiteinheit $d\,t = 1$ Minute, so muss $\pi \cos\varphi \cos T$ in (14) (vermöge der Herkunft aus (10) und (11)) zur Herstellung richtigen Maasses noch multiplicirt werden mit

$$\frac{dt}{\varrho''} = \frac{1^m}{\varrho''} = \frac{60^s}{\varrho''} = \frac{900''}{\varrho''} = \frac{1}{229{,}2}$$

also

$$v - v' = \frac{\pi}{229{,}2} \cos\varphi \cos T \tag{15}$$

Setzen wir als Maximalwerth $\pi = 1^0 = 3600''$ und für den extremen Fall $\varphi = 0$, $T = 0$, so wird:

$$(v - v')_{\max} = 16''$$

Die minutliche Aenderung v der wahren Distanz ist, wie wir gesehen haben, im Mittel etwa $= 30''$, also im äussersten Fall:

$$v' = 30'' - 16'' = 14'' \tag{16}$$

In diesem extremen Falle, nämlich Beobachtungspunkt im Aequator ($\varphi = 0$) und Mond im Meridian ($T = 0$), beträgt also die Aenderung der scheinbaren Distanz nur noch etwa die Hälfte der Aenderung der wahren Distanz. Den besonderen Fall der Gleichung (16), nämlich für einen Punkt des Aequators und den Mond im Meridian, hat Bremiker in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1875, S. 77, zuerst behandelt, indem er eine einfache mechanische Erklärung der Geschwindigkeitsreduction darin findet, dass ein Punkt des Erdäquators bei culminirendem Mond, selbst, in Folge der Erddrehung, eine nicht unerhebliche Bewegung in demselben Sinne wie der Mond besitzt, wodurch die scheinbare Mondgeschwindigkeit gegen den Fixsternhimmel verkleinert wird.

Wir wollen die Formel (15) an dem Zahlenbeispiel von § 64. (Monddistanz in der Oase Dachel) erproben. Die erste und die letzte Messung der Gruppe (1) § 64. S. 316 geben die scheinbare Geschwindigkeit:

erste Messung	$8^h\ 57^m\ 52^s$	$106^0\ 18'\ 0''$
letzte „	9 13 15	106 10 20
Differenzen	$15^m\ 23^s = 15{,}4^m$	$7'\ 40'' = 460''$

$$v' = \frac{460''}{15{,}4} = 30''$$

Der Proportional-Logarithmus ist nach S. 319 unten = 0.34830, also nach § 63. S. 314 $v = 27''$.

Ferner ist nach S. 319 $\varphi = 25^0\ 42'$ und nach (12) § 63. S. 317 der Stundenwinkel des Mondes (dort mit t bezeichnet) $T = 76^0\ 35'$, endlich die Mondparallaxe $\pi = 54'\ 12'' = 3252''$, also ausgerechnet nach (15): $v - v' = 3{,}0''$, was mit $v' = 30''$ und $v = 27''$ vollständig stimmt.

Man zieht aus der Formel (14) die praktische Regel, dass man es vermeiden soll, Monddistanzen zu messen, wenn der Mond nahe dem Meridian steht.

Alles Bisherige bezieht sich nur auf die Parallaxe, bei kleinen Höhen erzeugt die Refractionsänderung, zu welcher wir jetzt übergehen, noch ganz andere Abweichungen von dem Verhalten der wahren Distanzen.

Namentlich unter niederen Breiten, wo die Gestirne nahezu senkrecht aufsteigen, kann die Distanzänderung, wenn die Refraction ihr entgegenwirkt, erheblich vermindert, aufgehoben, ja sogar in ihr Gegentheil umgeändert werden.

Die erste Erfahrung dieser Art machte ich auf einer Station (Regenfeld, Breite $= 25^0\ 11'$) der libyschen Wüste. Es wurde am 31. Januar 1874, Abends, die Distanz zwischen dem schon hochstehenden Mond und dem eben aufgehenden Arctur gemessen, welche, nach dem Prop. Log. des Nautical Almanac zu schliessen, ziemlich rasch abnehmend sein sollte, es zeigte sich aber eine ungemein langsame Abnahme, z. B.:

	Zeit	Differenz	Distanz	Differenz
	$10^h\ 53^m\ 37^s$		$76^0\ 37'\ 40''$	
		$5^m\ 58^s$		$0'\ 40''$
	10 59 35		76 37 0	
		5 24		0 40
	10 4 59		76 36 20	
Aenderungen	$11^m\ 22^s = 11{,}37^m$		$1'\ 20'' = 1{,}33'$	

$$v' = -\frac{1{,}33}{11{,}37} = 0{,}12', \tag{17}$$

während die Aenderung der wahren Distanz beträgt:

$$v = 0{,}45' \text{ pro 1 Minute} \tag{17a}$$

Der Grund dieser zuerst auffallenden Erscheinung wurde nach einiger Ueberlegung darin gefunden, dass der aufgehende Arctur allmälig kleinere Refractionen bekam, wodurch die Distanz gegen den bereits höher stehenden Mond vergrössert, oder die vermöge der Mondbewegung normal abnehmende Distanz zu einer sehr schwach abnehmenden gemacht wurde.

Nachdem durch dieses Beispiel klar gemacht ist, um was es sich handelt, gehen wir zur mathematischen Behandlung der Sache über.

Der von der Refraction r herrührende Reductionsbetrag ist für den Mond oder den Stern bezw. Sonne:

$$r \cos M \text{ oder } r \cos S \tag{18}$$

Dieser Betrag wirkt der Parallaxe entgegen, was zu beachten sein wird, wenn wir zunächst nur den absoluten Werth von (17) untersuchen, ihn aber nachher mit dem früheren (15) zusammen nehmen werden. Da die Behandlung für M oder S dieselbe ist, bleiben wir bei M stehen, und haben aus (17):

$$\frac{d(r \cos M)}{dt} = r\,\frac{d(\cos M)}{dt} + \cos M\,\frac{dr}{dt} \tag{18a}$$

Wenn überhaupt die Refractionsänderung von Belang ist, so kann die Höhe H nur klein sein, und dann kann man mit $\cos H = 1$ statt (2) schreiben:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D} \tag{19}$$

und damit erhält man für das erste Glied von (18a) dieselbe Entwicklung wie früher (3) bis (11), und statt (10) und (11) bekommt man jetzt:

$$r \frac{d(\cos M)}{dt} = \mp r \cos\varphi \cos T \quad \left(\mp \text{ für Mond } \begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right) \tag{20}$$

Den zweiten Theil von (18*a*) muss man, da die Refraction r nur als Function der Höhe bekannt ist, zunächst so schreiben:

$$\cos M \frac{dr}{dt} = \cos M \frac{dr}{dH} \frac{dH}{dt}$$

Dabei ist nach (4):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{T} = -\cos\varphi \cos\delta \frac{\sin T}{\cos H} \tag{21}$$

also:

$$\cos M \frac{dr}{dt} = -\frac{dr}{dH} \cos M \cos\varphi \cos\delta \frac{\sin T}{\cos H} \tag{22}$$

Wenn aber H sehr klein ist, so darf auch für $\cos M$ nach (19) noch genähert geschrieben werden:

$$\cos M = \frac{\sin h}{\sin D}$$

und der nur zwischen 0,9 und 1,0 schwankende Factor $\cos\delta$ kann, da ohnehin Näherungen eingeführt sind, $= 1$ gesetzt werden, folglich aus (22):

$$\cos M \frac{dr}{dt} = -\frac{dr}{dH} \cos\varphi \sin T \frac{\sin h}{\sin D} \tag{23}$$

Aus (20) und (23) kann man (18*a*) zusammensetzen:

$$\frac{d(r \cos M)}{dt} = \mp r \cos\varphi \cos T - \frac{dr}{dH} \cos\varphi \sin T \frac{\sin h}{\sin D} \tag{24}$$

Um auf minutliche Aenderung in Einheiten von 1″ zu reduciren, muss man im ersten Glied den Factor $\frac{900''}{\varrho''} = \frac{1}{229}$ zusetzen, ebenso wie bei (14) und (15) geschehen ist; und im zweiten Glied ist zu setzen:

$$\frac{dr}{dH} = -15\,(\varDelta r_1) \tag{25}$$

wo $(\varDelta r_1)$ die Refractionsänderung ist, welche einer Höhenänderung von 1′ entspricht, und zwar ist hiebei die w a h r e Höhe als Argument zu nehmen, d. h. es ist $(\varDelta r_1)$ aus der Tafel S. [13] und nicht aus der Tafel S. [5] bis [6] zu entnehmen.

Man hat also jetzt das Resultat:

$$\frac{d(r \cos M)}{dt} = \mp \frac{r}{229} \cos\varphi \cos T + 15(\varDelta r_1) \cos\varphi \sin T \frac{\sin h}{\sin D} \tag{26}$$

$\mp$ gilt, wenn der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Für den Stern oder die Sonne stellt sich die Vorzeichenfrage umgekehrt, weil für die Distanzänderung nach Fig. 1. und 2. die Mondbewegung maassgebend ist, nämlich:

$$\frac{d(r' \cos S)}{dt} = \pm \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t + 15\,(\varDelta r_1) \cos\varphi \sin t \,\frac{\sin H}{\sin D} \tag{27}$$

$\pm$ gilt, wenn der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Zur Bildung der Gesammtformel für Geschwindigkeit der Distanzänderung, in Hinsicht auf Parallaxe und Refractionen haben wir die Grundlage (nach (2), (3), (16) und Fig. 4. § 59. S. 291):

$$D' - D = \pi \cos H \cos M - r \cos M + \pi' \cos h \cos S - r' \cos S$$

Die Parallaxe π' für die Sonne oder einen Planeten hat verschwindenden Einfluss, es ist also:

$$\frac{dD'}{dt} - \frac{dD}{dt} = \frac{d(\pi \cos H \cos M)}{dt} - \frac{d(r \cos M)}{dt} - \frac{d(r' \cos S)}{dt}$$

oder theilweise mit anderen Bezeichnungen (m' nach (3) S. 331):

$$v' - v = \frac{dm'}{dt} - \frac{d(r \cos M)}{dt} - \frac{d(r' \cos S)}{dt} \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf die verschiedenen Vorzeichenfragen gibt dieses, durch Einsetzen von (10) und (11), (26) und (27):

1. Wenn der Mond links steht, also die Distanz wachsend ist:

$$\left.\begin{aligned} v' - v = -\frac{\pi}{229} \cos\varphi \cos T + \frac{r}{229} \cos\varphi \cos T - 15\,(\varDelta r_1) \cos\varphi \frac{\sin h}{\sin D} \sin T \\ - \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t - 15\,(\varDelta r'_1) \cos\varphi \frac{\sin H}{\sin D} \sin t \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

2. Wenn der Mond rechts steht, also die Distanz abnehmend ist:

$$\left.\begin{aligned} -v' + v = +\frac{\pi}{229} \cos\varphi \cos T - \frac{r}{229} \cos\varphi \cos T - 15\,(\varDelta r_1) \cos\varphi \frac{\sin h}{\sin D} \sin T \\ + \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t - 15\,(\varDelta r'_1) \cos\varphi \frac{\sin H}{\sin D} \sin T \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

also zusammengefasst:

$$\left.\begin{aligned} v' = v - \frac{\pi - r}{229} \cos\varphi \cos T - \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t \mp (\varDelta r_{15}) \cos\varphi \frac{\sin h}{\sin D} \sin T \\ \mp (\varDelta r'_{15}) \cos\varphi \frac{\sin H}{\sin D} \sin t \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hiebei gilt $\mp$ wenn die Distanz $\left\{\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{abnehmend}\end{matrix}\right\}$ ist, oder der Mond $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ steht.

Die Bedeutung aller hier vorkommenden Zeichen ist:

- v' Geschwindigkeit der beobachteten Distanz, in Secunden pro 1 Zeitminute,
- v Geschwindigkeit der wahren Distanz, in Secunden pro 1 Zeitminute,
- π die Horizontalparallaxe des Mondes,
- r die Refraction des Mondes,

r' die Refraction des Sternes (oder der Sonne),
(Δr_{15}) die Aenderung der Refraction r für 15′ wahre Höhe, absolut genommen,
$(\Delta r'_{15})$ die Aenderung der Refraction r' für 15′ wahre Höhe, absolut genommen,
H die Höhe des Mondes,
h die Höhe des Sterns (oder der Sonne),
T der Stundenwinkel des Mondes,
t der Stundenwinkel des Sterns (oder der Sonne),
φ die Breite des Beobachtungsortes.

Die Ausrechnung der Formel (29), (30) bezw. (31) ist meist einfacher als es auf den ersten Blick aussieht, denn die von der Refraction herrührenden Glieder kommen nur für dasjenige Gestirn in Betracht, welches sehr tief steht; dass b e i d e Gestirne nahe am Horizont wären, das eine aufgehend, das andere untergehend, wird wohl sehr selten vorkommen, und dann fallen die Glieder mit $\sin H$ und $\sin h$ auch fort.

Wir betrachten das Hauptrefractionsglied in (31):

$$(\Delta r_{15}) \cos\varphi \frac{\sin h}{\sin D} \sin T \qquad (32)$$

Es sei unter dem Aequator ($\varphi = 0$) der Mond nahe am Horizont, der Stern nahe am Zenit ($h = 90^0$, $D = 90^0$), zugleich $T = 90^0$, d. h. der Maximalwerth von (32):

$$(32)_{\max} = (\Delta r_{15})$$

Nach S. [13] ist die Refractionsänderung am Horizont für 10′ Aenderung der wahren Höhe:

$$(\Delta r_{10}) = 90'' = 1' \, 30''$$

also $$(\Delta r_{15} = 1{,}5 \, (\Delta r_{10}) = 135'' = 2' \, 15''$$

Dieses ist eine Aenderung, welche die minutliche Eigenbewegung des Mondes etwa vierfach übertrifft.

Um die Formel (31) durch Anwendung auf eine Beobachtungsreihe zu erproben, nehmen wir Folgendes: In Niendorf (s. S. 287) maass ich am 13. Juli 1883 Abends, bei untergehender Sonne und hochstehendem Mond, mit dem Sextanten von S. 175, eine Reihe von 16 Distanzen, welche theils zu zweien, theils zu dreien in einzelne Mittel zusammengefasst wurden und damit die 6 folgenden Werthe ergaben:

Niendorf, $\varphi = 53^0 \, 59' \, 50''$, $\lambda = 0^h \, 43^m \, 18^s$ von Greenw.

Mittlere Ortszeit t'	$\Delta t'$	Gemessene Randdistanz D_1'	$\Delta D_1'$	$\frac{\Delta D'}{\Delta t'}$
$8^h \; 8^m \; 26^s$		$105^0 \, 35' \; 1''$		
	$+ 119^s$		$+ 10''$	0,08
8 10 25		105 35 11		
	+ 123		+ 18	0,15
8 12 28		105 35 29		
	+ 96		+ 0	0,00
8 14 4		105 35 29		
	+ 94		+ 24	0,26
8 15 38		105 35 53		
	+ 112		+ 16	0,14
8 17 30		105 36 9		
$9^m \; 4^s$	$= 544^s$	$1' \; 8''$	$+ 68''$	$+ 0{,}125 = v'$

Die scheinbare Distanzänderung ist also sehr gering, nämlich:

$$v' = 0{,}125' \text{ pro } 1^s \text{ oder } v' = 7{,}5'' \text{ pro 1 Zeitminute} \tag{33}$$

Es wurden nun zunächst diese sechs beobachteten Distanzen nach § 64. auf den Erdmittelpunkt reducirt, wozu noch die Lufttemperatur 16° und der Barometerstand 755 mm gebraucht wurden. Die Resultate hievon und ihre Vergleichung mit den wahren aus dem Nautical Almanac interpolirten Distanzen (vgl. § 6. S. 24) sind folgende:

Reducirte Distanz D	Nautical Almanac D_n	Differenz
106° 6′ 11″	106° 7′ 11″	— 1′ 0″
106 6 57	106 8 6	— 1 9
106 7 53	106 9 2	— 1 9
106 8 29	106 9 45	— 1 16
106 9 27	106 10 28	— 1 1
106 10 20	106 11 19	— 0 59
		Mittel — 1′ 6″

Unsere Distanzmessungen waren also um etwa 1′ zu klein. Es interessiren uns aber in diesem Falle nicht die absoluten Fehler, sondern nur deren relativer Verlauf, und dieser ist befriedigend.

Nach Nautical Almanac 1883 S. 122 ist der Prop. Log. = 0.3424 oder nach § 63. S. 314 die wahre Geschwindigkeit:

$$v = 27{,}3'' \text{ pro 1 Zeitminute} \tag{34}$$

Es fragt sich nun, ob die Differenz zwischen (33) und (34) durch unsere Formel (31) genügend dargestellt wird.

Die Formel (31) lautet in unserem Fall, da die Sonne das niedere Gestirn war:

$$v' - v = -\frac{\pi - r}{229} \cos\varphi \cos T - \frac{r'}{229} \cos\varphi \cos t - 1{,}5(\Delta r_{10}') \cos\varphi \left.\frac{\sin H}{\sin D} \sin t\right\} \tag{35}$$

Aus der Reductionsberechnung entnimmt man im Mittel für den Mond:

$$\pi = 54{,}3' \quad H = 19^\circ\, 52' \quad r = 2{,}7' \quad T = 1^h\, 19^m = 19^\circ\, 45' \tag{36}$$

Die Reductionselemente für die Sonne, als niederes Gestirn, sind sehr veränderlich, nämlich:

t =	$8^h\, 2^m\, 57^s$	$8^h\, 4^m\, 56^s$	$8^h\, 6^m\, 59^s$	$8^h\, 8^m\, 35^s$	$8^h\, 10^m\, 9^s$	$8^h\, 12^m\, 1^s$
Wahre Höhe h =	1° 14′ 40″	1° 0′ 40″	0° 46′ 40″	0° 35′ 20″	0° 24′ 40″	0° 11′ 20″
Scheinb. Höhe h' =	1 34 24	1 21 39	1 9 4	0 59 4	0 49 38	0 37 46
Refraction r' =	19 52	21 7	22 32	23 52	25 6	26 34

Wir nehmen im Mittel für die Sonne:

$$t = 8^h\,7^m\,29^s = 121^0\,52' \quad h = 0^0\,43' \quad r' = 23{,}2' \quad (\varDelta r_{10}') = 1{,}1' \quad (37)$$

Setzt man diese Werthe (36) und (37) in (35) ein, so erhält man:

$$v' - v = -0{,}125 + 0{,}031 - 0{,}291 = -0{,}385' = -23{,}1'' \quad (38)$$

während die Beobachtung nach (33) und (34) gab:

$$v' - v = -19{,}8'' \quad (39)$$

Mit Rücksicht auf alle Nebenumstände ist die Uebereinstimmung zwischen (38) und (39) genügend.

Zur Gewinnung einer Gesammtübersicht über den Einfluss der Parallaxe und der Refraction auf die Distanzgeschwindigkeit wollen wir nun 4 extreme Fälle betrachten:

Fall	Mond	Sonne oder Stern	Distanz	Wirkung
I.	aufgehend	hochstehend	wachsend	günstig
II.	untergehend	hochstehend	abnehmend	günstig
III.	hochstehend	aufgehend	abnehmend	ungünstig
IV.	hochstehend	untergehend	wachsend	ungünstig

(40)

Zur Berechnung machen wir folgende einfache Annahmen: Die Declinationen beider Gestirne seien = Null, die Breite $\varphi = 45^0$, also auch die beiden Meridianhöhen H oder $h = 45^0$. Wenn in jedem Falle ein Gestirn aufgeht oder untergeht und das andere im Meridian steht, so ist der Stundenwinkel T oder t für den Aufgang $= -90^0$, für den Untergang $= +90^0$ und für die Culmination $= 0^0$. Die Distanz ist stets $= 90^0$.

Mit diesen runden Annahmen ist es wohl verträglich (da wir nur eine Uebersichtsrechnung haben wollen), dem auf- oder untergehenden Gestirn nicht genau die Höhe 0^0, sondern die wahre Höhe 2^0 zu geben (weil bei 0^0 die Refractionswirkung zu krass wird). Für 2^0 wahre Höhe ist nach S. [13] die Refraction $= 16'\,54'' = 16{,}90'$ und die Refractionsänderung für 10′ Höhe ist $= 39'' = 0{,}65'$, also $(\varDelta r_{15})$ bzw. $(\varDelta r'_{15}') = 0{,}98'$. Für die Meridianhöhe 45^0 ist nach S. [7] die Refraction $= 0'\,58'' = 0{,}97'$ und die Refractionsänderung kommt hier nicht in Betracht. Die Mondparallaxe soll $\pi = 57'$ genommen werden, also für niederstehenden Mond $\pi - r = 40{,}10'$ und für hochstehenden Mond $\pi - r = 56{,}03'$.

Wenn man diese Zahlenwerthe in die Formel (31) für die vier Fälle von (40) einsetzt, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\text{I.} & v' - v = -0 & -0{,}003 & +0{,}490 & -0 & = +0{,}487 \\
\text{II.} & v' - v = +0 & -0{,}003 & +0{,}490 & +0 & = +0{,}487 \\
\text{III.} & v' - v = -0{,}124 & -0 & +0 & -0{,}490 & = -0{,}614 \\
\text{IV.} & v' - v = -0{,}124 & -0 & -0 & -0{,}490 & = -0{,}614
\end{array}\right\} (41)$$

Nimmt man für die Geschwindigkeit der wahren, geocentrischen Distanzänderung im Mittel $v = 0{,}50$, so zeigt sich, dass im I. und II. unserer extremen Fälle die scheinbare Geschwindigkeit v' nahezu doppelt so gross ist, als die wahre v, und in den beiden letzten Fällen III. und IV. wird die scheinbare Geschwindigkeit v' der wahren Geschwindigkeit v sogar entgegen gesetzt.

Von unseren bisher betrachteten Beobachtungen extremer Distanzänderungen trifft das erste Beispiel (17) und (17 *a*) S. 335, Mond über dem aufgehenden Arctur, nahezu auf den Fall III. Das ausführlich behandelte Beispiel von Niendorf (33), (34) mit untergehender Sonne und hochstehendem Mond trifft nahezu auf den Fall IV.

Nachdem wir somit zwei Beobachtungsbeispiele für ungünstige Wirkung vorgelegt haben, mag noch eine Reihe mit günstiger Distanzänderung hergesetzt werden, entsprechend dem Falle I., aufgehender Mond und hochstehender Stern.

Niendorf, 17. August 1883.

Distanz des Sterns Arctur vom diesseitigen Mondrand. Lufttemperatur $= 9^0$. 10 Einzelmessungen sind in 3 Gruppenmittel zusammengezogen:

Mittlere Ortszeit	Differenz	Distanz	Differenz
$10^h\ 18^m\ 43^s$ 10 22 38 10 26 11	$3^m\ 55^s$ 3 33	$107^0\ 21'\ 55''$ 107 23 46 107 26 11	$+\ 1'\ 51''$ $+\ 2'\ 25$
Aenderungen $7^m\ 28^s$	$= 448^s$	$4'\ 16''$	$= 256''$

$$v' = \frac{256}{448} = 0{,}57 \tag{42}$$

Die Distanz kommt nicht im Jahrbuch und wird berechnet:

Greenwichzeit	Wahre Distanz	
9^h 10 11	$106^0\ 59'\ 42''$ 107 29 5 107 58 27	$29'\ 23'' = 0{,}49^0$ für 1 Stunde $29'\ 22$

$$v = 0{,}49 \tag{43}$$

(42) und (43) zeigen eine Zunahme $v' - v = 0{,}08$.

Endlich geben wir der Vollständigkeit wegen noch ein Beispiel für den Fall II., untergehender Mond und hochstehender Stern α aquilae, in 5 einzelnen Distanzen, am 10. August 1883 in Niendorf (Lufttemperatur $= 12^0$ C):

Mittlere Ortszeit	Differenz	Distanz	Differenz
9h 31m 20s		76° 46′ 30″	
	1m 35s		— 0′ 0″
9 32 55		76 46 30	
	1 15		— 0 30
9 34 10		76 46 0	
	1 18		— 1 30
9 35 28		76 44 30	
	1 7		— 0 50
9 36 35		76 43 40	
	1 23		— 1 40
9 37 58		76 42 0	
Aenderungen 6m 38s	= 398s	4′ 30″	= 270″

$$v' = \frac{270}{398} = 0{,}68 \tag{44}$$

während nach dem Nautical Almanac 1883 S. 140 der Prop. Log. für diese Distanz = 0.3474 ist, also:

$$v = 0{,}45 \tag{45}$$

Obgleich wir diese zwei letzten Beispiele (42) und (44) nicht mehr durch Ausrechnung mit der Formel (31) verglichen haben, dienen sie auch in dieser Form zur allgemeinen Bestätigung der Theorie der Formel (31).

Weitere Beispiele der Vergleichung von v und v' wird die Genauigkeitstabelle von § 68. geben. Die Mittelwerthe sind daselbst $v = 0{,}52$ und $v' = 0{,}38$, also v' kleiner als v, was in der Mehrzahl aller Fälle stattfindet.

§ 67. Näherungswerthe der Monddistanz-Reduction.

Für viele Zwecke ist es erwünscht, die Reduction einer Distanz auf den Erdmittelpunkt rasch wenigstens genähert zu haben, z. B. um für die genauere Reductionsberechnung das Mittel der scheinbaren und der wahren Distanz einführen zu können, ohne zuvor die Jahrbuchsdistanzen zu benutzen, ferner zur Entscheidung, ob eine grobe Missstimmigkeit in der Messung oder in der Berechnung ihren Grund hat u. s. w.

Die Reductionsformel heisst nach (14) und (16) § 59. S. 291 in ihren Hauptgliedern, für die wahre Distanz D und die scheinbare Distanz D':

$$\varDelta = D - D' = -\varDelta H \cos M - \varDelta h \cos S$$

oder nach (2) und (3) § 59. S. 289:

$$\varDelta = -(\pi \cos H - r) \cos M + r' \cos S \tag{1}$$

Dabei ist nach (19) und (20) § 59. S. 292:

$$\cos M = \frac{\sin h - \sin H \cos D}{\sin D \cos H} \qquad \cos S = \frac{\sin H - \sin h \cos D}{\sin D \cos h} \tag{2}$$

Mit dem Mittelwerth $\pi = 57'$, welchen wir fürs Folgende annehmen wollen, hat man für (1) folgende Zahlenwerthe:

H oder h	$\pi \cos H$	r oder r'	$(\pi \cos H - r)$	$\log (\pi \cos H - r)$	$\log r'$
0°	57,0'	34,9'	22,1'	1.3444	1.5428
5	56,8	9,8	47,0	1.6721	0.9912
10	56,1	5,3	50,8	1.7059	0.7243
15	55,0	3,5	51,5	1.7118	0.5441
20	53,6	2,6	51,0	1.7076	0.4150
30	49,4	1,7	47,7	1.6875	0.2304
40	43,7	1,2	42,5	1.6284	0.0792
50	36,6	0,8	35,8	1.5539	9.9031
60	28,5	0,6	27,9	1.4456	9.7782
70	19,5	0,4	19,1	1.2810	9.6021
80	9,9	0,2	9,7	0.9868	9.3010

(3)

Nach den Formeln (1), (2) und der Tabelle (3) sind die Tabellenwerthe von S. [22] und [23] berechnet worden, so weit es sich um kleine Höhen unter 10° handelt. Insbesondere, wenn die eine Höhe H oder h $= 0$ wird, vereinfacht sich die Berechnung von M und S nach [2]:

$$h = 0 \text{ gibt} \quad \cos M = -\tan H \cot D \qquad \cos S = \frac{\sin H}{\sin D} \tag{4}$$

$$H = 0 \text{ gibt} \quad \cos M = \frac{\sin h}{\sin D} \qquad \cos S = -\tan h \cot D \tag{5}$$

Auch der besondere Fall gleicher Höhen gibt eine Berechnungerleichterung. Setzt man nämlich $h = H$, so wird nach (2):

$$\cos M = \cos S = \tan H \tan \frac{D}{2} \tag{6}$$

wie sich auch unmittelbar geometrisch einsehen lässt, indem dann das Distanzdreieck symmetrisch wird. Da in diesem Falle auch $r' = r$, so wird (1):

$$\Delta = (-\pi \cos H + 2\, r) \tan \frac{D}{2} \tan H \tag{7}$$

Hiernach sind die auf S. [22] und [23] in den Diagonalen stehenden Reductionswerthe berechnet.

Für Höhen von 10° an aufwärts ist es bequemer und völlig ausreichend, die Refraction nach der Näherungsformel von § 8. S. 31 in Rechnung zu bringen, nämlich:

$$r = \alpha \cot H \qquad r' = \alpha \cot h \tag{8}$$

wo die Constante ist:

$$\alpha = 57'' = 0{,}95'$$

Setzt man dieses in (1), so wird:

$$\pi \cos H - r = \pi \cos H - \alpha \cot H$$

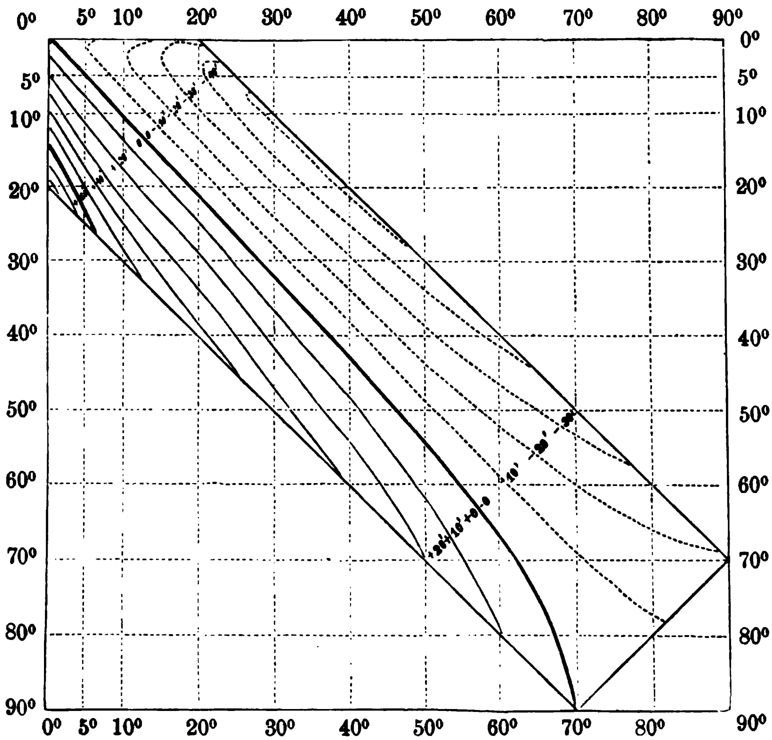
also jetzt nach (1) und (2):

$$\Delta = \frac{1}{\sin D}\left(-\frac{(\pi \sin H - \alpha)}{\sin H}(\sin h - \sin H \cos D) + \frac{\alpha}{\sin h}(\sin H - \sin h \cos D)\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin D}\left\{-\pi \sin h + \pi \sin H \cos D - 2\alpha \cos D + \alpha\left(\frac{\sin H}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin H}\right)\right\} \quad (9)$$

Diese Formel, deren zweiten Theil wir schon in (4) § 41. S. 212 entwickelt haben, ist für unseren Zweck insofern günstiger, als die ursprünglichen (1) und (2), weil sich die einzelnen Bestandtheile leicht tabellarisch darstellen lassen, so dass dann zur Bildung der Reductionen Δ nicht mehr viel anderes zu thun ist, als eine Zusammensetzung der einzelnen Tabellenwerthe.

Fig. 1. Schichtentafel für Monddistanz-Reduction $D - D' = \Delta$.
Monddistanz = 20°, vgl. S. [22].
Sonnen- oder Sternhöhe h.



Auf S. [21] haben wir die fraglichen vier Hülfstafeln mitgetheilt nebst Gebrauchsanweisung, wornach man z. B. berechnet:

Beispiel: $D = 50^0 \quad H = 10^0 \quad h = 40^0$

I. = − 36,6′ II. = + 6,4′ III. = − 1,2′ IV. = + 3,8′

$\Delta = 1{,}31\,(-36{,}6' + 6{,}4' - 1{,}2' + 3{,}8') = 1{,}31\,(-27{,}6') = -36{,}2'$

Werden H und h vertauscht, so wird:

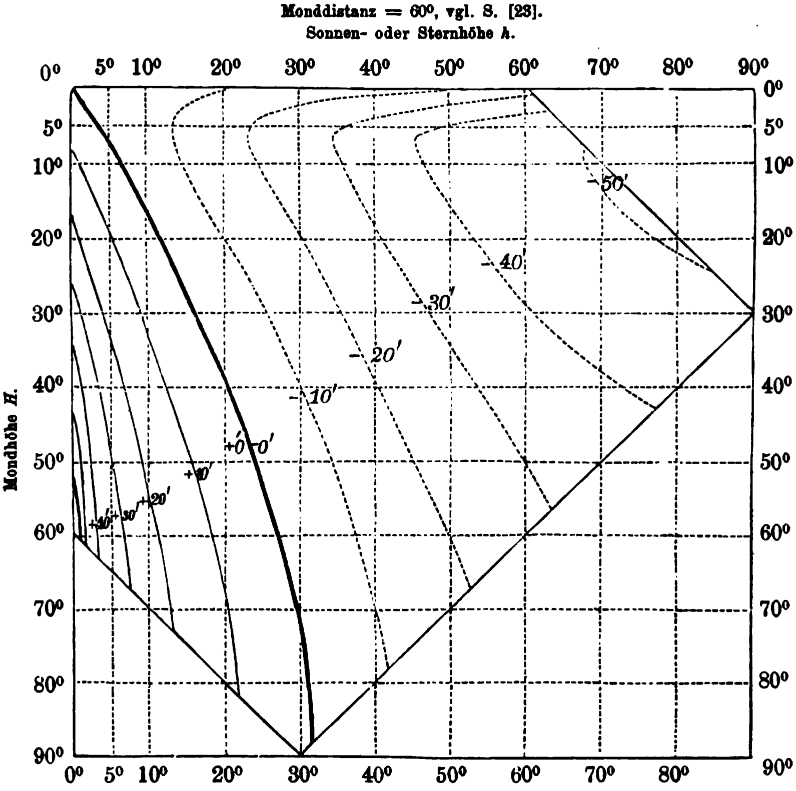
$$\Delta = 1{,}31\ (-\ 9{,}9' + 23{,}6' - 1{,}2' + 3{,}8') = 1{,}31\ (+\ 16{,}3') = +\ 21{,}\ 4'$$

Wenn die Mondparallaxe nicht die der Tafel S. [21] zu Grunde gelegte $\pi = 54'$, sondern eine andere ist, so hat man die Werthe I. und II. proportional zu ändern (mit dem Rechenschieber, ebenso wie auch die Division mit $\sin D$ am bequemsten mit dem Rechenschieber gemacht wird).

Auf diese Art sind die Tafelwerthe von S. [22] und [23] berechnet worden, welche nicht bereits bei (4) bis (7) besonders erwähnt worden sind.

Im Ganzen ist mehr als die Hälfte aller Tafelwerthe von S. [22] und [23] direct nach den angegebenen Formeln berechnet worden, die übrigen wurden graphisch interpolirt.

Fig. 2. Schichtentafel für Monddistanz-Reduction $D - D' = \Delta$.
Monddistanz = 60°, vgl. S. [23].



Zum Theil konnte auch eine ähnliche Tafel von Weyr im VIII. Jahrgang, 1880, der „Annalen der Hydrographie“, S. 500, zur controllirenden Vergleichung zugezogen werden, wobei aber zu bemerken ist, dass die Weyr'sche Tafel sich auf den Mond-Parallaxenwerth $\pi = 53'$ gründet, während unsere Tafel $\pi = 57'$ zu Grunde legt. Auch hat die Weyr'sche

Tafel die Minimalhöhen 5^0, während in unserer Tafel die Höhen mit 0^0 beginnen, damit der Gesammtverlauf der Reductionsfunction ersehen werden kann.

Die Nulllinie, d. h. die Grenze zwischen positiver und negativer Reduction, geht immer durch den Punkt für $H = 0$ und $h = 0$.

Den besten Ueberblick über diesen Functionsverlauf erhält man durch Aufzeichnen der Curven für constante Reductionen Δ, d. h. sogenannter Schichtentafeln, deren wir zwei, für $D = 20^0$ und für $D = 60^0$ in Fig. 1. (S. 344) und in Fig. 2. (S. 345) vorlegen.

Der Charakter dieser Curven bleibt auch bei allen anderen Distanzen bestehen, und die Form der Schichtentafeln ist schon durch die Zahlentafeln S. [22] und [23] gegeben, z. B. für $D = 90^0$ wird ein nach der Diagonale zerschnittenes halbes Quadrat ausgefüllt und bei $D = 120^0$ ist nur noch ein kleines Dreieck vorhanden.

§ 68. Mittlerer Fehler der Monddistanz-Messung.

Von den vielen Fehlerquellen, welche bei der Längenbestimmung durch Monddistanzen in Betracht kommen, behandeln wir hier zuerst den mittleren, unregelmässigen, bei der Sextantenmessung mit freier Hand zu fürchtenden Distanzfehler, weil uns zu dessen Bestimmung eine Zahl von 317 Monddistanzen von der libyschen Expedition zu Gebote ist.

Die Messungen sind sämmtlich mit dem auf S. 157 abgebildeten und beschriebenen 12 cm-Sextanten gemacht, und die Reduction wurde für jede einzelne Distanz nach der am Schluss von § 64. (19)—(21) S. 321 beschriebenen Methode durchgeführt. Dadurch wurde für jede Messungsgruppe der einer einzelnen Distanz entsprechende Zeitfehler μ (z. B. $\mu = \pm 58^s$ nach (20) S. 322) erhalten.

Um daraus rückwärts wieder auf den Distanzmessungsfehler zu schliessen, und verschiedene solcher Werthe μ vergleichbar zu machen, braucht man die Geschwindigkeit der Distanzänderung, und zwar in diesem Falle für die scheinbaren Distanzen, da nach § 66. die scheinbaren Distanzen sich erheblich anders ändern als die wahren Distanzen. Ist v' die scheinbare Distanzänderung in 1 Minute, μ der Zeitfehler einer Distanzmessung und m der Distanzfehler, so hat man:

$$v' = \frac{dD}{dt} = \frac{m}{\mu}, \; m = v' \mu \tag{1}$$

Eine Bestimmung von μ aus n Einzelmessungen gibt dem mittleren Fehlerquadrat m^2 das Gewicht $= n - 1$, und hiernach lässt sich ein Mittelwerth aus zahlreichen Einzelbestimmungen m bilden, wie in folgender Tabelle geschieht, in welcher die zweite Spalte das Seitencitat aus dem schon mehrfach citirten Werke „Phys. Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste" ist, und die Ortsbezeichnungen der dritten Spalte zu dem Kärtchen von § 69. S. 350 in Beziehung stehen.

Monddistanzen der libyschen Expedition.

Nummer	Lib. Exped. Seite	Ort	Distanz	D	n	μ	v'	v	$v'\mu$	$(v'\mu)^2$	$(n-1)$	$(n-1)(v'\mu)^2$
1.	33	Nekeb	Aldebaran-Mond	63°	6	±42^s	0,45	0,58	±19″	361	5	1 805
2.	33	Bir-Keraui	„	35	10	40	0,35	0,56	14	196	9	1 764
3.	33	„	Pollux-Mond	78	9	49	0,40	0,58	20	400	8	3 200
4.	34	Farafrah	„	9	12	57	0,44	0,52	25	625	11	6 875
5.	34	„	„	8	12	70	0,37	0,52	26	676	11	7 436
6.	35	Dachel	Sonne-Mond	106	13	58	0,51	0,45	30	900	12	10 800
7.	35	„	„	106	11	63	0,57	0,45	36	1296	10	12 960
8.	36	Einsiedel II	Mond-Sonne	84	40	42	0,45	0,54	19	361	39	14 079
9.	37	Regenfeld	Jupiter-Mond	56	17	76	0,28	0,52	21	441	16	7 056
10.	37	„	„	56	20	55	0,33	0,52	18	324	19	6 156
11.	38	„	Arctur-Mond	76	20	64	0,16	0,45	10	100	19	1 900
12.	39	„	Jupiter-Mond	7	14	67	0,37	0,49	25	625	13	8 125
13.	39	Siuah	Regulus-Mond	93	20	50	0,48	0,57	24	576	19	10 944
14.	40	„	„	80	14	48	0,32	0,56	15	225	13	2 925
15.	40	Beharieh	Sonne-Mond	126	13	65	0,27	0,45	18	324	12	3 888
16.	41	Farafrah	„	80	10	41	0,28	0,50	11	121	9	1 089
17.	41	„	„	79	10	28	0,32	0,50	9	81	9	729
18.	41	Lebkak	Regulus-Mond	99	26	46	0,53	0,60	24	576	25	14 400
19.	42	Esneh	Mond-Jupiter	29	20	70	0,31	0,50	22	484	19	9 196
20.	42	„	„	40	20	70	0,37	0,50	26	676	19	12 844
					317		0,38 (Mittel)	0,52 (Mittel)			297	138 171

Mittler Fehler einer Distanzmessung $$m = \pm \sqrt{\frac{138\,171}{297}} = \pm 22'' \qquad (2)$$

Die Zeichen n, μ, v' und v der Tabelle sind durch das Vorstehende erklärt und es ist nur noch zu v' zu bemerken, dass diese Quotienten aus den Messungen selbst abgeleitet sind.

Da die Distanzmessung von freier Hand geschah und der Nonius nur 20″ abzulesen gestattet, so stellt dieser Werth ± 22″ ein befriedigendes Resultat vor, über dessen Zuverlässigkeit wir noch bemerken, dass von dem Gesammtmaterial der 317 in Afrika gemachten Monddistanzen-Messungen nicht eine ausgeschieden wurde.

Man kann versuchen, den mittleren Winkel-Messungsfehler $v'\mu$ in Beziehung zur Grösse des Winkels zu setzen, weil das Schwanken der Bilder im Gesichtsfelde bei grossen Winkeln schädlicher wirkt als bei kleinen Winkeln. Trägt man aber die Werthe $v'\mu$ als Ordinaten, zu den Distanzen D als Abscissen, auf, so findet man erst über 100° ein merkliches Anwachsen. Die Zusammenfassung in 4 Gruppen gibt:

Zwischen	0°	und	30°	mittlerer	Fehler =	± 24″
„	30	„	60	„	„	20
„	60	„	90	„	„	15
„	90	„	126	„	„	27

Anmerkung. In dem Werke „Phys. Geogr. und Meteorologie der libyschen Wüste“ S. 43 habe ich zur Genauigkeitsberechnung der Distanzmessung nicht die scheinbare Geschwindigkeit v', sondern die wahre (geocentrische) Geschwindigkeit v, welche durch den Proportionallogarithmus des Nautical Almanac bestimmt ist, angewendet. Das Resultat für m war ± 29″, während unsere bessere Neuberechnung nun m = ± 22″ gibt.

Wenn für Messungen aus freier Hand der mittlere unregelmässige Distanzfehler nach (2) in runder Zahl = ± 20″ zuverlässig bestimmt ist, so bleibt noch die Frage nach der Messungsgenauigkeit bei Anwendung eines Stativs zu beantworten. Obgleich uns hiezu kein umfangreiches und rechnerisch gründlich verwerthetes Material zur Verfügung steht, wie die Tabelle von S. 347 für Freihandmessung, glauben wir doch, auf Grund einiger Messungsreihen, von denen eine beispielshalber auf S. 272 unten mitgetheilt ist, den mittleren Distanz-Messungsfehler in diesem Falle kleiner, nämlich etwa = ± 10″ schätzen zu können.

Nimmt man Reihen von 10 bis 20 Einzelbeobachtungen, so kann also bei der Freihandmessung der mittlere unregelmässige Fehler eines Reihenmittels auf etwa 5″ und bei der Stativmessung auf 2″—3″ herabgebracht werden.

(Im folgenden § 69. (25) S. 357 werden wir durch Chronometerausgleichung den mittleren Distanzfehler einer Gruppe von 20 Monddistanzen = ± 17″ finden.)

Dass die Stativmessung unbedingt zu empfehlen wäre, folgt aus dieser Vergleichung nicht.

Erstlich verlangt die Monddistanz-Messung auf dem Stativ so viele Vorbereitungen, bis man endlich beide Gestirne im Gesichtsfeld hat, dass ein geübter Freihandbeobachter inzwischen eine Reihe von Distanzen messen

kann, und bei diesen langen Vorbereitungen ist zu fürchten, dass die günstige Zeit unbenutzt verfliesst. Wenn einmal alle Vorbereitungen getroffen sind, geht allerdings die Messung vom Stativ aus rasch und elegant, lässt aber constante Einstellungsfehler bei den Randberührungen mehr befürchten als die Freihandmessung.

Uebergehend zu der Frage der nicht unregelmässigen, d. h. durch Beobachtungshäufung in der einzelnen Gruppe nicht zu verkleinernden Monddistanz-Fehler machen wir für Sextantenmessung folgende Schätzung:

Indexcorrection	± 5″
Blendgläser.	± 2
Excentricitäts- und Theilungsfehler	± 10
Optische Täuschung am Mondrand	± 3

$$\sqrt{5^2 + 2^2 + 10^2 + 3^2} = \pm 12''$$

Weitere Genauigkeitssteigerung ist durch die neueren Prismenkreise mit Beachtung aller durch die Fehlertheorie gegebenen Winke und durch Gestirne links und rechts vom Mond zu erreichen.

§ 69. Ausgleichung zwischen Monddistanzen und Chronometergang.

Jede Monddistanz-Messung gibt eine Bestimmung der Greenwichzeit, und eine Reihe von Monddistanzen-Messungen an beliebigen Orten (auf einer Reise) gibt für das dabei benützte Chronometer das Material zur Bestimmung der Stand- und Gangcurve, ähnlich wie eine Reihe gewöhnlicher Ortszeitmessungen in Greenwich selbst, jedoch mit dem Unterschied, dass die aus Monddistanzen abgeleiteten Greenwichzeit-Bestimmungen weniger genau sind.

Mit diesem Material kann man die Stand- und Gangcurve des Chronometers auftragen, wie in unserem früheren Beispiel § 12. S. 53 für Hannover gezeigt worden ist.

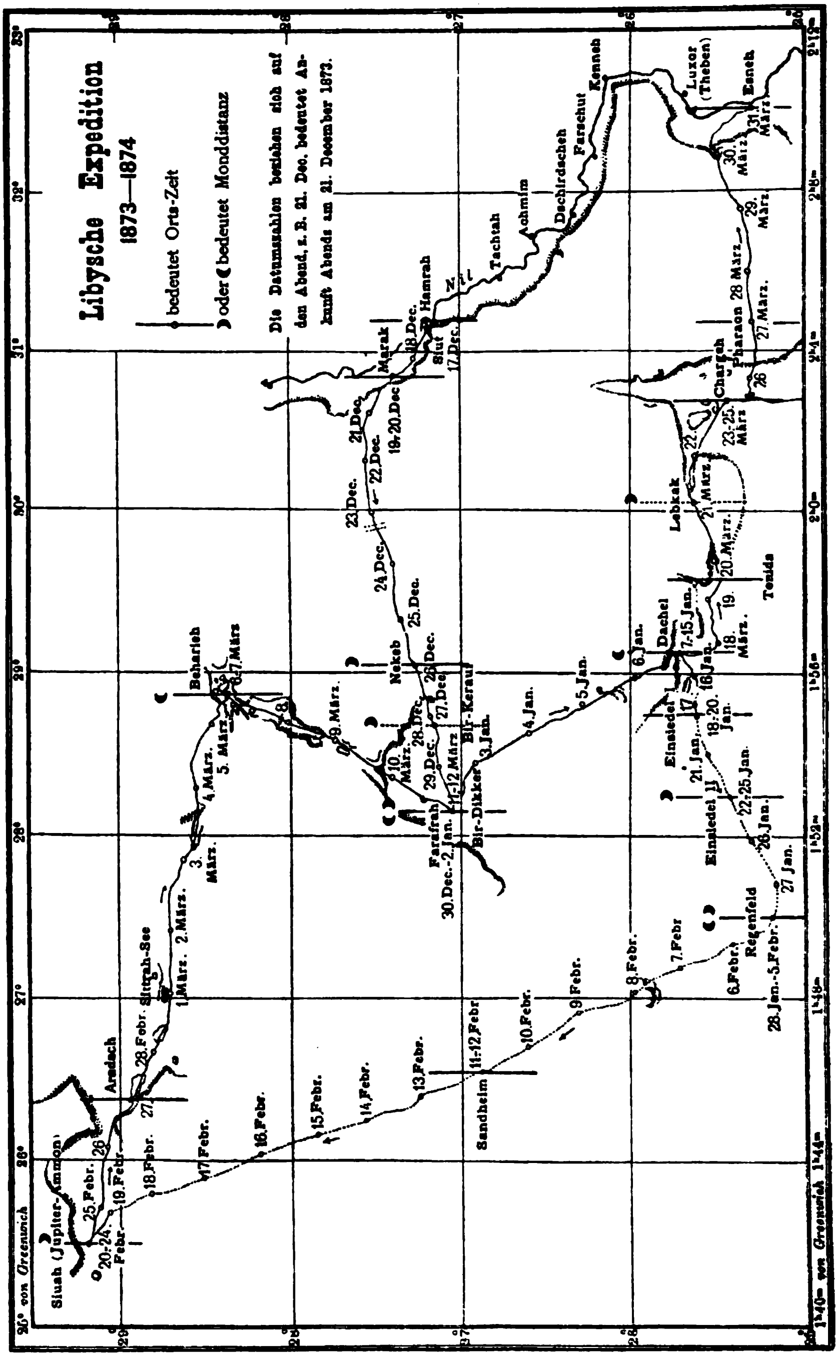
Wegen der Ungenauigkeit der aus Monddistanzen erhaltenen Greenwichzeiten wird die directe Curve allerdings zunächst sehr unregelmässig verlaufen, und eine ausgleichende Curve wird nicht durch alle Punkte selbst gehen, sondern nur diesen Punkten sich thunlichst nähern können.

Nach dieser Methode (mit Benützung verschiedener Nebenumstände, Itinerar etc.) sind z. B. die geographischen Längen erhalten worden, welche ich kurz nach der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste, in Petermann's Geogr. Mittheilungen 1875, Heft VI., S. 201—214, mit der Karte Tafel 11. veröffentlicht habe.

Besser als solche graphische Ausgleichung, allerdings auch mühsamer, ist eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche wir nun auf das Material der libyschen Expedition von 1873—74 anwenden.

Fig. 1.

Uebersichtskarte der Rohlfs'schen Expedition in die libysche Wüste, Winter 1873—74.



Ein Uebersichtskärtchen jener Expedition ist auf S. 350 gegeben, woraus vermittelst der eingeschriebenen Tageszahlen der Verlauf der Reise, soweit sie das Mitglied Jordan betrifft, ersehen werden kann.

Der Ausgangspunkt vom Nil war Hamrah bei Siut, der erste Marschtag war der 17. December 1873. Von hier ging die Reise im Nilthal abwärts nach Marak, mit 1 Tag Aufenthalt daselbst, dann westwärts über eine vegetationslose Hochebene bis zum Oasenkessel von Farafrah, mit erstem Aufenthalt, 28. December, am Brunnen Bir-Keraui. Weiter nach Westen wurde am 30. December die Oase Farafrah erreicht, Aufenthalt daselbst bis 2. Januar, dann Weitermarsch südöstlich nach der Oase Dachel, mit Aufenthalt vom 7—15 Januar. Von Dachel nach Westen pfadloser Marsch über die Stapelplätze Einsiedel I. und Einsiedel II. nach Regenfeld, wo vom 28. Januar bis 5. Februar gelagert wurde. Dann 14tägiger Zug durch das Sandmeer mit 1 Tag Aufenthalt in Sandheim, Ankunft in Siuah (Jupiter-Ammons-Oase) am 20. Februar, Aufenthalt bis 24. Februar. Es folgt die Reise nach Südosten in 10 Tagen nach der Oase Beharieh, 1 Tag Aufenthalt, dann in 4 Tagen nach Farafrah, und nach 1 Tag Pause zweiter Weg von Farafrah nach Dachel, worauf vom 18. März an die Reise östlich gieng und, nach 1 Tag Aufenthalt in der Oase Chargeh, am 31. März den Abschlusspunkt Esneh am Nil erreichte.

Dieses Itinerar hat die für die Ortsbestimmung günstige Form zweier Knotenpunkte in den Oasen Farafrah und Dachel.

(Zahlenbeispiele verschiedener astronomischer Messungen und Berechnungen von dieser Expedition sind bereits mitgetheilt worden auf S. 61, 78, 83, 84, 98, 136, 316.)

Die Monddistanzen-Messungen sind bereits auf S. 347 erwähnt. Das Chronometer war ein Taschenchronometer von Kutter in Stuttgart, dessen Temperatur als nahe constant angenommen werden kann, da es fast immer (meist auch bei Nacht) am Leibe getragen wurde.

Die zur Ausgleichung erforderlichen astronomischen Messungen zeigt folgende Tabelle, in welcher auch noch (14 *a*) Chargeh, wo keine Monddistanzen gemessen sind, für spätere Vergleichungen mit aufgenommen ist. Bei (5 *a*) Dachel sind zwar auch keine Monddistanzen gemessen, die zugehörige Ortszeit ist aber für die Gangfunction des Chronometers deswegen von Wichtigkeit, weil Dachel ein Knotenpunkt des Itinerars ist.

Hiebei bedeutet t die Zeit in Tagen, von der Mitte an rückwärts und vorwärts gezählt von $t = -54$ bis $t = +54$. Die Gesammtzeit $2 \times 54 = 108$ Tage ist verflossen von der Ortszeitbestimmung auf dem in Hinsicht auf geographische Länge fest gegebenen Ausgangspunkt Hamrah bis zur Ortszeitbestimmung auf dem ebenfalls unabänderlich gegebenen Abschlusspunkt Esneh.

Diese fest gegebenen Längen bzw. $2^h\ 4^m\ 48{,}4^s$ von Hamrah und $2^h\ 10^m\ 15{,}7^s$ von Esneh sind in der letzten Spalte der Tabelle (1) eingeschrieben. Mittelst der Ortszeiten und dieser gegebenen Längen hat man die in der Tabelle unterstrichenen Greenwichzeiten G_0 und G_{15} am Anfang und am Ende. Die übrigen Greenwichzeiten M sind aus den

Zusammenstellung der astronomischen Messungen. (1)

Nummer	Ort	Tag 1873—1874	Tag t	Ortszeit — Chronometer O	Monddistanzen-Resultat + Chronometer — Greenwichzeit	Monddistanzen-Resultat v'	Gegebene Längen λ
(0)	Hamrah	16. December	— 54	1h 9m 8,6s	G_0 = 0h 55m 39,8s		2h 4m 48,4s
(1)	Nekeb	26. „	— 44	1 0 20	M_1 = 0 55 51	0,45	
(2)	Bir-Keraui	28. „	— 42	. .	M_2 = 0 56 8	0,35	
(3)	„ „	28. „	— 42	. .	M_3 = 0 55 24	0,40	
(4)	Farafrah	2. Januar	— 37	0 56 35,8	M_4 = 0 55 16	0,40	
(5)	Dachel	9. „	— 30	1 0 22,2	M_5 = 0 55 39	0,54	
(6)	Einsiedel II.	24. „	— 15	0 57 39	M_6 = 0 56 32	0,45	
(7)	Regenfeld	31. „	— 8	0 55 5	M_7 = 0 55 27	0,30	
(8)	„	31. „	— 8	0 55 5	M_8 = 0 53 35	0,16	
(9)	„	4. Februar	— 4	0 55 9	M_9 = 0 54 59	0,37	
(10)	Siuah	22. „	+ 14	0 48 17	M_{10} = 0 52 31	0,48	
(11)	„	23. „	+ 15	0 48 18	M_{11} = 0 53 52	0,32	
(12)	Beharieh	8. März	+ 28	1 2 27	M_{12} = 0 53 3	0,27	
(13)	Farafrah	12. „	+ 32	0 59 11,0	M_{13} = 0 53 19	0,30	
(5*a*)	Dachel	17. „	+ 37	1 2 59,1	. .	. .	
(14)	Lebkak	21. „	+ 41	. .	M_{14} = 0 52 15	0,53	
(14*a*)	Chargeh	24. „	+ 44	1 10 12	. .		
(15)	Esneh	3. April	+ 54	1 18 40,2	G_{15} = 0 51 35,5		2 10 15,7

Monddistanzen bestimmt, und die beigeschriebenen v', welche nachher zur Gewichtsbestimmung gebraucht werden, sind die scheinbaren Distanz-Aenderungsgeschwindigkeiten, welche schon in § 68. S. 347 mitgetheilt worden sind.

Je zwei zusammengehörige Ortszeiten und Greenwichzeiten bestimmen eine Länge. Wir setzen:

$$O = \text{Ortszeit} - \text{Chronometer} \qquad (2)$$

$$G = -\text{Greenwichzeit} + \text{Chronometer} \qquad (3)$$

woraus folgt:

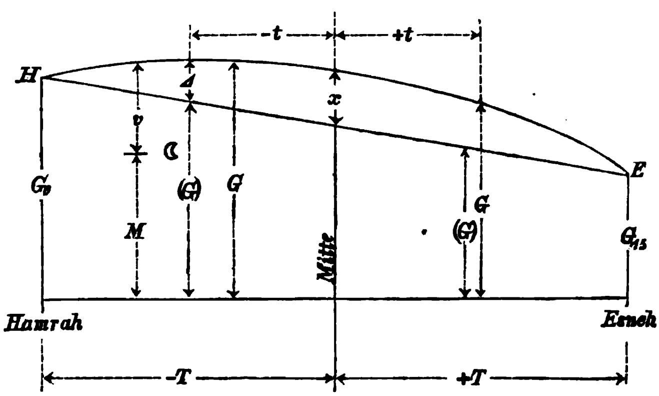
$$O + G = \lambda = \text{geographische Länge} \qquad (4)$$

Die Vorzeichen in (2) und (3) sind so gewählt, dass in unserem Falle O und G immer positiv sind. (In anderen Fällen wäre es vielleicht bequemer, G negativ und dann $\lambda = O - G$ zu nehmen.)

Von den wahren oder wahrscheinlichsten Werthen G unterscheiden sich die durch Monddistanzen gewonnenen Werthe der Greenwichzeit, welche wir mit M bezeichnet haben.

Zur Ausgleichung dieser beobachteten M setzen wir nach Fig. 2. Folgendes fest: Als erste Näherung des Chronometergangs, zwischen dem

Fig. 2.



Anfangswerth G_0 in Hamrah und dem Endwerthe G_{15} in Esneh, dient die der Zeit proportionale Vertheilung der Differenz $G_{15} - G_0$, d. h. in der Figur die Gerade HE, deren Ordinaten mit (G) bezeichnet sein sollen. Der endgültig ausgeglichene Chronometergang sei durch die Curve zwischen H und E ausgedrückt, deren Ordinaten G sind.

Die Differenz beider Ordinaten G und (G) sei $= \Delta$. Eine Monddistanz-Messung habe für die Zeit t den Werth M gegeben, welcher durch die Verbesserung v auf G gebracht wird, d. h.

$$G = (G) + \Delta = M + v \qquad (5)$$

Es kommt nun zuerst darauf an, für Δ als Function der Zeit t eine analytische Form anzunehmen.

Wir nehmen eine algebraische Reihe, welche nach Potenzen des Zeitquotienten

$$\frac{t}{T} = \tau \tag{6}$$

fortschreitet, nämlich:

$$\Delta = x + y\tau + z\tau^2 + u\tau^3 + u'\tau^4 + u''\tau^5 \tag{7}$$

Nach dem Anblick von Fig. 2. muss in zwei Fällen $\Delta = 0$ werden, erstens für $\tau = -1$ und zweitens für $\tau = +1$, also nach (7):

$$\begin{aligned} & 0 = x - y + z - u + u' - u'' \\ & 0 = x + y + z + u + u' + u'' \\ \text{Halbe Summe } & 0 = x \quad\; + z \quad\; + u' \\ \text{Halbe Differenz } & 0 = \quad y \quad + u \quad + u'' \end{aligned}$$

damit kann man u' und u'' eliminiren, es ist nämlich:

$$\begin{aligned} u' &= -(x+z) \\ u'' &= -(y+u) \end{aligned}$$

und setzt man dieses wieder in (7), so erhält man:

$$\Delta = x(1-\tau^4) + y\tau(1-\tau^4) + z\tau^2(1-\tau^2) + u\tau^3(1-\tau^2) \tag{8}$$

Zur Abkürzung sei geschrieben:

$$A = 1 - \tau^4 \quad B = \tau(1-\tau^4) \quad C = \tau^2(1-\tau^2) \quad D = \tau^3(1-\tau^2) \tag{9}$$

womit man hat:

$$\Delta = Ax + By + Cz + Du \tag{10}$$

Nun ist nach den Bezeichnungsfestsetzungen von Fig. 2. oder nach (5):

$$v = \Delta + (G) - M$$

also wegen (10):

$$v = Ax + By + Cz + Du + (G) - M \tag{11}$$

Dieses ist die Form der Fehlergleichungen für die aus den Monddistanzen abgeleiteten Greenwichzeiten M der Tabelle (1).

Wir berechnen zuerst die geradlinige Interpolation der (G) durch Vertheilung der Differenz $G_{15} - G_0 = -4^m\,4{,}3^s = -244{,}3^s$ proportional der Zeit. Auf 108 Tage vertheilt, gibt diese Differenz einen täglichen Gang von $2{,}262^s$ verzögernd. Damit werden die Werthe (G) der nachfolgenden Tabelle (12), S. 355, erhalten, welche dann auch mit Herübersetzen der M aus Tabelle (1) die Widersprüche $(G)-M$ geben.

Die Coefficienten $A\ B\ C\ D$ berechnet man nach (9), und nun kann man die Fehlergleichungen nach (11) anschreiben, welchen wir auch noch die Gewichtswurzeln $\sqrt{p} = 2v'$ beifügen.

Wenn wir hiernach die Gewichte p lediglich proportional v'^2 annehmen, wo v' die scheinbare Distanzänderungs-Geschwindigkeit nach § 66. S. 337 ist, ohne auf die Zahl der in den einzelnen Gruppen von Monddistanz-

Berechnung der Quotienten τ und der Absolutglieder $(G)-M$ (12)

Ort	Nummer	t	τ	(G)	M	$(G)-M$
Nekeb . .	1.	− 44	− 0,815	0h 55m 17,2s	0h 55m 51,0s	− 33,8s = − 0,563m
Bir-Keraui	2.	− 42	− 0,778	0 55 12,7	0 56 8,0	− 55,3 = − 0,922
" "	3.	− 42	− 0,778	0 55 12,7	0 55 24,0	− 11,3 = − 0,188
Farafrah .	4.	− 37	− 0,685	0 55 1,3	0 55 16,0	− 14,3 = − 0,238
Dachel . .	5.	− 30	− 0,556	0 54 45,5	0 55 39,0	− 53,5 = − 0,892
Einsiedel II.	6.	− 15	− 0,278	0 54 11,6	0 56 32,0	− 140,4 = − 2,340
Regenfeld .	7.	− 8	− 0,148	0 53 55,7	0 55 27,0	− 91,3 = − 1,522
" .	8.	− 8	− 0,148	0 53 55,7	0 53 35,0	+ 20,7 = + 0,345
" .	9.	− 4	− 0,074	0 53 46,7	0 54 59,0	− 72,3 = − 1,205
Siuah. . .	10.	+ 14	+ 0,259	0 53 6,0	0 52 31,0	+ 35,0 = + 0,583
" . . .	11.	+ 15	+ 0,278	0 53 3,7	0 53 52,0	− 48,3 = − 0,805
Beharieh .	12.	+ 28	+ 0,518	0 52 34,3	0 53 3,0	− 28,7 = − 0,478
Farafrah .	13.	+ 32	+ 0,593	0 52 25,3	0 53 19,0	− 53,7 = − 0,895
Dachel . .	5a.	+ 37	+ 0,685	0 52 14,0	. .	. . . .
Lebkak . .	14.	+ 41	+ 0,759	0 52 4,9	0 52 15,0	− 10,1 = − 0,168
Chargeh .	14a.	+ 44	+ 0,815	0 51 58,1	. .	. . . .

Messungen vereinigten Einzelablesungen Rücksicht zu nehmen (welche übrigens nicht sehr verschieden ist), so wird das im Wesentlichen den am Schluss des vorigen § 68. S. 348—349 dargelegten Genauigkeitsverhältnissen entsprechen.

Als Normaldistanz, welche das Gewicht $p = 1$ haben soll, nehmen wir eine solche, deren Geschwindigkeit $v' = 0{,}50$ ist ($0{,}5' = 30''$ Distanzänderung in 1 Zeitminute) und damit wird

$$\sqrt{p} = \frac{v'}{0{,}5} = 2\,v' \tag{13}$$

Nun haben wir die

Fehlergleichungen (14)

Ort	v		x	y	z	u		$\sqrt{p}$
Nekeb . . .	v_1	=	$+0{,}559\,x$	$-0{,}456\,y$	$+0{,}223\,z$	$-0{,}182\,u$	$-0{,}563$,	$\sqrt{p} = 0{,}90$
Bir-Keraui .	v_2	=	$+0{,}634\,x$	$-0{,}493\,y$	$+0{,}239\,z$	$-0{,}186\,u$	$-0{,}922$	0,70
" " .	v_3	=	$+0{,}634\,x$	$-0{,}493\,y$	$+0{,}239\,z$	$-0{,}186\,u$	$-0{,}188$	0,80
Farafrah . .	v_4	=	$+0{,}780\,x$	$-0{,}534\,y$	$+0{,}249\,z$	$-0{,}171\,u$	$-0{,}238$	0,80
Dachel . .	v_5	=	$+0{,}905\,x$	$-0{,}503\,y$	$+0{,}213\,z$	$-0{,}118\,u$	$-0{,}892$	1,08
Einsiedel II.	v_6	=	$+0{,}994\,x$	$-0{,}276\,y$	$+0{,}071\,z$	$-0{,}020\,u$	$-2{,}340$	0,90
Regenfeld .	v_7	=	$+1{,}000\,x$	$-0{,}148\,y$	$+0{,}021\,z$	$-0{,}003\,u$	$-1{,}522$	0,60
" .	v_8	=	$+1{,}000\,x$	$-0{,}148\,y$	$+0{,}021\,z$	$-0{,}003\,u$	$+0{,}345$	0,32
" .	v_9	=	$+1{,}000\,x$	$-0{,}074\,y$	$+0{,}006\,z$	$-0{,}000\,u$	$-1{,}205$	0,74
Siuah . . .	v_{10}	=	$+0{,}995\,x$	$+0{,}258\,y$	$+0{,}063\,z$	$+0{,}016\,u$	$+0{,}583$	0,96
" . . .	v_{11}	=	$+0{,}994\,x$	$+0{,}276\,y$	$+0{,}071\,z$	$+0{,}020\,u$	$-0{,}805$	0,64
Beharieh .	v_{12}	=	$+0{,}928\,x$	$+0{,}481\,y$	$+0{,}197\,z$	$+0{,}102\,u$	$-0{,}478$	0,54
Farafrah . .	v_{13}	=	$+0{,}877\,x$	$+0{,}520\,y$	$+0{,}228\,z$	$+0{,}135\,u$	$-0{,}895$	0,60
Dachel .	(v_{5a}	=	$+0{,}780\,x$	$+0{,}534\,y$	$+0{,}249\,z$	$+0{,}171\,u$)	. .	. .
Lebkak . .	v_{14}	=	$+0{,}667\,x$	$+0{,}507\,y$	$+0{,}244\,z$	$+0{,}185\,u$	$-0{,}168$	1,06
Chargeh .	(v_{14a}	=	$+0{,}559\,x$	$+0{,}456\,y$	$+0{,}223\,z$	$+0{,}182\,u$)	. .	. .

Nun hätte man schlechthin diese 14 Fehlergleichungen (ohne 5*a* und 14*a*) nach den vier Unbekannten x y z u nach der Methode d. kl. Q. aufzulösen, wenn die zwei Knotenpunkte Farafrah und Dachel nicht wären. Jeder dieser Knotenpunkte gibt aber mit den zugehörigen Ortszeitbestimmungen eine Bedingungsgleichung, die man durch Elimination der Länge λ mittelst der Beziehungen zwischen λ, G und O herstellen kann.

Nach Fig. 2. ist:

$$\varDelta = G - (G) \tag{15}$$

und zwischen dem endgültigen G, der beobachteten Ortszeit O und der Länge λ besteht die Gleichung (4):

$$\lambda = O + G \tag{4}$$

was mit (15) zusammen gibt:

$$\lambda = \varDelta + O + (G) \tag{16}$$

Nach (10) und (11) ist $\varDelta$ nichts Anderes als der betreffende Werth v der Tabelle (13) mit Weglassung des Absolutgliedes.

Wir können also aus (1), (12) und (14) die zwei auf den Knotenpunkt Farafrah bezüglichen Gleichungen von der Form (16) zusammensetzen:

$$4)\ \lambda_F = +0{,}780x - 0{,}534y + 0{,}249z - 0{,}171u + 0^h 56^m 35{,}8^s + 0^h 55^m\ 1{,}3^s$$
$$13)\ \lambda_F = +0{,}877x + 0{,}520y + 0{,}228z + 0{,}135u + 0^h 59^m 11{,}0^s + 0^h 52^m 25{,}3^s$$

Subtraction gibt:

$$0 = +\ 0{,}097x + 1{,}054y - 0{,}021z + 0{,}306u + 0^h 2^m 35{,}2^s - 0^h 2^m 36{,}0^s$$

d. h.:

$$0 = +\ 0{,}097x + 1{,}054y - 0{,}021z + 0{,}306u \qquad - 0{,}013^m \tag{17}$$

Ebenso bildet man die zwei Gleichungen von der Form (16) für den Knotenpunkt Dachel:

$$5)\ \lambda_D = +0{,}905x - 0{,}503y + 0{,}213z - 0{,}118u + 1^h 0^m 22{,}2^s + 0^h 54^m 45{,}5^s$$
$$5a)\ \lambda_D = +0{,}780x + 0{,}534y + 0{,}249z + 0{,}171u + 1^h 2^m 59{,}1^s + 0^h 52^m 14{,}0^s$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Diffe-}\\ \text{renz}\end{matrix}\right\}\ 0 = -0{,}125x + 1{,}037y + 0{,}036z + 0{,}289u + 0^h 2^m 36{,}9^s - 0^h\ 2^m 31{,}5^s$$

oder

$$0 = +0{,}125x + 1{,}037y + 0{,}036z + 0289u + 0{,}090^m \tag{18}$$

Die zwei Gleichungen (17) und (18) nimmt man zusammen, und löst sie nach z und u auf. Dieses gibt:

$$z = +\ 3{,}881x - 0{,}746y - 1{,}832 \tag{19}$$

$$u = -\ 0{,}051x - 3{,}496y - 0{,}083 \tag{20}$$

Dadurch, dass man diese Ausdrücke (19) und (20) für z und u in die Fehlergleichungen (14) einsetzt, eliminirt man dort z und u, und erhält im folgenden:

Die reducirten Fehlergleichungen: (21)

					$\sqrt{p}$
Nekeb	v_1	$= + 1{,}433\,x$	$+ 0{,}011\,y$	$- 0{,}956$,	$= 0{,}90$
Bir-Keraui	v_2	$= + 1{,}571\,x$	$- 0{,}024\,y$	$- 1{,}345$	0,70
„ „	v_3	$= + 1{,}571\,x$	$- 0{,}024\,y$	$- 0{,}611$	0,80
Farafrah	v_4	$= + 1{,}755\,x$	$- 0{,}126\,y$	$- 0{,}681$	0,80
Dachel.	v_5	$= + 1{,}738\,x$	$- 0{,}253\,y$	$- 1{,}272$	1,08
Einsiedel II.	v_6	$= + 1{,}280\,x$	$- 0{,}263\,y$	$- 2{,}468$	0,90
Regenfeld	v_7	$= + 1{,}082\,x$	$- 0{,}154\,y$	$- 1{,}560$	0,60
„	v_8	$= + 1{,}082\,x$	$- 0{,}154\,y$	$+ 0{,}307$	0,32
„	v_9	$= + 1{,}023\,x$	$- 0{,}078\,y$	$- 1{,}216$	0,74
Siuah	v_{10}	$= + 1{,}238\,x$	$+ 0{,}154\,y$	$+ 0{,}467$	0,96
„	v_{11}	$= + 1{,}269\,x$	$+ 0{,}152\,y$	$- 0{,}937$	0,64
Beharieh	v_{12}	$= + 1{,}687\,x$	$- 0{,}026\,y$	$- 0{,}846$	0,54
Farafrah	v_{13}	$= + 1{,}755\,x$	$- 0{,}126\,y$	$- 1{,}324$	0,60
Dachel	(v_{5a}	$= + 1{,}737\,x$	$- 0{,}251\,y$	$- 0{,}470$)	..
Lebkak	v_{14}	$= + 1{,}605\,x$	$- 0{,}327\,y$	$- 0{,}630$	1,06
Chargeh	(v_{14a}	$= + 1{,}424\,x$	$- 0{,}346\,y$	$- 0{,}425$)	..

Hieraus bildet man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrr} +19{,}250\,x & -1{,}515\,y & -12{,}260 = 0 \\ & +0{,}316\,y & +1{,}432 = 0 \\ & & +12{,}539 \end{array}\right\} \qquad (21a)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$x = +0{,}45^{\mathrm{m}} \pm 0{,}16^{\mathrm{m}} \qquad y = -2{,}37^{\mathrm{m}} \pm 1{,}24^{\mathrm{m}} \qquad (22)$$

oder

$$x = +27^{\mathrm{s}} \pm 10^{\mathrm{s}} \qquad (22a)$$

wozu die Bedeutung von x in Fig. 2. S. 353 von Interesse ist.

(21a) gibt auch:

$$(p\,v\,v) = 3{,}62 \qquad (23)$$

der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird also:

$$\mu = \sqrt{\frac{3{,}62}{14-2}} = \pm 0{,}55^{\mathrm{m}} \text{ oder } = \pm 33^{\mathrm{s}} \qquad (24)$$

Nach (13) gehört die Gewichtseinheit zu einer Monddistanz, welche die scheinbare Geschwindigkeit $v' = 0{,}5'$ oder $30''$ in 1 Zeitminute hat. Der Zeitfehler 33^{s} von (24) stellt also einen Distanzfehler von $16{,}5''$ vor, oder

$$M = \pm 16{,}5'' \qquad (25)$$

Dieser Monddistanz-Messungsfehler M gehört zu einer Gruppe von Einzelmessungen, und zwar, da auf S. 347 317 Messungen vorlagen, von welchen die 40 Messungen von Esneh in unserer gegenwärtigen Betrachtung nicht vertreten sind, sind im Mittel in einer Gruppe nahezu 20 Messungen enthalten (vgl. hiezu § 64. S. 321).

Nun kann man durch Einsetzen der x und y von (22) in die reducirten Fehlergleichungen (21) die einzelnen Zeitcorrectionen v berechnen. Diese Werthe v, welche in (23) und (24) zusammenwirken, sind in der folgenden Tabelle einzeln aufgeführt. (Die Vertheilung dieser v könnte in Verbindung mit S. 214 zu einigen Betrachtungen Veranlassung geben,

auf welche wir aber hier nicht eingehen.) Quadrirt man die v der Tabelle und bildet die Summe $(p\,v\,v)$, so bekommt man durch Vergleichung mit dem aus der Elimination erhaltenen $(p\,v\,v)$ in (23) eine Rechenprobe, welche genügend stimmt.

Nachdem die v einzeln berechnet sind, hat man dieselben zu den Monddistanz-Zeiten M hinzuzufügen, und erhält damit die ausgeglichenen Greenwichzeiten G. Diese endlich zu den Ortszeiten O hinzugefügt, geben die Greenwichlängen λ nach der Gleichung (4) oder (16). Man kann auch die Greenwichzeiten G durch Vermittlung der geradlinig interpolirten (G) berechnen, was z. B. für 5*a*, Dachel, und 14*a*, Chargeh, nöthig war, weil eine Monddistanzzeit hier nicht vorlag; es ist dann (G) an Stelle von M und Δ statt v eingesetzt.

Alles dieses enthält unsere folgende, letzte, Tabelle:

Bildung der Schlussresultate. (26)

Nummer	Ort	M	v	G	O	λ	
1.	Nekeb	0h 55m 51s	− 20s	0h 55m 31s	1h 0m 20s	1h 55m 51s	
2.	Bir-Keraui	0 56 8	− 34	0 55 34	. .		
3.	„ „	0 55 24	+ 9	0 55 33	. .		
4.	Farafrah	0 55 16	+ 24	0 55 40	0 56 36	1 52 16	± 13s
5.	Dachel	0 55 39	+ 6	0 55 45	1 0 22	1 56 7	± 16s
6.	Einsiedel II.	0 56 32	− 76	0 55 16	0 57 39	1 52 55	
7.	Regenfeld	0 55 27	− 44	0 54 43	0 55 5	1 49 48	1h 49m 45s ± 9s
8.	„	0 53 35	+ 70	0 54 45	0 55 5	1 49 50	
9.	„	0 54 59	− 32	0 54 27	0 55 9	1 49 36	
10.	Siuah	0 52 31	+ 39	0 53 10	0 48 17	1 41 27	1h 41m 26s ± 18s
11.	„	0 53 52	− 44	0 53 8	0 48 18	1 41 26	
12.	Beharieh	0 53 3	− 1	0 53 2	1 2 27	1 55 29	± 15s
13.	Farafrah	0 53 19	− 13	0 53 6	0 59 11	1 52 17	± 13s
5*a*.	Dachel	(0 52 14)	(+ 54)	0 53 8	1 2 59	1 56 7	± 16s
14.	Lebkak	0 52 15	+ 52	0 53 7	. .	. .	
14*a*.	Chargeh	0 51 58	+ 62	0 53 0	1 10 12	2 3 12	± 21s

Wir haben den ausgeglichenen Längen der 6 Hauptpunkte sofort auch ihre der Ausgleichung entsprechenden mittleren Fehler beigeschrieben, welche so erhalten worden sind:

Wenn es sich um eine Function

$$F = f_1 x + f_2 y \tag{27}$$

der ausgeglichenen Unbekannten x und y handelt, so ist das Gewicht P dieser Function mit Anwendung bekannter Bezeichnungen bestimmt durch

$$\frac{1}{P} = (\alpha\alpha) f_1^2 + 2(\alpha\beta) f_1 f_2 + (\beta\beta) f_2^2 \tag{28}$$

oder

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{(aa.1)} + \frac{2 f_1 f_2}{(ab.1)} + \frac{f_2^2}{(bb.1)} \tag{28a}$$

Die Coefficienten $(\alpha\alpha) = \frac{1}{(aa.1)}$ u. s. w. werden bei Gelegenheit der Elimination aus den Normalgleichungen (21 a) erhalten, in unserem Falle wurde:

$$\left.\begin{array}{ll} (aa.1) = p_x = +\ 11{,}987 \qquad & (ab.1) = +\ 2{,}500 \\ & (bb.1) = p_y = +\ 0{,}197 \end{array}\right\} \tag{29}$$

Nun ist z. B. für Farafrah nach der Tabelle (21):

$$v_4 = v_{13} = +\ 1{,}755\,x - 0{,}126\,y + \ldots$$

also für (27):

$$f_1 = +\ 1{,}755 \qquad f_2 = -\ 0{,}126 \tag{30}$$

Setzt man dieses, (30) nebst (29), in (28a) und rechnet dann:

$$M_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P}}$$

wozu μ in (24) gegeben ist, so erhält man:

$$\text{Farafrah } M_F = \pm\ 13^s$$

wie auch in der Schlusstabelle S. 358 beigeschrieben ist. Ebenso wurden auch die übrigen dort beigeschriebenen mittleren Fehler berechnet.

Die Länge von Farafrah kommt unter 4. und 13. genügend übereinstimmend heraus, wie es nach der Einführung der Knotenpunktsgleichung für Farafrah sein muss; ebenso erhält auch Dachel bei 5. und 5a. gleiches λ. Auffällig ist dagegen, dass Regenfeld aus den drei Ortszeit-Bestimmungen drei Längen erhält, welche bis zu 14^s differiren. Da die aus 7. 8. 9. folgende Bedingung für den Chronometergang in der Ausgleichung nicht aufgenommen wurde, müssen auch die entsprechenden λ nicht gleich werden. Es wäre hiernach anzunehmen, dass während des Aufenthalts in Regenfeld das Chronometer einen anderen Gang hatte, als während der vorhergehenden und nachfolgenden Märsche.

Das führt nun aber weiter zu der Bemerkung, dass wir die in der Schlusstabelle (26) erhaltenen Längen λ sachlich überhaupt nicht als Schlussresultate betrachten. Die ganze Berechnung dieses Paragraphen hat vielmehr nur die Bedeutung eines formellen Ausgleichungsbeispiels für den Fall, dass keine anderen Messungen als die hier benützten vorliegen, und dann noch die Bedeutung einer Studie über den relativen Werth von Monddistanzen im Vergleich mit Itineraren, zu welchen wir nun übergehen.

§ 70. Ausgleichung astronomischer Längenbestimmungen mit einem Itinerar.

Unter Itinerar verstehen wir die Aufnahme einer Reiselinie nach Entfernungen und Richtungen.

Als relatives Maass der Weglänge dient die zum Durchlaufen derselben erforderliche Zeit, die jeweilige Marschrichtung wird durch den Taschencompass bestimmt.

Das relative Zeitmaass kann durch Vergleichung von Meridianmärschen mit astronomischen Breitenbestimmungen, ferner durch Benützung eines Messrades oder ähnlicher dem Logg des Seemanns entsprechender Hülfsmittel auf absolutes geographisches Maass reducirt werden. Es ist überhaupt für diesen Zweck die Art der Fortbewegung (Fusswanderung, Reiten zu Pferd, zu Kameel etc.) besonderer Untersuchung zu unterwerfen. (Auf der libyschen Expedition fand ich die mittlere Kameelgeschwindigkeit = 4,0 km in 1 Stunde mit Schwankungen von 5—10 %).

Wir denken uns nun ein solches Itinerar streckenweise (etwa durchschnittlich von $^1/_2$ zu $^1/_2$ Stunde) nach Coordinaten berechnet und in grösseren Linien (von Tag zu Tag) auf geographische Breitenunterschiede und Längenunterschiede reducirt:

$$\varDelta\varphi = \frac{[s \cos \alpha]}{r}\,\varrho \qquad \varDelta\lambda = \frac{[s \sin \alpha]}{r \cos \varphi}\,\varrho$$

d. h. wir denken uns für eine Landreise dasselbe ausgeführt, was der Seemann als „einfache Schiffsrechnung“ (oder „Besteck“) mit den durch das Logg erhaltenen Entfernungen und mit den durch den Compass erhaltenen Cursen von Tag zu Tag macht.

Zur ersten Veranschaulichung des Nutzens der Itinerare für geographische Längenbestimmung nehmen wir einen einfachen Fall:

Es gehe Jemand vom Brandenburger Thor in Berlin auf der Landstrasse bis an die Havelbrücke bei Spandau, und brauche hiezu (nach Abzug aller Pausen) 2 Stunden 20 Minuten Gehzeit, die jeweiligen Marschrichtungen werden beiläufig auf 5—10^0 genau an einem Taschencompass abgeschätzt. Die Berechnung oder die Auftragung dieses Itinerars gebe von Ost nach West eine Erstreckung von 2 Stunden 6 Minuten (also eine Differenz von 14 Minuten gegen den Weg auf der Strasse selbst). Da der Aufnehmende weiss, dass er pro 1 Stunde im Mittel 5,5 km marschirt, ist also nun Spandau, Brücke, $= 5,5 \times 2,1 = 10,55$ km westlich vom Brandenburger Thor anzunehmen.

Aus bekannten Tafeln (z. B. J. Handb. II. S. 54) entnimmt man, dass unter $52^1/_2{}^0$ Breite ein Längengrad $= 67,4$ km ist, es liegt also Spandau um

$$\frac{10,55}{67,4}\,60' = +\,9,39' = 38^s$$

westlich von Berlin. Diese Bestimmung ist jedenfalls auf 10 % genau, gibt also einen mittleren Längenfehler von nur $\pm 4^s$.

Vergleicht man hiermit eine Längenbestimmung durch Monddistanzen, so würde diese in Berlin etwa $\pm 30^s$ und in Spandau ebenfalls $\pm 30^s$, also zusammen etwa $\pm 45^s$ Unsicherheit geben, oder es könnte vorkommen, dass durch Monddistanzen an den beiden genannten Punkten Spandau östlich von Berlin bestimmt würde.

Nimmt man grössere Entfernungen, so tritt der Vorzug des Itinerars allerdings immer mehr zurück, weil der Itinerarfehler mit der Entfernung wächst, der Monddistanzen-Fehler aber constant wirkt.

Indessen zeigt diese Ueberlegung, dass auch auf sehr weite Entfernungen von vielen Tagereisen, das Itinerar auf West-Ost-Linien immer noch sehr schätzenswerthe Beiträge zur geographischen Längenbestimmung bietet.

Betrachten wir ferner Reiselinien nahezu im Meridian, so wird durch die Compasspeilungen, welche nur proportional der Quadratwurzel der Entfernung auf den geographischen Längenunterschied zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt einwirken, dieser Längenunterschied auf weite Entfernungen mit einer sehr brauchbaren Genauigkeit bestimmt.

Denkt man sich also ein Itinerar nach Seegebrauch berechnet, so wird jede Strecke zwischen je zwei Ortszeitbestimmungen einen Beitrag zur Bestimmung der Chronometergang-Function liefern, dessen Genauigkeit a priori geschätzt werden kann; oder jede Itinerarstrecke liefert eine Fehlergleichung, deren Form sich im Anschluss an die Ausgleichung von § 69. sofort angeben lässt:

Es seien λ_a und λ_b die geographischen Längen zweier aufeinanderfolgender Itinerarpunkte, auf welchen die Ortszeiten O_a und O_b bestimmt worden sind, dann ist nach (4) und (5) § 69. S. 353:

$$\lambda_a = O_a + G_a = O_a + (G)_a + \Delta_a$$
$$\lambda_b = O_b + G_b = O_b + (G)_b + \Delta_b$$

also auch nach (10) § 69. S. 354:

$$\lambda_a = O_a + (G)_a + A_a x + B_a y + C_a z + D_a u$$
$$\lambda_b = O_b + (G)_b + A_b x + B_b y + C_b z + D_b u$$

Bildet man hievon die Differenz, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\Delta\lambda = \Delta O + \Delta(G) + A' x + B' y + C' z + D' u$$

ΔO und $\Delta(G)$ sind bekannt und werden als fehlerfrei behandelt, $\Delta\lambda$ ist der aus dem Itinerar gewonnene Längenunterschied, dessen mittlerer Fehler oder Gewicht a priori geschätzt ist. Bezeichnet man mit v_λ den Fehler von $\Delta\lambda$, so hat man jetzt eine Fehlergleichung:

$$v_\lambda = A' x + B' y + C' z + D' u + (\Delta O + \Delta(G) - \Delta\lambda)$$

von bekanntem Gewicht, welche für die Ausgleichung des Chronometergangs

ähnlichen Charakter hat wie die Fehlergleichungen des Systems (14) § 69. S. 355.

Denkt man sich so alle Fehlergleichungen des Itinerars aufgestellt, so kann man sowohl diese für sich selbst ausgleichen, als auch sie mit den Fehlergleichungen für die Monddistanzen (14) § 69. S. 355 zusammennehmen.

Wir haben mit unserem libyschen Material diese beiden Ausgleichungen streng durchgeführt, ebenso wie in § 69. die Ausgleichung mit Chronometer und Monddistanzen. Wir unterlassen aber, diese umständlichen Rechnungen selbst hier mitzutheilen, wohl aber dürften die Resultate in ihrer Vergleichnng nicht ohne allgemeines Interesse sein.

Diese Ausgleichungen sind eine Weiterentwicklung der in der „Phys. Geogr. und Meteor. der libyschen Wüste S. 60—65" im Jahre 1876 veröffentlichten Berechnungen. Die Weiterentwicklung bezieht sich zunächst darauf, dass die Function (8) § 69. S. 354 ein Glied mehr enthält, als die Function (1) auf S. 61. der Phys. Geogr. u. Meteor. d. lib. Wüste. Ferner war in jener ersten Ausgleichung vom Jahre 1876 ein Theil der Ortszeiten unbenützt geblieben, indem das Itinerar nur in 8 Hauptstrecken eingetheilt wurde, während bei Benützung aller Ortszeiten eine Eintheilung in 17 Itinerarstrecken möglich wird.

Indem wir nun zur Mittheilung der Resultate und zu ihrer kritischen Vergleichung übergehen, ziehen wir auch noch zwei frühere Bestimmungen zu, nämlich die Bestimmungen von Cailliaud und Letorzec vom Jahre 1826, welche bis zu unserer Expedition 1873 die einzigen Angaben über die Lage der libyschen Oasen gewesen waren, ferner unsere graphisch-empirische Ausgleichung, welche der ersten Karte der Expedition in Petermann's Mittheilungen 1875, Heft VI. Tafel 11. zu Grunde liegt.

Geographische Längen (von Greenwich).

Ort	Bestimmung von Cailliaud, 1826 I.	Bestimmung von Jordan, Chronometer, Monddistanzen und Itinerar	
		1875 graphisch-empirisch II.	1876 Meth. d. kl. Quad. III.
Siuah.	$1^h\ 43^m\ 53^s$	$1^h\ 42^m\ 0^s$	$1^h\ 42^m\ 4^s \pm 10^s$
Beharieh	1 55 55	1 55 28	1 55 47 ± 13
Farafrah	1 52 43	1 52 35	1 52 20 ± 14
Regenfeld	. .	1 50 0	1 49 40 ± 9
Dachel	1 55 57	1 56 30	1 55 54 ± 14
Chargeh	2 2 25	2 2 38	2 2 41 ± 11

Ort	Monddistanzen allein IV.	Neue Ausgleichung nach der Meth. der kl. Quadrate		
		Chronometer und Monddistanzen V.	Chronometer und Itinerar VI.	Chronometer, Monddistanzen und Itinerar VII.
Siuah	1h 41m 30s	1h 41m 26s ± 18s	1h 42m 9s ± 14s	1h 42m 7s ± 10s
Beharieh	1 55 29	1 55 29 ± 15	1 55 52 ± 18	1 55 45 ± 11
Farafrah	1 52 11	1 52 16 ± 13	1 52 23 ± 20	1 52 14 ± 9
Regenfeld	1 49 51	1 49 45 ± 9	1 49 42 ± 14	1 49 35 ± 7
Dachel	1 55 59	1 56 7 ± 16	1 55 56 ± 22	1 55 44 ± 13
Chargeh	. .	2 3 12 ± 21	1 2 42 ± 23	1 2 29 ± 8

Indem wir nun zu Vergleichungen dieser verschiedenen Resultate übergehen, betrachten wir zuerst I. und VII. und finden, dass Cailliaud's Längen von 1826 nahezu richtig waren, mit Ausnahme von Siuah, das er um $1^m\ 46^s$ oder $0^0\ 26'$ zu weit östlich setzte.

Da Einzelheiten über Cailliaud's Längenberechnungen nicht vorhanden sind, sondern nur gesagt ist, dass sie aus Monddistanzen erhalten sind, wird anzunehmen sein, dass die Resultate aus einem Compromiss zwischen Monddistanzen und einem gut geführten Itinerar (welches ausführlich mitgetheilt ist) hervorgegangen sind.

Wir vergleichen nun unsere eigenen Resultate II. bis VII. unter sich, betrachten VII. als das best bestimmte und bilden folgende Differenzen:

Ort	II.—VII.	III.—VII.	IV.—VII.	V.—VII.	VI.—VII.
Siuah	— 7s	— 3s	— 37s	— 41s	+ 2s
Beharieh	— 17	+ 2	— 16	— 16	+ 7
Farafrah	+ 21	+ 6	— 3	+ 2	+ 9
Regenfeld	+ 25	+ 5	+ 16	+ 10	+ 7
Dachel	+ 46	+ 10	+ 15	+ 23	+ 12
Chargeh	+ 9	+ 12		+ 43	+ 13
Mittel	± 21s	± 6s	± 17s	± 22s	± 7s
	empirisch-graphisch	erste Gesammtausgleichung	Monddistanzen allein	Chronometer und Monddistanzen	Chronometer und Itinerar

Diese Vergleichungen führen zu dem Schluss, dass die Monddistanzen zu der am Ende erreichten Genauigkeit verhält-

nissmässig wenig beigetragen haben, und wenn man bedenkt, dass diese Monddistanzen mit den umständlichen Sextantenfehler-Bestimmungen (§ 32. § 37. § 38. § 39. § 41.) weit mehr Mühe verursacht haben, als alle anderen astronomischen Messungen und das Itinerar zusammen genommen, so ist die Frage wohl aufzuwerfen, ob in einem ähnlichen Falle die Monddistanzen-Messung nicht ganz zu unterlassen, und die dadurch frei werdende Arbeit auf Breiten, Ortszeiten, Azimute und Itinerar zu verwenden wäre.

Obgleich unser Sextant zweifellos eine mangelhafte Theilung hat (siehe (20) S. 204 und (9) S. 214), so ist doch andererseits an Fehleruntersuchung nichts gespart worden und den Messungen selbst ist nach (2) § 68. S. 347 nichts vorzuwerfen.

Die wiederholte Diskussion des libyschen Materials kann daher wohl zu dem Schluss berechtigen, dass bei Landreisen ähnlicher Art absolute Längenbestimmungen durch Monddistanzen, Mondhöhen etc. in der Regel auf die Hauptstationen, z. B. Küstenplätze, beschränkt werden können.

Andererseits erhält ein gutes Itinerar, zu dessen Führung ausser den elementarsten mathematischen Kenntnissen nur Pünktlichkeit und guter Wille erforderlich ist, zu Lande eine viel grössere Sicherheit als das von Meeresströmungen, Abtrift etc. abhängige „Besteck“ des Seefahrers; ein solches Itinerar — das zur Topographie ohnehin nöthig ist — kann daher, in Verbindung mit Breiten und Ortszeiten mit Chronometer-Uebertragung, auf nicht zu weite Entfernungen die Monddistanzen wohl überflüssig machen.

Wenn es sich aber um feste Stationen mit allseitig wissenschaftlich gebildeten Beobachtern handelt, so kann aus den Resultaten von § 68. S. 348, wornach der mittlere unregelmässige Distanzfehler auf 3″—5″ herabgebracht werden kann, in Verbindung mit der Gesammtfehlertheorie der Reflexionsinstrumente, wohl der Schluss gezogen werden, dass es mit den neueren Prismeninstrumenten und mit günstigen Combinationen der Gestirne möglich sein muss, durch Monddistanzen Längen auf 5^s—10^s genau zu bestimmen.

Anhang.

Hülfstafeln.

Verwandlung des Bogens in Zeit.

Grade.

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
00°	0 0	0 4	0 8	0 12	0 16	0 20	0 24	0 28	0 32	0 36
10	0 40	0 44	0 48	0 52	0 56	1 0	1 4	1 8	1 12	1 16
20	1 20	1 24	1 28	1 32	1 36	1 40	1 44	1 48	1 52	1 56
30	2 0	2 4	2 8	2 12	2 16	2 20	2 24	2 28	2 32	2 36
40	2 40	2 44	2 48	2 52	2 56	3 0	3 4	3 8	3 12	3 16
50	3 20	3 24	3 28	3 32	3 36	3 40	3 44	3 48	3 52	3 56
60	4 0	4 4	4 8	4 12	4 16	4 20	4 24	4 28	4 32	4 36
70	4 40	4 44	4 48	4 52	4 56	5 0	5 4	5 8	5 12	5 16
80	5 20	5 24	5 28	5 32	5 36	5 40	5 44	4 48	5 52	5 56
90	6 0	6 4	6 8	6 12	6 16	6 20	6 24	6 28	6 32	6 36
100	6 40	6 44	6 48	6 52	6 56	7 0	7 4	7 8	7 12	7 16
110	7 20	7 24	7 28	7 32	7 36	7 40	7 44	7 48	7 52	7 56
120	8 0	8 4	8 8	8 12	8 16	8 20	8 24	8 28	8 32	8 36
130	8 40	8 44	8 48	8 52	8 56	9 0	9 4	9 8	9 12	9 16
140	9 20	9 24	9 28	9 32	9 36	9 40	9 44	9 48	9 52	9 56
150	10 0	10 4	10 8	10 12	10 16	10 20	10 24	10 28	10 32	10 36
160	10 40	10 44	10 48	10 52	10 56	11 0	11 4	11 8	11 12	11 16
170	11 20	11 24	11 28	11 32	11 36	11 40	11 44	11 48	11 52	11 56
180	12 0	12 4	12 8	12 12	12 16	12 20	12 24	12 28	12 32	12 36
190	12 40	12 44	12 48	12 52	12 56	13 0	13 4	13 8	13 12	13 16
200	13 20	13 24	13 28	13 32	13 36	13 40	13 44	13 48	13 52	13 56
210	14 0	14 4	14 8	14 12	14 16	14 20	14 24	14 28	14 32	14 36
220	14 40	14 44	14 48	14 52	14 56	15 0	15 4	15 8	15 12	15 16
230	15 20	15 24	15 28	15 32	15 36	15 40	15 44	15 48	15 52	15 56
240	16 0	16 4	16 8	16 12	16 16	16 20	16 24	16 28	16 32	16 36
250	16 40	16 44	16 48	16 52	16 56	17 0	17 4	17 8	17 12	17 16
260	17 20	17 24	17 28	17 32	17 36	17 40	17 44	17 48	17 52	17 56
270	18 0	18 4	18 8	18 12	18 16	18 20	18 24	18 28	18 32	18 36
280	18 40	18 44	18 48	18 52	18 56	19 0	19 4	19 8	19 12	19 16
290	19 20	19 24	19 28	19 32	19 36	19 40	19 44	19 48	19 52	19 56
300	20 0	20 4	20 8	20 12	20 16	20 20	20 24	20 28	20 32	20 36
310	20 40	20 44	20 48	20 52	20 56	21 0	21 4	21 8	21 12	21 16
320	21 20	21 24	21 28	21 32	21 36	21 40	21 44	21 48	21 52	21 56
330	22 0	22 4	22 8	22 12	22 16	22 20	22 24	22 28	22 32	22 36
340	22 40	22 44	22 48	22 52	22 56	23 0	23 4	23 8	23 12	23 16
350	23 20	23 24	23 28	23 32	23 36	23 40	23 44	23 48	23 52	23 56

Minuten.

′	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s
00	0 0	0 4	0 8	0 12	0 16	0 20	0 24	0 28	0 32	0 36
10	0 40	0 44	0 48	0 52	0 56	1 0	1 4	1 8	1 12	1 16
20	1 20	1 24	1 28	1 32	1 36	1 40	1 44	1 48	1 52	1 56
30	2 0	2 4	2 8	2 12	2 16	2 20	2 24	2 28	2 32	2 36
40	2 40	2 44	2 48	2 52	2 56	3 0	3 4	3 8	3 12	3 16
50	3 20	3 24	3 28	3 32	3 36	3 40	3 44	3 48	3 52	3 56

Secunden.

″	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″
	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
00	0,000	0,067	0,133	0,200	0,267	0,333	0,400	0.467	0,533	0,600
10	0,667	0,733	0,800	0,867	0,933	1,000	1,067	1.133	1,200	1,267
20	1,333	1,400	1,467	1,533	1,600	1,667	1,733	1,800	1,867	1,933
30	2,000	2,067	2,133	2,200	2,267	2,333	2,400	2,467	2,533	2,600
40	2,667	2,733	2,800	2,867	2,933	3,000	3,067	3,133	3,200	3,267
50	2,333	3,400	3,467	3,523	3,600	3,667	3,733	3.800	3,867	3,933
		0,1″ 0,007s	0,2″ 0,013s	0.3″ 0,020s	0,4″ 0,027s	0,5″ 0,033s	0,6″ 0,040s	0,7″ 0,047s	0,8″ 0,053s	0,9″ 0,060s

Verwandlung der Zeit in Bogen.

	0h	1h	2h	3h	4h	5h
0m	0°	15°	30°	45°	60°	75°
4	1	16	31	46	61	76
8	2	17	32	47	62	77
12	3	18	33	48	63	78
16	4	19	34	49	64	79
20m	5°	20°	35°	50°	65°	80°
24	6	21	36	51	66	81
28	7	22	37	52	67	82
32	8	23	38	53	68	83
36	9	24	39	54	69	84
40m	10°	25°	40°	55°	70°	85°
44	11	26	41	56	71	86
48	12	27	42	57	72	87
52	13	28	43	58	73	88
56	14	29	44	59	74	89

	6h	7h	8h	9h	10h	11h
0m	90°	105°	120°	135°	150°	165°
4	91	106	121	136	151	166
8	92	107	122	137	152	167
12	93	108	123	138	153	168
16	94	109	124	139	154	169
20m	95°	110°	125°	140°	155°	170°
24	96	111	126	141	156	171
28	97	112	127	142	157	172
32	98	113	128	143	158	173
36	99	114	129	144	159	174
40m	100°	115°	130°	145°	160°	175°
44	101	116	131	146	161	176
48	102	117	132	147	162	177
52	103	118	133	148	163	178
56	104	119	134	149	164	179

	12h	13h	14h	15h	16h	17h
0m	180°	195°	210°	225°	240°	255°
4	181	196	211	226	241	256
8	182	197	212	227	242	257
12	183	198	213	228	243	258
16	184	199	214	229	244	259
20m	185°	200°	215°	230°	245°	260°
24	186	201	216	231	246	261
28	187	202	217	232	247	262
32	188	203	218	233	248	263
36	189	204	219	234	249	264
40m	190°	205°	220°	235°	250°	265°
44	191	206	221	236	251	266
48	192	207	222	237	252	267
52	193	208	223	238	253	268
56	194	209	224	239	254	269

	18h	19h	20h	21h	22h	23h
0m	270°	285°	300°	315°	330°	345°
4	271	286	301	316	331	346
8	272	287	302	317	332	347
12	273	288	303	318	333	348
16	274	289	304	319	334	349
20m	275°	290°	305°	320°	335°	350°
24	276	291	306	321	336	351
28	277	292	307	322	337	352
32	278	293	308	323	338	353
36	279	294	309	324	339	354
40m	280°	295°	310°	325°	340°	355°
44	281	296	311	326	341	356
48	282	297	312	327	342	357
52	283	298	313	328	343	358
56	284	299	314	329	344	359

sec	0m	1m	2m	3m
0	0′ 0″	15′ 0″	30′ 0″	45′ 0″
1	0 15	15 15	30 15	45 15
2	0 30	15 30	30 30	45 30
3	0 45	15 45	30 45	45 45
4	1 0	16 0	31 0	46 0
5	1′ 15″	16′ 15″	31′ 15″	46′ 15″
6	1 30	16 30	31 30	46 30
7	1 45	16 45	31 45	46 45
8	2 0	17 0	32 0	47 0
9	2 15	17 15	32 15	47 15
10	2′ 30″	17′ 30″	32′ 30″	47′ 30″
11	2 45	17 45	32 45	47 45
12	3 0	18 0	33 0	48 0
13	3 15	18 15	33 15	48 15
14	3 30	18 30	33 30	48 30
15	3′ 45″	18′ 45″	33′ 45″	48′ 45″
16	4 0	19 0	34 0	49 0
17	4 15	19 15	34 15	49 15
18	4 30	19 30	34 30	49 30
19	4 45	19 45	34 45	49 45
20	5′ 0″	20′ 0″	35′ 0″	50′ 0″
21	5 15	20 15	35 15	50 15
22	5 30	20 30	35 30	50 30
23	5 45	20 45	35 45	50 45
24	6 0	21 0	36 0	51 0
25	6′ 15″	21′ 15″	36′ 15″	51′ 15″
26	6 30	21 30	36 30	51 30
27	6 45	21 45	36 45	51 45
28	7 0	22 0	37 0	52 0
29	7 15	22 15	37 15	52 15
30	7′ 30″	22′ 30″	37′ 30″	52′ 30″
31	7 45	22 45	37 45	52 45
32	8 0	23 0	38 0	53 0
33	8 15	23 15	38 15	53 15
34	8 30	23 30	38 30	53 30
35	8′ 45″	23′ 45″	38′ 45″	53′ 45″
36	9 0	24 0	39 0	54 0
37	9 15	24 15	39 15	54 15
38	9 30	24 30	39 30	54 30
39	9 45	24 45	39 45	54 45
40	10′ 0″	25′ 0″	40′ 0″	55′ 0″
41	10 15	25 15	40 15	55 15
42	10 30	25 30	40 30	55 30
43	10 45	25 45	40 45	55 45
44	11 0	26 0	41 0	56 0
45	11′ 15″	26′ 15″	41′ 15″	56′ 15″
46	11 30	26 30	41 30	56 30
47	11 45	26 45	41 45	56 45
48	12 0	27 0	42 0	57 0
49	12 15	27 15	42 15	57 15
50	12′ 30″	27′ 30″	42′ 30″	57′ 30″
51	12 45	27 45	42 45	57 45
52	13 0	28 0	43 0	58 0
53	13 15	28 15	43 15	58 15
54	13 30	28 30	43 30	58 30
55	13′ 45″	28′ 45″	43′ 45″	58′ 45″
56	14 0	29 0	44 0	59 0
57	14 15	29 15	44 15	59 15
58	14 30	29 30	44 30	59 30
59	14 45	29 45	44 45	59 45

0,1sec = 1,5″	0,4s = 6,0	0,7s = 10,5″
0,2 = 3,0	0,5 = 7,5	0,8 = 12,0
0,3 = 4,5	0,6 = 9,0	0,9 = 13,5

I. Verwandlung mittlerer Sonnenzeit in Sternzeit.

Sternzeit = Mittlere Sonnenzeit + Tafelwerth.

	0m	6m	12m	18m	24m	30m	36m	42m	48m	54m	Diff.
	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s
0h	0 0,0	0 1,0	0 2,0	0 3,0	0 3,9	0 4,9	0 5,9	0 6,9	0 7,9	0 8,9	1 0,2
1	0 9,9	0 10,8	0 11,8	0 12,8	0 13,8	0 14,8	0 15,8	0 16,8	0 17,7	0 18,7	2 0,3
2	0 19,7	0 20,7	0 21,7	0 22,7	0 23,7	0 24,6	0 25,6	0 26,6	0 27,6	0 28,6	3 0,5
3	0 29,6	0 30,6	0 31,5	0 32,5	0 33,5	0 34,5	0 35,5	0 36,5	0 37,5	0 38,4	4 0,7
4	0 39,4	0 40,4	0 41,4	0 42,4	0 43,4	0 44,4	0 45,3	0 46,3	0 47,3	0 48,3	5 0,8
5	0 49,3	0 50,3	0 51,3	0 52,2	0 53,2	0 54,2	0 55,2	0 56,2	0 57,2	0 58,2	6 1,0
6h	0 59,1	1 0,1	1 1,1	1 2,1	1 3,1	1 4,1	1 5,1	1 6,0	1 7,0	1 8,0	
7	1 9,0	1 10,0	1 11,0	1 12,0	1 12,9	1 13,9	1 14,9	1 15,9	1 16,9	1 17,9	
8	1 18,9	1 19,8	1 20,8	1 21,8	1 22,8	1 23,8	1 24,8	1 25,8	1 26,7	1 27,7	
9	1 28,7	1 29,7	1 30,7	1 31,7	1 32,7	1 33,6	1 34,6	1 35,6	1 36,6	1 37,6	
10	1 38,6	1 39,6	1 40,5	1 41,5	1 42,5	1 43,5	1 44,5	1 45,5	1 46,4	1 47,4	
11	1 48,4	1 49,4	1 50,4	1 51,4	1 52,4	1 53,4	1 54,3	1 55,3	1 56,3	1 57,3	
12h	1 58,3	1 59,3	2 0,3	2 1,2	2 2,2	2 3,2	2 4,2	2 5,2	2 6,2	2 7,2	
13	2 8,1	2 9,1	2 10,1	2 11,1	2 12,1	2 13,1	2 14,1	2 15,0	2 16,0	2 17,0	
14	2 18,0	2 19,0	2 20,0	2 21,0	2 21,9	2 22,9	2 23,9	2 24,9	2 25,9	2 26,9	
15	2 27,9	2 28,8	2 29,8	2 30,8	2 31,8	2 32,8	2 33,8	2 34,8	2 35,7	2 36,7	
16	2 37,7	2 38,7	2 39,7	2 40,7	2 41,7	2 42,6	2 43,6	2 44,6	2 45,6	2 46,6	
17	2 47,6	2 48,6	2 49,5	2 50,5	2 51,5	2 52,5	2 53,5	2 54,5	2 55,5	2 56,4	
18h	2 57,4	2 58,4	2 59,4	3 0,4	3 1,4	3 2,3	3 3,3	3 4,3	3 5,3	3 6,3	
19	3 7,3	3 8,3	3 9,2	3 10,2	3 11,2	3 12,2	3 13,2	3 14,2	3 15,2	3 16,1	
20	3 17,1	3 18,1	3 19,1	3 20,1	3 21,1	3 22,1	3 23,0	3 24,0	3 25,0	3 26,0	
21	3 27,0	3 28,0	3 29,0	3 29,9	3 30,9	3 31,9	3 32,9	3 33,9	3 34,9	3 35,9	
22	3 36,8	3 37,8	3 38,8	3 39,8	3 40,8	3 41,8	3 42,8	3 43,7	3 44,7	3 45,7	
23	3 46,7	3 47,7	3 48,7	3 49,7	3 50,6	3 51,6	3 52,6	3 53,6	3 54,6	3 55,6	

Genauer Werth für 24h 3m 56,5554s = 236,5554s

II. Verwandlung von Sternzeit in mittlere Sonnenzeit.

Mittlere Sonnenzeit = Sternzeit − Tafelwerth.

	0m	6m	12m	18m	24m	30m	36m	42m	48m	54m	Diff.
	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s	m s
0h	0 0,0	0 1,0	0 2,0	0 2,9	0 3,9	0 4,9	0 5,9	0 6,9	0 7,9	0 8,8	1 0,2
1	0 9,8	0 10,8	0 11,8	0 12,8	0 13,8	0 14,7	0 15,7	0 16,7	0 17,7	0 18,7	2 0,3
2	0 19,7	0 20,6	0 21,6	0 22,6	0 23,6	0 24,6	0 25,6	0 26,5	0 27,5	0 28,5	3 0,5
3	0 29,5	0 30,5	0 31,5	0 32,4	0 33,4	0 34,4	0 35,4	0 36,4	0 37,4	0 38,3	4 0,7
4	0 39,3	0 40,3	0 41,3	0 42,3	0 43,3	0 44,2	0 45,2	0 46,2	0 47,2	0 48,2	5 0,8
5	0 49,1	0 50,1	0 51,1	0 52,1	0 53,1	0 54,1	0 55,0	0 56,0	0 57,0	0 58,0	6 1,0
6h	0 59,0	1 0,0	1 0,9	1 1,9	1 2,9	1 3,9	1 4,9	1 5,9	1 6,8	1 7,8	
7	1 8,8	1 9,8	1 10,8	1 11,8	1 12,7	1 13,7	1 14,7	1 15,7	1 16,7	1 17,7	
8	1 18,6	1 19,6	1 20,6	1 21,6	1 22,6	1 23,6	1 24,5	1 25,5	1 26,5	1 27,5	
9	1 28,5	1 29,4	1 30,4	1 31,4	1 32,4	1 33,4	1 34,4	1 35,3	1 36,3	1 37,3	
10	1 38,3	1 39,3	1 40,3	1 41,2	1 42,2	1 43,2	1 44,2	1 45,2	1 46,2	1 47,1	
11	1 48,1	1 49,1	1 50,1	1 51,1	1 52,1	1 53,0	1 54,0	1 55,0	1 56,0	1 57,0	
12h	1 58,0	1 58,9	1 59,9	2 0,9	2 1,9	2 2,9	2 3,9	2 4,8	2 5,8	2 6,8	
13	2 7,8	2 8,8	2 9,8	2 10,7	2 11,7	2 12,7	2 13,7	2 14,7	2 15,6	2 16,6	
14	2 17,6	2 18,6	2 19,6	2 20,6	2 21,5	2 22,5	2 23,5	2 24,5	2 25,5	2 26,5	
15	2 27,4	2 28,4	2 29,4	2 30,4	2 31,4	2 32,4	2 33,3	2 34,3	2 35,3	2 36,3	
16	2 37,3	2 38,3	2 39,2	2 40,2	2 41,2	2 42,2	2 43,2	2 44,2	2 45,1	2 46,1	
17	2 47,1	2 48,1	2 49,1	2 50,1	2 51,0	2 52,0	2 53,0	2 54,0	2 55,0	2 55,9	
18h	2 56,9	2 57,9	2 58,9	2 59,9	3 0,9	3 1,8	3 2,8	3 3,8	3 4,8	3 5,8	
19	3 6,8	3 7,7	3 8,7	3 9,7	3 10,7	3 11,7	3 12,7	3 13,6	3 14,6	3 15,6	
20	3 16,6	3 17,6	3 18,6	3 19,5	3 20,5	3 21,5	3 22,5	3 23,5	3 24,5	3 25,4	
21	3 26,4	3 27,4	3 28,4	3 29,4	3 30,4	3 31,3	3 32,3	3 33,3	3 34,3	3 35,3	
22	3 36,3	3 37,2	3 38,2	3 39,2	3 40,2	3 41,2	3 42,1	3 43,1	3 44,1	3 45,1	
23	3 46,1	3 47,1	3 48,0	3 49,0	3 50,0	3 51,0	3 52,0	3 53,0	3 53,9	3 54,9	

Genauer Werth für 24h 3m 55,9094s = 235,9094s

Für genauere Berechnungen enthält jeder Jahrgang des Nautical Almanac etwa auf Seite 474 eine Reductionstafel für Sonnenzeit und Sternzeit auf 0,001s genau.

Mittlere Refraction als Function der scheinbaren Höhe *H*.

H	0°	Diff.	1°	Diff.	2°	Diff.	3°	Diff.	4°	Diff.	5°	Diff.
0'	34' 54''	13''	24' 25''	8''	18' 9''	5''	14' 15''	4''	11' 39''	2''	9' 46''	1''
1	34 41	12	24 17	8	18 4	5	14 11	3	11 37	2	9 45	2
2	34 29	13	24 9	8	17 59	4	14 8	3	11 35	2	9 43	1
3	34 16	13	24 1	8	17 55	5	14 5	3	11 33	2	9 42	2
4	34 3	12	23 53	8	17 50	5	14 2	3	11 31	2	9 40	1
5'	33' 51''	13	23' 45''	8	17' 45''	4	13' 59''	3	11' 29''	2	9' 39''	2
6	33 38	12	23 37	7	17 41	5	13 56	4	11 27	3	9 37	1
7	33 26	12	23 30	8	17 36	4	13 52	2	11 24	2	9 36	2
8	33 14	13	23 22	8	17 32	5	13 50	3	11 22	2	9 34	2
9	33 1	12	23 14	7	17 27	4	13 47	3	11 20	2	9 32	1
10'	32' 49''	12	23' 7''	8	17' 23''	4	13' 44''	3	11' 18''	2	9' 31''	2
11	32 37	12	22 59	7	17 19	5	13 41	3	11 16	2	9 29	1
12	32 25	11	22 52	7	17 14	4	13 38	3	11 14	2	9 28	2
13	32 14	12	22 45	7	17 10	4	13 35	3	11 12	2	9 26	1
14	32 2	12	22 38	8	17 6	4	13 32	3	11 10	2	9 25	2
15'	31' 50''	12	22' 30''	7	17' 2''	5	13' 29''	3	11' 8''	2	9' 23''	1
16	31 38	11	22 23	7	16 57	4	13 26	3	11 6	1	9 22	2
17	31 27	12	22 16	7	16 53	4	13 23	2	11 5	2	9 20	1
18	31 15	11	22 9	6	16 49	4	13 21	3	11 3	2	9 19	2
19	31 4	12	22 3	7	16 45	4	13 18	3	11 1	2	9 17	1
20'	30' 52''	11	21' 56''	7	16' 41''	4	13' 15''	3	10' 59''	2	9' 16''	1
21	30 41	10	21 49	7	16 37	5	13 12	2	10 57	2	9 15	2
22	30 31	12	21 42	6	16 32	4	13 10	3	10 55	2	9 13	1
23	30 19	11	21 36	7	16 28	4	13 7	3	10 53	2	9 12	2
24	30 8	11	21 29	7	16 24	4	13 4	2	10 51	2	9 10	1
25'	29' 57''	11	21' 22''	6	16' 20''	3	13' 2''	3	10' 49''	2	9' 9''	1
26	29 46	10	21 16	6	16 17	4	12 59	3	10 47	2	9 8	2
27	29 36	11	21 10	6	16 13	4	12 56	2	10 45	2	9 6	1
28	29 25	11	21 4	7	16 9	4	12 54	3	10 43	1	9 5	2
29	29 14	10	20 57	6	16 5	4	12 51	3	10 42	2	9 3	1
30'	29' 4''	11	20' 51''	6	16' 1''	4	12' 48''	2	10' 40''	2	9' 2''	1
31	28 53	10	20 45	6	15 57	4	12 46	3	10 38	2	9 1	2
32	28 43	10	20 39	6	15 53	3	12 43	2	10 36	2	8 59	1
33	28 33	11	20 33	6	15 50	4	12 41	3	10 34	2	8 58	2
34	28 22	10	20 27	6	15 46	4	12 38	2	10 32	2	8 56	1
35'	28' 12''	10	20' 21''	6	15' 42''	4	12' 36''	2	10' 30''	1	8' 55''	1
36	28 2	10	20 15	6	15 38	4	12 34	3	10 29	2	8 54	2
37	27 52	10	20 9	6	15 34	3	12 31	2	10 27	2	8 52	1
38	27 42	9	20 3	5	15 31	4	12 29	3	10 25	2	8 51	1
39	27 33	10	19 58	6	15 27	4	12 26	2	10 23	2	8 50	2
40'	27' 23''	10	19' 52''	6	15' 23''	3	12' 24''	3	10' 21''	2	8' 48''	1
41	27 13	9	19 46	5	15 20	4	12 21	2	10 19	1	8 47	1
42	27 4	10	19 41	6	15 16	3	12 19	2	10 18	2	8 46	1
43	26 54	9	19 35	5	15 13	4	12 17	3	10 16	2	8 45	2
44	26 45	10	19 30	6	15 9	4	12 14	2	10 14	2	8 43	1
45'	26' 35''	9	19' 24''	5	15' 5''	3	12' 12''	2	10' 12''	2	8' 42''	1
46	26 26	9	19 19	5	15 2	4	12 10	2	10 10	1	8 41	2
47	26 17	9	19 14	5	14 58	3	12 8	3	10 9	2	8 39	1
48	26 8	9	19 9	6	14 55	4	12 5	2	10 7	2	8 38	1
49	25 59	9	19 3	5	14 51	3	12 3	2	10 5	2	8 37	1
50'	25' 50''	9	18' 58''	5	14' 48''	4	12' 1''	2	10' 3''	1	8' 36''	2
51	25 41	9	18 53	5	14 44	3	11 59	3	10 2	2	8 34	1
52	25 32	8	18 48	5	14 41	3	11 56	2	10 0	2	8 33	1
53	25 24	9	18 43	5	14 38	4	11 54	2	9 58	1	8 32	1
53	25 15	9	18 38	5	14 34	3	11 52	2	9 57	2	8 31	2
55'	25' 6''	8	18' 33''	5	14' 31''	3	11' 50''	2	9' 55''	2	8' 29''	1
56	24 58	8	18 28	5	14 28	4	11 48	3	9 53	1	8 28	1
57	24 50	9	18 23	5	14 24	3	11 45	2	9 52	2	8 27	1
58	24 41	8	18 18	5	14 21	3	11 43	2	9 50	2	8 26	1
59	24 33	8	18 13	4	14 18	3	11 41	2	9 48	2	8 25	2
60	24 25		18 9		14 15		11 39		9 46		8 23	

Mittlere Refraction als Function der scheinbaren Höhe *H*.

H	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
0'	8' 23''	7' 20''	6' 30''	5' 49''	5' 16''	4' 48''	4' 25''
1	8 22	7 19	6 29	5 49	5 16	4 48	4 25
2	8 21	7 18	6 28	5 48	5 15	4 48	4 24
3	8 20	7 17	6 27	5 48	5 15	4 47	4 24
4	8 19	7 16	6 27	5 47	5 14	4 47	4 24
5'	8' 17''	7' 15''	6' 26''	5' 46''	5' 14''	4' 46''	4' 23''
6	8 16	7 14	6 25	5 46	5 13	4 46	4 23
7	8 15	7 13	6 24	5 45	5 13	4 46	4 22
8	8 14	7 12	6 24	5 44	5 12	4 45	4 22
9	8 13	7 11	6 23	5 44	5 12	4 45	4 22
10'	8' 12''	7' 10''	6' 22''	5' 43''	5' 11''	4' 44''	4' 21''
11	8 10	7 10	6 22	5 43	5 11	4 44	4 21
12	8 9	7 9	6 21	5 42	5 10	4 43	4 21
13	8 8	7 8	6 20	5 42	5 10	4 43	4 20
14	8 7	7 7	6 19	5 41	5 9	4 43	4 20
15'	8' 6''	7' 6''	6' 19''	5' 40''	5' 9''	4' 42''	4' 20''
16	8 5	7 5	6 18	5 40	5 8	4 42	4 19
17	8 4	7 4	6 17	5 39	5 8	4 41	4 19
18	8 3	7 3	6 17	5 39	5 7	4 41	4 19
19	8 1	7 3	6 16	5 38	5 7	4 41	4 18
20'	8' 0''	7' 2''	6' 15''	5' 38''	5' 6''	4' 40''	4' 18''
21	7 59	7 1	6 15	5 37	5 6	4 40	4 18
22	7 58	7 0	6 14	5 36	5 5	4 39	4 17
23	7 57	6 59	6 13	5 36	5 5	4 39	4 17
24	7 56	6 58	6 12	5 35	5 4	4 39	4 17
25'	7' 55''	6' 58''	6' 12''	5' 35''	5' 4''	4' 38''	4' 16''
26	7 54	6 57	6 11	5 34	5 4	4 38	4 16
27	7 53	6 56	6 10	5 34	5 3	4 37	4 16
28	7 52	6 55	6 10	5 33	5 3	4 37	4 15
29	7 51	6 54	6 9	5 33	5 2	4 37	4 15
30'	7' 50''	6' 53''	6' 8''	5' 32''	5' 2''	4' 36''	4' 15''
31	7 48	6 52	6 8	5 31	5 1	4 36	4 14
32	7 47	6 52	6 7	5 31	5 1	4 36	4 14
33	7 46	6 51	6 6	5 30	5 0	4 35	4 14
34	7 45	6 50	6 6	5 30	5 0	4 35	4 13
35'	7' 44''	6' 49''	6' 5''	5' 29''	4' 59''	4' 34''	4' 13''
36	7 43	6 48	6 4	5 29	4 59	4 34	4 13
37	7 42	6 48	6 4	5 28	4 59	4 34	4 12
38	7 41	6 47	6 3	5 28	4 58	4 33	4 12
39	7 40	6 46	6 2	5 27	4 58	4 33	4 12
40'	7' 39''	6' 45''	6' 2''	5' 26''	4' 57''	4' 32''	4' 11''
41	7 38	6 44	6 1	5 26	4 57	4 32	4 11
42	7 37	6 44	6 1	5 25	4 56	4 32	4 11
43	7 36	6 43	6 0	5 25	4 56	4 31	4 10
44	7 35	6 42	5 59	5 24	4 55	4 31	4 10
45'	7' 34''	6' 41''	5' 59''	5' 24''	4' 55''	4' 31''	4' 10''
46	7 33	6 40	5 58	5 23	4 55	4 30	4 9
47	7 32	6 40	5 57	5 23	4 54	4 30	4 9
48	7 31	6 39	5 57	5 22	4 54	4 29	4 9
49	7 30	6 38	5 56	5 22	4 53	4 29	4 8
50'	7' 29''	6' 37''	5' 55''	5' 21''	4' 53''	4' 29''	4' 8''
51	7 28	6 36	5 55	5 21	4 52	4 28	4 8
52	7 27	6 36	5 54	5 20	4 52	4 28	4 7
53	7 26	6 35	5 54	5 20	4 51	4 28	4 7
54	7 25	6 34	5 53	5 19	4 51	4 27	4 7
55'	7' 24''	6' 33''	5' 52''	5' 19''	4' 51''	4' 27''	4' 6''
56	7 24	6 33	5 52	5 18	4 50	4 26	4 6
57	7 23	6 32	5 51	5 18	4 50	4 26	4 6
58	7 22	6 31	5 51	5 17	4 49	4 26	4 6
59	7 21	6 30	5 50	5 17	4 49	4 25	4 5
60	7 20	6 30	5 49	5 16	4 48	4 25	4 5

Mittlere Refraction als Function der scheinbaren Höhe *H*.

H	rm	*H*	rm	*H*	rm	*H*	rm	*H*	rm
13° 0'	4' 5"	21° 0'	2' 29"	29° 0'	1' 44"	37° 0'	1' 16"	53° 0'	43"
10	4 2	10	2 28	10	1 43	20	1 16	53 20	43
20	3 59	20	2 27	20	1 42	40	1 15	53 40	42
30	3 56	30	2 26	30	1 42	38 0	1 14	54 0	42
40	3 53	40	2 24	40	1 41	20	1 13	54 20	41
50	3 50	50	2 23	50	1 40	40	1 12	54 40	41
14° 0'	3' 47"	22° 0'	2' 22"	30° 0'	1' 40"	39° 0'	1' 11"	55° 0'	40"
10	3 45	10	2 21	10	1 39	20	1 10	55 20	40
20	3 42	20	2 20	20	1 38	40	1 10	55 40	39
30	3 39	30	2 18	30	1 38	40 0	1 9	56 0	39
40	3 37	40	2 17	40	1 37	20	1 8	56 20	38
50	3 35	50	2 16	50	1 36	40	1 7	56 40	38
15° 0'	3' 32"	23° 0'	2' 15"	31° 0'	1' 36"	41° 0'	1' 6"	57° 0'	37"
10	3 30	10	2 14	10	1 35	20	1 6	57 30	37
20	3 27	20	2 13	20	1 35	40	1 5	58 0	36
30	3 25	30	2 12	30	1 34	42 0	1 4	58 30	35
40	3 23	40	2 11	40	1 33	20	1 3	59 0	35
50	3 21	50	2 10	50	1 33	40	1 3	59 30	34
16° 0'	3' 19"	24° 0'	2' 9"	32° 0'	1' 32"	43° 0'	1' 2"	60°	33"
10	3 16	10	2 8	10	1 32	20	1 1	61	32
20	3 14	20	2 7	20	1 31	40	1 0	62	31
30	3 12	30	2 6	30	1 30	44 0	1 0	63	29
40	3 10	40	2 5	40	1 30	20	0 59	64	28
50	3 8	50	2 4	50	1 29	40	0 58	65	27
17° 0'	3' 7"	25° 0'	2' 3"	33° 0'	1' 29"	45° 0'	0' 58"	66°	26"
10	3 5	10	2 2	10	1 28	20	57	67	24
20	3 3	20	2 1	20	1 27	40	56	68	23
30	3 1	30	2 0	30	1 27	46 0	56	69	22
40	2 59	40	2 0	40	1 26	20	55	70	21
50	2 57	50	1 59	50	1 26	40	54	71	20
18° 0'	2' 56"	26° 0'	1' 58"	34° 0'	1' 25"	47° 0'	0' 54"	72°	19"
10	2 54	10	1 57	10	1 25	20	54	73	18
20	2 52	20	1 56	20	1 24	40	53	74	17
30	2 51	30	1 55	30	1 24	48 0	52	75	15
40	2 49	40	1 54	40	1 23	20	51	76	14
50	2 48	50	1 54	50	1 23	40	51	77	13
19° 0'	2' 46"	27° 0'	1' 53"	35° 0'	1' 22"	49° 0'	0' 50"	78°	12"
10	2 45	10	1 52	10	1 22	20	50	79	11
20	2 43	20	1 51	20	1 21	40	49	80	10
30	2 42	30	1 50	30	1 21	50 0	48	81	9
40	2 40	40	1 50	40	1 20	20	48	82	8
50	2 39	50	1 49	50	1 20	40	47	83	7
20° 0'	2' 37"	28° 0'	1' 48"	36° 0'	1' 19"	51° 0'	0' 47"	84°	6"
10	2 36	10	1 47	10	1 19	20	46	85	5
20	2 35	20	1 47	20	1 18	40	46	86	4
30	2 33	30	1 46	30	1 18	52 0	45	87	3
40	2 32	40	1 45	40	1 17	20	45	88	2
50	2 31	50	1 45	50	1 17	40	44	89	1
21° 0'	2' 29"	29° 0'	1' 44"	37° 0'	1' 16"	53° 0'	0' 43"	90°	0"

Halbmesser der Sonne.

Tag	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1	16' 18"	16' 15"	16' 9"	16' 1"	15' 53"	15' 47"	15' 45"	15' 47"	15' 53"	16' 1"	16' 9"	16' 15"
11	16 17	16 14	16 7	15 58	15 51	15 46	15 45	15 49	15 55	16 4	16 12	16 16
21	16 17	16 11	16 4	15 56	15 49	15 45	15 46	15 51	15 58	16 6	16 14	16 17

Höhenparallaxe der Sonne $p = 8{,}9'' \cos h$.

$h =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$p =$	9"	9"	8"	8"	7"	6"	4"	3"	2"	0"

Wahre Sonnenhöhe = scheinbare Höhe — Refraction + Höhenparallaxe.

Correction der mittleren Refraction für Lufttemperatur.

t	Scheinbare Höhe																
C°	0°	0° 30′	1°	1° 30′	2°	2° 30′	3°	3° 30′	4°	4° 30′	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
−10°	4′32″	3′25″	2′39″	2′ 8″	1′45″	1′29″	1′17″	1′ 7″	1′ 0″	54″	48″	40″	35″	30″	27″	24″	+
− 9	4 17	3 18	2 30	2 1	1 40	1 24	1 13	1 3	56	51	46	38	33	28	25	23	
− 8	4 2	3 2	2 22	1 54	1 34	1 20	1 8	1 0	53	48	43	36	31	27	24	22	
− 7	3 47	2 51	2 13	1 47	1 28	1 15	1 4	56	50	45	40	34	29	25	22	20	
− 6	3 32	2 40	2 4	1 40	1 22	1 10	1 0	52	47	42	38	32	27	23	21	19	
− 5°	3′17″	2′28″	1′55″	1′33″	1′17″	1′ 5″	56″	49″	43″	39″	35″	29″	25″	22″	20″	18″	
− 4	3 2	2 18	1 47	1 26	1 11	1 0	52	45	40	36	33	27	23	20	18	16	
− 3	2 48	2 7	1 39	1 19	1 5	55	48	42	37	33	30	25	21	19	17	15	Correction positiv
− 2	2 33	1 56	1 30	1 12	1 0	51	44	38	34	30	28	23	20	17	15	14	
− 1	2 19	1 45	1 22	1 6	54	46	40	35	31	28	25	21	18	15	14	12	
0°	2′ 5″	1′34″	1′13″	59″	49″	41″	36″	31″	28″	25″	22″	19″	16″	14″	12″	11″	
1	1 51	1 24	1 5	53	43	37	32	28	25	22	20	17	14	12	11	10	
2	1 37	1 14	57	46	38	32	28	24	22	19	8	15	12	11	10	9	
3	1 24	1 3	49	40	33	28	24	21	18	17	15	13	11	9	8	7	
4	1 10	53	41	33	27	23	20	18	15	14	13	11	9	8	7	6	
5°	56″	43″	33″	27″	22″	19″	16″	14″	12″	11″	10″	8″	7″	6″	6″	5″	
6	43	33	26	20	17	14	12	11	10	9	8	6	6	5	4	4	
7	30	23	18	14	12	10	9	8	7	6	5	5	4	3	3	3	
8	17	13	10	8	7	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	
9	+4	+3	+2	+2	+2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0	+0	+0	+0	+
10°	−9″	−7″	−5″	−4″	−3″	−3″	−3″	−2″	−2″	−2″	−2″	−1″	−1″	−1″	−1″	−1″	−
11	21	16	13	10	8	7	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	
12	34	26	20	16	13	11	10	8	8	7	6	5	4	4	3	3	
13	46	35	27	22	18	15	13	12	10	9	9	7	6	6	5	4	
14	58	44	35	28	23	20	17	15	13	12	11	9	8	7	6	6	
15°	1′11″	54″	42″	34″	28″	24″	20″	18″	16″	14″	13″	11″	9″	8″	7″	7″	
16	1 23	1 3	49	40	33	28	24	21	19	17	15	13	11	10	8	8	
17	1 35	1 12	56	45	38	32	27	24	21	19	18	14	12	11	10	9	
18	1 46	1 21	1 3	51	42	36	31	27	24	22	20	16	14	12	11	10	
19	1 58	1 30	1 10	56	47	40	34	30	27	24	22	18	16	14	12	11	
20°	2′10″	1′39″	1′17″	1′ 2″	52″	44″	38″	33″	30″	26″	24″	20″	17″	15″	13″	12″	
21	2 21	1 48	1 24	1 8	56	48	41	36	32	29	26	22	19	17	14	13	
22	2 33	1 56	1 31	1 13	1 1	52	44	39	35	31	28	24	20	18	16	14	Correction negativ
23	2 44	2 5	1 38	1 19	1 5	55	48	42	37	33	30	25	22	19	17	15	
24	2 55	2 14	1 44	1 24	1 10	59	51	45	40	36	32	27	23	20	18	16	
25°	3′ 7″	2′22″	1′51″	1′30″	1′14″	1′ 8″	54″	48″	42″	38″	34″	29″	25″	22″	19″	17″	
26	3 17	2 30	1 58	1 35	1 19	1 7	58	50	45	40	36	30	26	23	20	18	
27	3 28	2 39	2 4	1 40	1 23	1 11	1 1	53	48	43	38	32	28	24	22	19	
28	3 39	2 47	2 10	1 45	1 28	1 14	1 4	56	50	45	41	34	29	26	23	20	
29	3 50	2 55	2 17	1 51	1 32	1 18	1 7	59	52	47	43	36	31	27	24	21	
30°	4′ 1″	3′ 3″	2′24″	1′56″	1′36″	1′22″	1′10″	1′ 2″	55″	49″	45″	37″	32″	28″	25″	22″	
31	4 11	3 11	2 30	2 1	1 40	1 25	1 14	1 4	57	52	47	39	34	29	26	23	
32	4 21	3 19	2 36	2 6	1 45	1 29	1 17	1 7	1 0	54	49	41	35	31	27	24	
33	4 32	3 27	2 42	2 12	1 49	1 32	1 20	1 10	1 2	56	50	42	36	32	28	25	
34	4 42	3 35	2 48	2 17	1 53	1 36	1 23	1 12	1 5	58	52	44	38	33	29	26	
35	4 52	3 43	2 55	2 22	1 57	1 40	1 26	1 15	1 7	60	54	46	39	34	30	27	−

Correction der mittleren Refraction für Lufttemperatur.

t	Scheinbare Höhe *H*																			
C°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	18°	20°	22°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	
−10°	24"	22"	20"	18"	17"	16"	15"	13"	12"	10"	9"	7"	6"	5"	4"	4"	2"	1"	1"	+
− 9	23	21	19	17	16	15	14	12	11	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	
− 8	22	19	18	16	15	14	13	12	10	9	8	6	5	4	4	3	2	1	1	
− 7	20	18	17	15	14	13	12	11	10	9	8	6	5	4	4	3	2	1	1	
− 6	19	17	16	14	13	12	12	10	9	8	7	6	5	4	3	3	2	1	1	
− 5°	18"	16"	14"	13"	12"	12"	10"	9"	9"	8"	7"	5"	4"	4"	3"	3"	2"	1"	1"	
− 4	16	15	13	12	11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1	0	
− 3	15	14	12	11	10	10	9	8	7	6	6	4	4	3	3	2	2	1	0	
− 2	14	12	11	10	10	9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	2	1	1	0	
− 1	12	11	10	9	9	8	8	7	6	5	5	4	3	3	2	2	1	1	0	
0°	11"	10"	9"	8"	8"	7"	7"	6"	6"	5"	4"	3"	3"	2"	2"	2"	1"	1"	0"	Correction positiv
1	10	9	8	8	7	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	2	1	1	0	
2	9	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	
3	7	7	6	6	5	5	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	
4	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	
5°	5"	5	4	4"	4"	3"	3	3"	3"	2"	2"	2"	1"	1"	1"	1"	1"	0"	0"	
6	4	4	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	
7	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+
10°	−1"	−1"	−1"	−1"	−1"	−1"	−1"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−0"	−
11	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
12	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
13	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	
14	6	5	5	4	4	4	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	
15°	7"	6"	6"	5"	5"	4"	4"	4"	3"	3"	2"	2"	2"	1"	1"	1"	1"	0"	0"	
16	8	7	6	6	5	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0	
17	9	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	
18	10	9	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1	0	
19	11	10	9	8	8	7	7	6	5	5	4	3	3	2	2	2	1	1	0	
20°	12"	11"	10"	9"	8"	8"	7"	6"	6"	5"	5"	4"	3"	3"	2"	2"	1"	1"	0"	
21	13	12	11	10	9	9	8	7	6	6	5	4	3	3	2	2	1	1	0	
22	14	13	12	11	10	9	9	8	7	6	5	4	4	3	2	2	1	1	0	
23	15	14	12	12	11	10	9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	2	1	0	
24	16	15	13	12	11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	3	2	2	1	0	
25°	17"	16"	14"	13"	12"	11"	11"	9"	9"	8"	7"	5"	4"	4"	3"	2"	2"	1"	1"	Correction negativ
26	18	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	3	2	1	1	
27	19	17	16	15	14	13	12	10	9	8	7	6	5	4	3	3	2	1	1	
28	20	18	17	15	14	13	13	11	10	9	8	6	5	4	4	3	2	1	1	
29	21	19	18	16	15	14	13	12	10	9	8	6	5	4	4	3	2	1	1	
30°	22"	20"	18"	17"	16"	15"	14"	12"	11"	10"	9"	7"	6"	5"	4"	3"	2"	1"	1"	
31	23	22	19	18	16	15	14	13	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1	1	
32	24	22	20	19	17	16	15	13	12	11	9	7	6	5	4	4	2	2	1	
33	25	23	21	19	18	17	16	14	12	11	10	8	6	5	4	4	3	2	1	
34	26	24	22	20	18	17	16	14	13	11	10	8	7	6	5	4	3	2	1	
35	27	25	23	21	19	18	17	15	13	12	10	8	7	6	5	4	3	2	1	−

Correction der mittleren Refraction für Barometerstand.

Bar.	Scheinbare Höhe														
	0°	0° 30′	1°	1° 30′	2°	2° 30′	3°	3° 30′	4°	4° 30′	5°	6°	7°	8°	
770mm	57″	46″	38″	32″	28″	24″	21″	19″	18″	16″	15″	12″	11″	10″	+
768	51	41	34	29	25	22	19	17	16	14	13	11	10	9	
766	45	36	30	25	22	19	17	15	14	12	11	10	9	8	
764	39	31	26	22	19	16	14	13	12	11	10	8	7	7	Correction positiv
762	32	26	22	18	16	14	12	11	10	9	8	7	6	5	
760mm	26″	21″	18″	15″	13″	11″	10″	9″	8″	7″	7″	6″	5″	4″	
758	20	16	13	11	10	9	7	7	6	6	5	4	4	3	
756	14	11	9	8	7	6	5	5	4	4	4	3	3	2	
754	8	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	
752	+ 2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 0	+
750mm	− 5″	− 4″	− 3″	− 3″	− 2″	− 2″	− 2″	− 2″	− 1″	− 1″	− 1″	− 1″	− 1″	− 1″	−
748	11	9	7	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	2	
746	17	14	11	10	8	7	6	6	5	5	4	4	3	3	
744	23	19	15	13	11	10	9	8	7	6	6	5	4	4	
742	29	24	20	17	14	12	11	10	9	8	8	6	6	5	
740mm	35″	29″	24″	20″	17″	15″	13″	12″	11″	10″	9″	8″	7″	6″	
738	42	34	28	23	20	18	16	14	13	12	11	9	8	7	
736	48	39	32	27	23	20	18	16	15	13	12	10	9	8	
734	54	44	36	30	26	23	20	18	17	15	14	12	10	9	
732	1 0	49	40	34	29	26	23	20	18	17	15	13	11	10	
730mm	1′ 6″	54″	44″	37″	32″	28″	25″	22″	20″	19″	17″	14″	13″	11″	
728	1 12	59	48	41	35	31	27	24	22	20	19	16	14	12	
726	1 18	1 4	53	44	38	34	30	27	24	22	20	17	15	13	
724	1 25	1 9	57	48	41	36	32	29	26	24	22	19	16	14	
722	1 31	1 14	1 1	51	44	39	34	31	28	25	23	20	17	15	
720mm	1′ 37″	1′ 19″	1′ 5″	55″	47″	41″	37″	33″	30″	27″	25″	21″	19″	16″	Correction negativ
718	1 43	1 24	1 9	58	50	44	39	35	32	29	26	23	20	17	
716	1 49	1 29	1 13	1 2	53	47	41	37	34	31	28	24	21	18	
714	1 55	1 33	1 17	1 5	56	49	44	39	36	32	30	25	22	20	
712	2 1	1 38	1 21	1 9	59	52	46	41	37	34	31	27	23	21	
710mm	2′ 8″	1′ 43″	1′ 26″	1′ 12″	1′ 2″	54″	48″	43″	39″	36″	33″	28″	24″	22″	
708	2 14	1 48	1 30	1 15	1 5	57	51	45	41	37	34	29	26	23	
706	2 20	1 53	1 34	1 19	1 8	1 0	53	47	43	39	36	31	27	24	
704	2 26	1 58	1 38	1 22	1 11	1 2	55	49	45	41	38	32	28	25	
702	2 32	2 3	1 42	1 26	1 14	1 5	58	51	47	43	39	33	29	26	
700mm	2′ 38″	2′ 8″	1′ 46″	1′ 29″	1′ 17″	1′ 8″	1′ 0″	53″	49″	44″	41″	35″	30″	27″	
698	2 44	2 13	1 50	1 33	1 20	1 10	1 2	56	51	46	42	36	32	28	
696	2 50	2 18	1 54	1 36	1 23	1 13	1 5	58	52	48	44	37	33	29	
694	2 56	2 23	1 58	1 40	1 26	1 15	1 7	1 0	54	49	45	39	34	30	
692	3 3	2 28	2 2	1 43	1 29	1 18	1 9	1 2	56	51	47	40	35	31	
690mm	3′ 9″	2′ 33″	2′ 6″	1′ 46″	1′ 32″	1′ 21″	1′ 12″	1′ 4″	58″	53″	49″	41″	36″	32″	
688	3 15	2 38	2 11	1 50	1 35	1 23	1 14	1 6	60	55	50	43	37	33	
686	3 21	2 43	2 15	1 53	1 38	1 26	1 16	1 8	62	56	52	44	39	34	
684	3 27	2 48	2 19	1 56	1 41	1 28	1 18	1 10	64	58	53	46	40	35	
682	3 33	2 53	2 23	2 0	1 44	1 31	1 21	1 12	66	60	55	47	41	36	
680	3 39	2 58	2 27	2 24	1 47	1 34	1 23	1 14	68	62	56	48	42	37	−

Correction der mittleren Refraction für Barometerstand.

Bar.	Scheinbare Höhe															
	8°	9°	10°	11°	12°	13°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
770mm	10″	9″	8″	7″	6″	6″	5″	4″	3″	2″	2″	1″	1″	1″	0″	+
768	9	8	7	6	6	5	5	3	3	2	1	1	1	0	0	Correction positiv
766	8	7	6	6	5	5	4	3	2	2	1	1	1	0	0	
764	7	6	5	5	4	4	4	2	2	2	1	1	1	0	0	
762	5	5	4	4	4	3	3	2	2	1	1	1	0	0	0	
760mm	4″	4″	4″	3″	3″	3″	2″	2″	1″	1″	1″	1″	0″	0″	0″	
758	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	
756	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
754	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
752	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+
750mm	−1″	−1″	−1″	−1″	−1″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−0″	−
748	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
746	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	
744	4	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	
742	5	4	4	4	3	3	3	2	2	1	1	1	0	0	0	
740mm	6″	5″	5″	4″	4″	4″	3″	2″	2″	2″	1″	1″	0″	0″	0″	
738	7	6	6	5	5	4	4	3	2	2	1	1	1	0	0	
736	8	7	7	6	5	5	4	3	3	2	1	1	1	0	0	
734	9	8	7	7	6	6	5	4	3	2	2	1	1	0	0	
732	10	9	8	7	7	6	6	4	3	3	2	1	1	1	0	
730mm	11″	10″	9″	8″	8″	7″	6″	5″	4″	3″	2″	1″	1″	1″	0″	
728	12	11	10	9	8	8	7	5	4	3	2	2	1	1	0	
726	13	12	11	10	9	8	7	5	4	3	2	2	1	1	0	
724	14	13	12	11	10	9	8	6	4	4	3	2	1	1	0	
722	15	14	12	11	10	10	8	6	5	4	3	2	1	1	0	
720mm	16″	15″	13″	12″	11″	10″	9″	7″	5″	4″	3″	2″	1″	1″	0″	Correction negativ
718	17	16	14	13	12	11	9	7	5	4	3	2	2	1	0	
716	18	17	15	14	13	12	10	7	6	5	3	2	2	1	0	
714	20	18	16	14	13	12	11	8	6	5	3	2	2	1	0	
712	21	18	17	15	14	13	11	8	6	5	4	3	2	1	1	
710mm	22″	19″	18″	16″	15″	14″	12″	9″	7″	6″	4″	3″	2″	1″	1″	
708	23	20	18	17	15	14	12	9	7	6	4	3	2	1	1	
706	24	21	19	17	16	15	13	10	7	6	4	3	2	1	1	
704	25	22	20	18	17	15	13	10	8	6	4	3	2	1	1	
702	26	23	21	19	18	16	14	10	8	7	5	3	2	1	1	
700mm	27″	24″	22″	20″	18″	17″	15″	11″	8″	7″	5″	3″	2″	1″	1″	
698	28	25	23	21	19	17	15	11	9	7	5	3	2	1	1	
696	29	26	23	21	20	18	16	12	9	7	5	4	2	2	1	
694	30	27	24	22	20	19	16	12	9	8	5	4	2	2	1	
692	31	28	25	23	21	19	17	12	10	8	5	4	3	2	1	
690mm	32″	29″	26″	24″	22″	20″	17″	13″	10″	8″	6″	4″	3″	2″	1″	
688	33	30	27	24	22	21	18	13	10	8	6	4	3	2	1	
686	34	31	28	25	23	21	19	14	11	9	6	4	3	2	1	
684	35	32	28	26	24	22	19	14	11	9	6	4	3	2	1	
682	36	32	30	27	25	23	20	15	11	9	6	4	3	2	1	
680	37	33	30	27	25	23	20	15	12	10	7	5	3	2	1	−

Tafel zur genaueren Berechnung der Refraction mit logarithmischen Correctionen.

$\log r = \log r_m + \lambda \log \gamma + A \log B.$ $\log r_m = \log \alpha + \log \mathrm{cotg}\, H.$

t C°	log γ	Diff.	Qo	log B	Diff.	Qo	log B	Diff.	H	log α	λ	A
−10	+ 0.0306	16	780mm	+ 0.0162	6	735mm	− 0.0096	6	0° 0′		1.78	1.11
− 9	+ 0.0290	17	779	+ 0.0156	6	734	− 0.0102	6	10		1.68	1.10
− 8	+ 0.0273	16	778	+ 0.0150	5	733	− 0.0108	6	20		1.63	1.09
− 7	+ 0.0257	16	777	+ 0.0145	6	732	− 0.0114	6	30		1.58	1.08
− 6	+ 0.0241		776	+ 0.0139		731	− 0.0120		40		1.54	1.07
		16			5			6	50		1.50	1.06
− 5°	+ 0.0225	16	775mm	+ 0.0134	6	730mm	− 0.0126	6				
− 4	+ 0.0209	16	774	+ 0.0128	6	729	− 0.0132	6	1° 0′		1.47	1.06
− 3	+ 0.0193	16	773	+ 0.0122	5	728	− 0.0138	6	10		1.43	1.05
− 2	+ 0.0177	16	772	+ 0.0117	6	727	− 0.0144	6	20		1.41	1.05
− 1	+ 0.0161		771	+ 0.0111		726	− 0.0150		30		1.38	1.05
		16			5			6	40		1.36	1.04
0°	+ 0.0145	16	770mm	+ 0.0106	6	725mm	− 0.0156	6	50		1.33	1.04
1	+ 0.0129	16	769	+ 0.0100	6	724	− 0.0162	6				
2	+ 0.0113	15	768	+ 0.0094	5	723	− 0.0168	6	2° 0′		1.31	1.04
3	+ 0.0098	16	767	+ 0.0089	6	722	− 0.0174	6	2 30		1.26	1.03
4	+ 0.0082		766	+ 0.0083		721	− 0.0180		3 0		1.22	1.02
		16			6			6	3 30		1.19	1.02
5°	+ 0.0066	15	765mm	+ 0.0077	5	720mm	− 0.0186	6	4 0		1.16	1.02
6	+ 0.0051	16	764	+ 0.0072	6	719	− 0.0192	6	4 30		1.14	1.01
7	+ 0.0035	15	763	+ 0.0066	6	718	− 0.0198	6				
8	+ 0.0020	15	762	+ 0.0060	6	717	− 0.0204	6	5°		1.12	1.01
9	+ 0.0005		761	+ 0.0054		716	− 0.0210		6		1.10	1.01
		14			5			6	7		1.08	1.01
10°	− 0.0011	15	760mm	+ 0.0049	6	715mm	− 0.0216	6	8		1.06	1.01
11	− 0.0026	15	759	+ 0.0043	6	714	− 0.0222	6	9		1.05	1.00
12	− 0.0041	15	758	+ 0.0037	5	713	− 0.0228	6	10	1.7462	1.04	1.00
13	− 0.0056	15	757	+ 0.0032	6	712	− 0.0234	7				
14	− 0.0071		756	+ 0.0026		711	− 0.0241		11°	1.7488	1.04	
		15			6			6	12	1.7507	1.03	
15°	− 0.0086	15	755mm	+ 0.0020	6	710mm	− 0.0247	6	13	1.7523	1.03	
16	− 0.0101	15	754	+ 0.0014	5	709	− 0.0253	6	14	1.7536	1.02	
17	− 0.0116	15	753	+ 0.0009	6	708	− 0.0259	6	15	1.7546	1.02	
18	− 0.0131	15	752	+ 0.0003	6	707	− 0.0265	6	16	1.7554	1.02	
19	− 0.0146		751	− 0.0003		706	− 0.0271					
		15			6			6	17°	1.7562	1.02	
20°	− 0.0161	16	750mm	− 0.0009	5	705mm	− 0.0277	7	18	1.7568	1.01	
21	− 0.0175	15	749	− 0.0014	6	704	− 0.0284	6	19	1.7573	1.01	
22	− 0.0190	15	748	− 0.0020	6	703	− 0.0290	6	20	1.7577	1.01	
23	− 0.0205	16	747	− 0.0026	6	702	− 0.0296	6	21	1.7581	1.01	
24	− 0.0219		746	− 0.0032		701	− 0.0302		22	1.7584	1.01	
		15			6			6				
25°	− 0.0234	16	745mm	− 0.0038	6	700mm	− 0.0308	63	23°	1.7587	1.01	
26	− 0.0248	15	744	− 0.0044	5	690	− 0.0371	63	24	1.7590	1.01	
27	− 0.0263	16	743	− 0.0049	6	680	− 0.0434	65	25	1.7592	1.01	
28	− 0.0277	16	742	− 0.0055	6	670	− 0.0499	65	26	1.7594	1.01	
29	− 0.0291		741	− 0.0061		660	− 0.0564		27	1.7596	1.01	
		15			6			66				
30°	− 0.0306	16	740mm	− 0.0067	6	650mm	− 0.0630	67	30°	1.7600	1.00	
31	− 0.0320	16	739	− 0.0073	6	640	− 0.0697	69	40	1.7608		
32	− 0.0334	16	738	− 0.0079	6	630	− 0.0766	69	50	1.7612		
33	− 0.0348	16	737	− 0.0085	6	620	− 0.0835	71	60	1.7614		
34	− 0.0362	16	736	− 0.0091	5	610	− 0.0906	72	70	1.7615		
35	− 0.0376		735	− 0.0096		600	− 0.0978		90	1.7616		

(vgl. S. 27)

Mittlere Refraction als Function der wahren Höhe *h*.

Scheinbare Höhe H = wahre Höhe h + Refraction r'.

h	*r'*	Diff.
− 0° 30'	34' 8"	101"
− 0 20	32 22	98
− 0 10	30 44	92
0° 0'	29' 12"	87
10	27 45	82
20	26 23	77
30	25 6	72
40	23 54	67
50	22 47	63
1° 0'	21' 44"	58
10	20 46	53
20	19 53	50
30	19 3	46
40	18 17	43
50	17 34	40
2° 0'	16' 54"	38
10	16 16	36
20	15 40	35
30	15 5	32
40	14 33	31
50	14 2	29
3° 0'	13' 33"	26
10	13 7	25
20	12 42	24
30	12 18	22
40	11 56	20
50	11 36	20
4° 0'	11' 16"	19
10	10 57	19
20	10 38	17
30	10 21	18
40	10 3	16
50	9 47	15
5° 0'	9' 32"	15
10	9 17	14
20	9 3	13
30	8 50	13
40	8 37	12
50	8 25	11
6° 0'	8' 14"	11
10	8 3	11
20	7 52	10
30	7 42	10
40	7 32	10
50	7 22	9
7° 0'	7 13	

h	*r'*	Diff.
7° 0'	7' 13"	9"
10	7 4	8
20	6 56	8
30	6 48	8
40	6 40	8
50	6 32	7
8° 0'	6' 25"	7
10	6 18	7
20	6 11	7
30	6 4	6
40	5 58	6
50	5 52	6
9° 0'	5' 46"	6
10	5 40	6
20	5 34	5
30	5 29	5
40	5 24	5
50	5 19	5
10° 0'	5' 14"	5
10	5 9	5
20	5 4	5
30	4 59	4
40	4 55	4
50	4 51	5
11° 0'	4' 46"	4
10	4 42	4
20	4 38	3
30	4 35	4
40	4 31	4
50	4 27	4
12° 0'	4' 23"	3
10	4 20	3
20	4 17	4
30	4 13	3
40	4 10	3
50	4 7	3
13° 0'	4' 4"	3
10	4 1	3
20	3 58	3
30	3 55	3
40	3 52	3
50	3 49	2
14° 0'	3' 47"	3
10	3 44	3
20	3 41	2
30	3 39	3
40	3 36	2
50	3 34	3
15° 0'	3 31	

h	*r'*	Diff.
15° 0'	3' 31"	2"
10	3 29	2
20	3 27	3
30	3 24	2
40	3 22	2
50	3 20	2
16° 0'	3' 18"	2
10	3 16	2
20	3 14	2
30	3 12	2
40	3 10	2
50	3 8	2
17° 0'	3' 6"	2
10	3 4	2
20	3 2	1
30	3 1	2
40	2 59	2
50	2 57	2
18° 0'	2' 55"	1
10	2 54	2
20	2 52	2
30	2 50	1
40	2 49	2
50	2 47	1
19° 0'	2' 46"	2
10	2 44	1
20	2 43	2
30	2 41	1
40	2 40	2
50	2 38	1
20° 0'	2' 37"	1
10	2 36	2
20	2 34	1
30	2 33	1
40	2 32	2
50	2 30	1
21° 0'	2' 29"	1
10	2 28	2
20	2 26	1
30	2 25	1
40	2 24	1
50	2 23	1
22° 0'	2' 22"	2
10	2 20	1
20	2 19	1
30	2 18	1
40	2 17	1
50	2 16	1
23° 0'	2 15	

h	*r'*	Diff.
23° 0'	2' 15"	1"
10	2 14	1
20	2 13	1
30	2 12	1
40	2 11	1
50	2 10	1
24° 0'	2' 9"	1
10	2 8	1
20	2 7	1
30	2 6	1
40	2 5	1
50	2 4	1
25° 0'	2' 3"	1
10	2 2	1
20	2 1	1
30	2 0	1
40	1 59	1
50	1 58	0
26° 0'	1' 58"	1
10	1 57	1
20	1 56	1
30	1 55	1
40	1 54	1
50	1 53	0
27° 0'	1' 53"	1
10	1 52	1
20	1 51	1
30	1 50	0
40	1 50	1
50	1 49	1
28° 0'	1' 48"	1
10	1 47	0
20	1 47	1
30	1 46	1
40	1 45	1
50	1 44	0
29° 0'	1' 44"	1
10	1 43	1
20	1 42	0
30	1 42	1
40	1 41	1
50	1 40	0
30° 0'	1' 40"	1
10	1 39	1
20	1 38	0
30	1 38	1
40	1 37	1
50	1 36	0
31° 0'	1 36	

Bei Höhen über 81° kann die frühere Tafel S. [7] auch für wahre Höhen benützt werden.

(vgl. S. 30)

Sonnendeclination, Zeitgleichung, Sternzeit, Sonnenaufgang, Sonnenuntergang.

Tag	Sonnen-declination δ	Zeit-gleichung g	Sternzeit im mittl. Mittag	Sonnenaufgang Berlin $\varphi = 52^\circ 30'$	Sonnenaufgang Karlsruhe $\varphi = 49^\circ 0'$	Sonnenuntergang Berlin $\varphi = 52^\circ 30'$	Sonnenuntergang Karlsruhe $\varphi = 49^\circ 0'$
1. Januar	− 22° 59′	+ 3m 59s	18h 45m	8h 13m	7h 57m	3h 55m	4m 11s
7. „	− 22 20	+ 6 42	19 8	8 12	7 55	4 2	4 19
14. „	− 21 15	+ 9 28	19 36	8 7	7 52	4 13	4 28
21. „	− 19 49	+ 11 42	20 4	8 0	7 46	4 24	4 38
28. „	− 18 6	+ 13 18	20 31	7 50	7 38	4 37	4 49
4. Februar	− 16° 6′	+ 14m 14s	20h 59m	7h 39m	7h 28m	4h 50m	5h 0s
11. „	− 13 54	+ 14 30	21 26	7 27	7 17	5 4	5 13
18. „	− 11 29	+ 14 10	21 54	7 12	7 5	5 17	5 24
25. „	− 8 57	+ 13 15	22 22	6 57	6 52	5 30	5 35
4. März	− 6° 17′	+ 11m 52s	22h 49m	6h 42m	6h 38s	5h 43m	5h 46m
11. „	− 3 34	+ 10 8	23 17	6 26	6 23	5 56	5 58
18. „	− 0 48	+ 8 9	23 44	6 9	6 8	6 8	6 8
25. „	+ 1 58	+ 6 2	0 12	5 53	5 53	6 20	6 19
1. April	+ 4° 41′	+ 3m 58s	0h 40m	5h 36m	5h 39s	6h 32m	6h 29s
8. „	+ 7 20	+ 1 49	1 7	5 20	5 24	6 45	6 40
15. „	+ 9 54	− 0 1	1 35	5 4	5 10	6 57	6 50
22. „	+ 12 19	− 1 35	2 2	4 49	4 56	7 9	7 1
29. „	+ 14 34	− 2 47	2 30	4 35	4 44	7 21	7 11
6. Mai	+ 16° 38′	− 3m 33s	2h 58m	4h 21m	4h 32m	7h 33m	7h 21m
13. „	+ 18 28	− 3 51	3 25	4 9	4 22	7 44	7 31
20. „	+ 20 3	− 3 41	3 53	3 59	4 13	7 55	7 40
27. „	+ 21 22	− 3 6	4 20	3 50	4 6	8 5	7 48
3. Juni	+ 22° 22′	− 2m 7s	4h 48m	3h 44m	4h 1m	8h 13m	7h 56s
10. „	+ 23 3	− 0 51	5 16	3 40	3 57	8 19	8 1
17. „	+ 23 24	+ 0 37	5 43	3 38	3 57	8 23	8 5
24. „	+ 23 25	+ 2 8	6 11	3 40	3 58	8 24	8 6
1. Juli	+ 23° 6′	+ 3m 33s	6h 38m	3h 44m	4h 1m	8h 24m	8h 6m
8. „	+ 22 28	+ 4 46	7 6	3 49	4 7	8 20	8 3
15. „	+ 21 30	+ 5 41	7 34	3 57	4 13	8 14	7 58
22. „	+ 20 14	+ 6 10	8 1	4 6	4 21	8 5	7 51
29. „	+ 18 42	+ 6 11	8 29	4 17	4 30	7 55	7 42
5. August	+ 16° 54′	+ 5m 48s	8h 56m	4h 28m	4h 40m	7h 43m	7h 32m
12. „	+ 14 58	+ 4 47	9 24	4 39	4 50	7 29	7 20
19. „	+ 12 41	+ 3 23	9 52	4 51	4 59	7 15	7 7
26. „	+ 10 19	+ 1 35	10 19	5 2	5 9	7 0	6 54
2. September	+ 7° 49′	− 0m 32s	10h 47m	5h 14m	5h 19m	6h 44m	6h 40m
9. „	+ 5 12	− 2 51	11 14	5 26	5 29	6 28	6 25
16. „	+ 2 31	− 5 18	11 42	5 37	5 39	6 11	6 10
23. „	− 0 12	− 7 46	12 10	5 49	5 50	5 54	5 55
30. „	− 2 56	− 10 7	12 37	6 1	6 0	5 38	5 40
7. October	− 5° 38′	− 12m 14s	13h 5m	6h 13m	6h 10m	5h 21m	5h 25m
14. „	− 8 17	− 14 0	13 32	6 25	6 21	5 6	5 11
21. „	− 10 50	− 15 21	14 0	6 38	6 32	4 51	4 57
28. „	− 13 15	− 16 9	14 28	6 51	6 43	4 36	4 45
4. November	− 15° 30′	− 16m 19s	14h 55m	7h 4m	6h 54m	4h 23m	4h 33m
11. „	− 17 32	− 15 49	15 23	7 15	7 6	4 13	4 23
18. „	− 19 20	− 14 38	15 50	7 29	7 17	4 1	4 14
25. „	− 20 50	− 12 47	16 18	7 42	7 27	3 58	4 8
2. Dezember	− 22° 2′	− 10m 19s	16h 46m	7h 52m	7h 36s	3h 47m	4h 3m
9. „	− 22 52	− 7 20	17 13	8 1	7 45	3 44	4 1
16. „	− 23 21	− 4 2	17 41	8 8	7 51	3 44	4 1
23. „	− 23 27	− 0 34	18 8	8 12	7 55	3 47	4 4
30. „	− 23 9	+ 2 54	18 36	8 13	7 57	3 52	4 9

Diese Tafel gilt zunächst genau für das Jahr 1877, dann auch sehr nahe für die Jahre 1881, 1885, 1889, 1891 etc., näherungsweise auch für alle anderen Jahre.

Azimut und Höhe der Sonne.

I. Azimut a. $\cot g\, a = \cot g\, t \sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{cosec} t \operatorname{tang}\delta$.

Jahreszeit	Declin. δ	Stundenwinkel t									Breite φ
		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	
22. Juni	+23°27′	0° 0′ 0 0 0 0	34°31′ 29 18 25 30	58°34′ 52 26 47 21	74°48′ 69 36 64 57	86°54′ 83 8 79 29	97°18′ 94 46 92 11	107° 3′ 105 35 103 58	116°58′ 116 17 115 30	(127°19′) 127 24 127 15	45° 50 55
20. Mai 24. Juli	+20°	0° 0′ 0 0 0 0	31°18′ 27 5 23 57	54°37′ 49 20 44 58	71° 4′ 66 29 62 22	83°41′ 80 14 76 57	94°24′ 92 7 89 48	104°26′ 103 10 101 47	114°31′ 113 37 113 32	(125°12′) (125 28) 125 32	45° 50 55
16. Apr. 27. Aug.	+10°	0° 0′ 0 0 0 0	42°52′ 22 27 20 34	45°48′ 42 16 39 25	62° 2′ 58 48 55 57	75°12′ 72 43 70 24	86°33′ 84 58 83 27	97° 6′ 96 28 95 47	(107°40′) (107 53) (107 58)		45° 50 55
20. März 23. Sept.	0°	0° 0′ 0 0 0 0	20°45′ 19 17 18 7	39°14′ 37 0 35 11	54°44′ 52 33 50 41	67°48′ 66 8 64 41	79°16′ 78 24 77 37	90° 0′ 90 0 90 0			45° 50 55
23. Febr. 19. Oct.	−10°	0° 0′ 0 0 0 0	17°46′ 15 15 16 10	34° 9′ 32 46 31 41	48°32′ 47 11 46 6	61° 5′ 60 11 59 28	72°20′ 72 7 72 2				45° 50 55
20. Jan. 21. Nov.	−20°	0° 0′ 0 0 0 0	15°23′ 14 53 14 31	29°54′ 29 8 28 34	43° 2′ 42 21 41 53	54°48′ 54 32 54 28	(65°29′) (65 54) (66 28)				45° 50 55
21. Dezember	−23°27′	0° 0′ 0 0 0 0	14°39′ 14 15 13 58	28°33′ 27 57 27 33	41°14′ 40 46 40 30	52°41′ 52 37 52 45	(63° 7′) (63 48) (64 36)				45° 50 55

(Die in Klammern gesetzten Azimute gehören zu negativen Höhenwinkeln.)

II. Höhe h. $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$.

Jahreszeit	Declin. δ	Stundenwinkel t									Breite φ
		0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	
22. Juni	+23°27′	68°27′ 63 27 58 27	65°14′ 60 58 56 32	57°29′ 54 38 51 25	47°44′ 46 12 44 16	37°17′ 36 51 36 5	26°42′ 27 12 27 32	16°21′ 17 45 19 1	6°31′ 8 45 10 55	− 2°28′ 0 34 3 35	45° 50 55
20. Mai 24. Juli	+20°	65° 0′ 60 0 55 0	62° 6′ 57 43 53 12	54°49′ 51 43 48 20	45°22′ 43 34 41 47	35° 2′ 34 20 33 20	24°27′ 24 44 24 49	14° 0′ 15 11 16 16	4° 0′ 6 4 8 5	− 5 11′ − 2 18 0 37	45° 50 55
16. Apr. 27. Aug.	+10°	55° 0′ 50 0 45 0	52°42′ 48 7 43 28	46°32′ 42 56 39 9	37°58′ 35 30 32 48	28° 6′ 26 43 25 8	17°38′ 17 16 16 46	7° 3′ 7 39 8 11	− 3°18′ − 1 46 − 0 14		45° 50 55
20. März 23. Sept.	0°	45° 0′ 40 0 35 0	43° 5′ 38 23 33 39	37°46′ 33 50 29 47	30° 0′ 27 2 23 56	20°42′ 18 45 16 40	10°33′ 9 36 8 32	0° 0′ 0 0 0 0			45° 50 55
23. Febr. 19. Oct.	−10°	35° 0′ 30 0 25 0	33°21′ 28 35 23 48	28°42′ 24 32 20 18	21°42′ 18 20 14 54	12°26′ 10 34 8 3	3°18′ 1 46 0 14				45° 50 55
20. Jan. 21. Nov.	−20°	25° 0′ 20 0 15 0	23°35′ 18 45 13 55	19°29′ 15 8 10 45	13°11′ 9 30 5 48	5°11′ 2 18 −0 37	− 4° 1′ − 6 2 − 8 4				45° 50 55
21. Dezember	−23°27′	21°33′ 16 33 11 33	20°12′ 15 21 10 30	16°17′ 11 53 7 27	10°18′ 6 26 2 33	2°28′ −0 34 −3 35	− 6°31′ − 8 45 −10 55				45° 50 55

(vgl. S. 11—14)

Correctionen für correspondirende Sonnenhöhen.

Mittagsverbesserung (Zeit) $v^{(s)} = \mu_1\, A\, tang\, \varphi + \mu_1\, B\, tang\, \delta$.

Meridianverbesserung (Azimut) $v^{('')} = \mu_1\, A'\, sec\, \varphi$.

Dabei ist μ_1 die einstündige Declinations-Aenderung der Sonne nach dem Nautical-Almanac. Für die Zählung über Mitternacht gelten dieselben Formeln, nachdem die Vorzeichen von A und von A' geändert sind.

I. *t* vor oder nach Mittag.

t	*log A*	Diff.	*log B*	Diff.	*log A'*	Diff.
		+		−		+
0h 0m	9.4059n	2	9.4059	2	8.8039n	1
10	9.4061n	4	9.4057	9	8.8040n	4
20	9.4065n	7	9.4048	14	8.8044n	7
30	9.4072n	10	9.4034	19	8.8051n	10
40	9.4082n	12	9.4015	25	8.8061n	12
50	9.4094n	15	9.3990	31	8.8073n	16
1h 0m	9.4109n	18	9.3959	38	8.8089n	18
10	9.4127n	21	9.3921	43	8.8107n	20
20	9.4148n	24	9.3878	50	8.8127n	24
30	9.4172n	26	9.3828	57	8.8151n	26
40	9.4198n	29	9.3771	64	8.8177n	30
50	9.4227n	33	9.3707	72	8.8207n	32
2h 0m	9.4260n	35	9.3635	80	8.8239n	35
10	9.4295n	38	9.3555	88	8.8274n	38
20	9.4333n	41	9.3467	98	8.8312n	41
30	9.4374n	44	9.3369	108	8.8353n	45
40	9.4418n	47	9.3261	119	8.8398n	47
50	9.4465n	50	9.3142	132	8.8445n	50
3h 0m	9.4515n	54	9.3010	144	8.8495n	53
10	9.4569n	56	9.2866	160	8.8548n	57
20	9.4625n	60	9.2706	176	8.8605n	59
30	9.4685n	63	9.2530	196	8.8664n	64
40	9.4748n	67	9.2334	217	8.8728n	66
50	9.4815n	69	9.2117	243	8.8794n	70
4h 0m	9.4884n	74	9.1874	272	8.8864n	74
10	9.4958n	77	9.1602	308	8.8937n	76
20	9.5035n	80	9.1294	351	8.9014n	81
30	9.5115n	84	9.0943	403	8.9094n	84
40	9.5199n	88	9.0540	471	8.9179n	88
50	9.5287n	92	9.0069	56	8.9267n	92
5h 0m	9.5379n	96	8.951	68	8.9359n	96
10	9.5475n	101	8.883	86	8.9455n	100
20	9.5576n	104	8.797	113	8.9555n	104
30	9.5680n	109	8.684	155	8.9659n	109
40	9.5789n	113	8.519	289	8.9768n	114
50	9.5902n	118	8.230		8.9882n	118
6h 0m	9.6020n	123	(*B*=0)	+	9.0000n	123
10	9.6143n	129	8.254n	313	9.0123n	128
20	9.6272n	134	8.567n	189	9.0251n	134
30	9.6406n	139	8.756n	138	9.0385n	139
40	9.6545n	145	8.894n	110	9.0524n	145
50	9.6690n	151	9.004n	93	9.0669n	151
7h 0m	9.6841n		8.097n		9.0820n	

II. *t* vor oder nach Mitternacht.

t	*log A*	Diff.	*log B*	Diff.	*log A'*	Diff.
		+		−		+
4h 0m	9.4884	74	9.1874	272	8.8864	73
10	9.4958	77	9.1602	308	8.8937	77
20	9.5035	80	9.1294	351	8.9014	80
30	9.5115	84	9.0943	403	8.9094	85
40	9.5199	88	9.0540	471	8.9179	88
50	9.5287	92	9.0069	56	8.9267	92
5h 0m	9.5379	96	8.951	68	8.9359	96
10	9.5475	101	8.883	86	8.9455	100
20	9.5576	104	8.797	113	8.9555	104
30	9.5680	109	8.684	165	8.9659	109
40	9.5789	113	8.519	289	8.9768	114
50	9.5902	118	8.230		8.9882	118
6h 0m	9.6020	123	(*B*=0)	+	9.0000	123
10	9.6143	129	8.254n	313	9.0123	128
20	9.6272	134	8.567n	189	9.0251	134
30	9.6406	139	8.756n	138	9.0385	139
40	9.6545	145	8.894n	110	9.0524	145
50	9.6690	151	9.004n	93	9.0669	151
7h 0m	9.6841	157	9.0971n	808	9.0820	157
10	9.6998	164	9.1779n	724	9.0977	165
20	9.7162	172	9.2503n	659	9.1142	171
30	9.7334	178	9.3162n	610	9.1313	179
40	9.7512	187	9.3772n	571	9.1492	187
50	9.7699	196	9.4343n	541	9.1679	195
8h 0m	9.7895	204	9.4884n	517	9.1874	205
10	9.8099	215	9.5401n	499	9.2079	214
20	9.8314	225	9.5900n	483	9.2293	225
30	9.8539	236	9.6383n	473	9.2518	236
40	9.8775	249	9.6856n	465	9.2754	249
50	9.9024	263	9.7321n	461	9.3003	263
9h 0m	9.9287	277	9.7782n	459	9.3266	272
10	9.9564	295	9.8241n	460	9.3538	300
20	9.9859	313	9.8701n	466	9.3838	313
30	0.0172	334	9.9167n	473	9.4151	334
40	0.0506	358	9.9640n	484	9.4485	358
50	0.0864	385	0.0124n	501	9.4843	386
10h 0m	0.1249	418	0.0625n	521	9.5229	417
10	0.1667	455	0.1146n	549	9.5646	455
20	0.2122	504	0.1695n	584	9.6101	501
30	0.2626	553	0.2279n	630	9.6602	556
40	0.3179	626	0.2909n	690	9.7158	627
50	0.3805	718	0.3599n	773	9.7785	717
11h 0m	0.4523		0.4372n		9.8502	

(vergl. S. 74, 76, 82)

Genäherte Correctionen für correspondirende Sonnenhöhen.

Mittagsverbesserung für Zeitbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen, für die Breite 49°.

Jahreszeit	Halbe Zwischenzeit t in Stunden							Jahreszeit
	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	
–								+
December 22	0^s	0^s	0^s	0^s	0^s	0^s	0^s	22 December
Januar 2	5	5	5	5	5	5	6	12 December
Januar 12	9	9	9	10	10	10	11	2 December
Januar 22	13	13	13	13	14	14	15	22 November
Februar 2	16	16	16	15	17	18	19	12 November
Februar 12	17	17	17	17	19	20	22	2 November
Februar 22	18	18	19	19	20	22	25	12 October
März 2	18	18	19	20	21	23	26	12 October
März 12	18	18	19	20	21	24	27	2 October
März 22	17	17	18	19	21	23	27	22 September
April 2	16	16	17	18	20	22	26	12 September
April 12	14	14	15	16	18	21	25	2 September
April 22	12	12	13	14	16	19	23	22 August
Mai 2	10	10	11	12	14	17	21	12 August
Mai 12	8	8	9	10	12	14	17	2 August
Mai 22	6	6	7	8	9	11	14	22 Juli
Juni 2	4	4	5	5	6	8	10	12 Juli
Juni 12	2	2	2	3	3	4	5	2 Juli
Juni 22	0	0	0	0	0	0	0	22 Juni
–								+

Meridianverbesserung für Meridianbestimmung aus correspondirenden Sonnenhöhen, für die Breite 49°.

Jahreszeit	Halbe Zwischenzeit in Stunden							Jahreszeit
	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	
–								+
December 22	0′	0′	0′	0′	0′	0′	0′	22 December
Januar 2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0	12 December
Januar 12	2,4	2,5	2,5	2,6	2,8	3,0	3,8	2 December
Januar 22	3,2	3,3	3,4	3,6	3,9	4,4	5,1	22 November
Februar 2	4,0	4,1	4,3	4,5	4,9	5,4	6,3	12 November
Februar 12	4,6	4,7	4,9	5,2	5,6	6,3	7,3	2 November
Februar 22	5,2	5,2	5,4	5,7	6,1	7,0	8,1	22 October
März 2	5,5	5,6	5,7	6,1	6,5	7,4	8,6	12 October
März 12	5,7	5,8	5,9	6,3	6,8	7,7	8,9	2 October
März 22	5,7	5,8	6,0	6,3	6,9	7,7	9,0	22 September
April 2	5,6	5,7	5,8	6,2	6,8	7,5	8,8	12 September
April 12	5,3	5,4	5,6	5,9	6,4	7,2	8,3	2 September
April 22	4,9	5,0	5,2	5,5	6,0	6,7	7,7	22 August
Mai 2	4,4	4,5	4,6	4,9	5,2	6,0	6,9	12 August
Mai 12	3,7	3,9	4,0	4,2	4,4	5,0	5,9	2 August
Mai 22	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5	4,0	4,6	22 Juli
Juni 2	2,0	2,1	2,2	2,4	2,5	2,8	3,4	12 Juli
Juni 12	1,1	1,1	1,2	1,2	1,4	1,6	1,7	2 Juli
Juni 22	0	0	0	0	0	0	0	22 Juni
–								+

(vgl. S. 74 u. 84)

Halbmesser-Correctionen für Monddistanz-Reduction.

I. Vergrösserung des Mondhalbmessers durch Parallaxe.

$R' - R = 0{,}0000178\ R^2 \sin H = [5.25084\text{-}10]\ R^2 \sin H$

(vgl. S. 84.)

H	Mondhalbmesser *R*				
	14′ 30″	15′ 0″	15′ 30″	16′ 0″	16′ 30″
0°	0″	0″	0″	0″	0″
5	1	1	1	1	2
10	2	8	8	8	8
15	8	4	4	4	4
20	5	5	5	6	6
25°	6″	6″	6″	7″	7″
80	7	7	8	8	9
85	8	8	9	9	10
40	9	9	10	10	11
45	9	10	11	12	12
50°	10″	11″	12″	18″	18″
55	11	12	18	18	14
60	12	12	18	14	15
70	18	14	14	15	16
90	13,5	14,4	15,4	16,4	17,4

II. Verkürzung des Mondhalbmessers und Sonnenhalbmessers durch Refraction.

$\Delta r \cos^2 M$ oder $\Delta r \cos^2 S$

Halbmesser = 15′ 40″.

(vgl. S. 294.)

Scheinbare Höhe	Winkel mit dem Verticalkreis *M* oder *S*																
	0°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	90°
5° 0′	24″	23″	22″	21″	19″	18″	16″	14″	12″	10″	8″	6″	4″	3″	2″	1″	0″
20	22	21	20	19	18	16	15	13	11	9	7	5	4	3	1	1	0
40	20	19	18	17	16	15	13	12	10	8	6	5	8	2	1	1	0
6° 0′	18″	18″	17″	16″	15″	14″	12″	11″	9″	7″	6″	5″	8″	2″	1″	1″	0″
20	17	16	16	15	14	18	11	10	8	7	6	4	3	2	1	1	0
40	15	15	14	14	18	12	10	9	8	6	5	4	8	2	1	1	0
7° 0′	14″	14″	18″	12″	12″	11″	9″	8″	7″	6″	5″	4″	3″	2″	1″	0″	0″
20	13	18	12	12	11	10	9	7	7	5	4	8	2	2	1	0	0
40	12	12	11	11	10	9	8	7	6	5	4	8	2	1	1	0	0
8°	11″	11″	11″	10″	9″	9″	8″	7″	6″	5″	4″	3″	2″	1″	1″	0″	0″
9°	9	9	9	8	8	7	6	5	5	4	3	2	2	1	1	0	0
10°	8	7	7	7	6	6	5	5	4	8	8	2	1	1	1	0	0
11°	7	6	6	6	5	5	4	4	3	8	2	2	1	1	0	0	0
12°	6	5	5	5	5	4	4	3	8	2	2	1	1	1	0	0	0
13°	5″	5″	5″	4″	4″	4″	3″	8″	2″	2″	2″	1″	1″	1″	0″	0″	0″
15°	4	4	3	8	3	3	2	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0
20°	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
30°	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
40°	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bei Höhen unter 5° nimmt man die Refractionsdifferenz Δr für Ober- bzw. Unter-Rand und Mitte aus der Refractionstafel [S. 18] und berechnet direct $\Delta r \cos^2 M$ oder $\Delta r \cos^2 S$. (vgl. S. 295.)

Höhenparallaxe des Mondes.

$$p = \pi \cos (H' + \tfrac{1}{2} e^2 \varrho \sin 2\varphi \cos a)\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi)$$

$$H' = H - p_0$$

H = Wahre Höhe oder H' = beobachtete Höhe — Refraction.

I. Näherungswerth $p_0 = \pi \cos H$.

H	π = 53'	54'	55'	56'	57'	58'	59'	60'	61'
0°	53'	54'	55'	56'	57'	58'	59'	60'	61'
5	53	54	55	56	57	58	59	60	61
10	52	53	54	55	56	57	58	59	60
15	51	52	53	54	55	56	57	58	59
20	50	51	52	53	54	55	55	56	57
22°	49'	50'	51'	52'	53'	54'	55'	56'	57'
24	48	49	50	51	52	53	54	55	56
26	48	49	49	50	51	52	53	54	55
28	47	48	49	49	50	51	52	53	54
30	46	47	48	48	49	50	51	52	53
32°	45'	46'	47'	47'	48'	49'	50'	51'	52'
34	44	45	46	46	47	48	49	50	51
36	43	44	44	45	46	47	48	49	49
38	42	43	43	44	45	46	47	47	48
40	41	41	42	43	44	44	45	46	47
42°	39'	40'	41'	42'	42'	43'	44'	45'	45'
44	38	39	40	40	41	42	42	43	44
46	37	38	38	39	40	40	41	42	42
48	35	36	37	37	38	38	39	40	41
50	34	35	35	36	37	37	38	39	39
52°	33'	33'	34'	35'	35'	36'	36'	37'	38'
54	31	32	32	33	34	34	35	35	36
56	30	30	31	31	32	32	33	34	34
58	28	29	29	30	30	31	31	32	32
60	26	27	27	28	28	29	29	30	30
62°	25'	25'	26'	27'	27'	28'	28'	29'	29'
64	23	24	24	25	25	25	26	26	27
66	22	22	22	23	23	24	24	24	24
68	20	20	21	21	21	22	22	23	23
70	18	18	19	19	19	20	20	20	21
75°	14'	14'	14'	14'	15'	15'	15'	16'	16'
80	9	9	10	10	10	10	10	10	11
85	5	5	5	5	5	5	5	5	5
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0

II. $\log (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi)$.

φ	$\log$	Diff.	Diff. für 1°
0°	0.00000	1	0,2
5	9.99999	3	0,6
10	9.99996	6	1,2
15	9.99990	7	1,4
20	9.99983	9	1,8
25°	9.99974	10	2,0
30	9.99964	5	2,5
32	9.99959	4	2,0
34	9.99955	5	2,5
36	9.99950	5	2,5
38°	9.99945	5	2,5
40	9.99940	5	2,5
42	9.99935	2	2
43	9.99933	3	3
44	9.99930	2	2
45°	9.99928	3	3
46	9.99925	2	2
47	9.99923	3	3
48	9.99920	2	2
49	9.99918	3	3
50°	9.99915	2	2
51	9.99913	3	3
52	9.99910	2	2
53	9.99908	3	3
54	9.99905	2	2
55°	9.99903	12	2,0
60	9.99891	10	2,0
65	9.99881	9	1,8
70	9.99872	8	1,6
75	9.99864	5	1,0
80°	9.99859	3	0,6
85	9.99856	1	0,2
90	9.99855		

III. Höhencorrection $\tfrac{1}{2} e^2 \varrho' \sin 2\varphi \cos a$ [$\log \tfrac{1}{2} e^2 \varrho' = 1.5965$].

φ	Azimut a des Mondes von Süden nach Westen oder nach Osten																			
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°	110°	120°	130°
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		−	−	−	−	−	−
0° 90°	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'
5 85	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
10 80	4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	2	1	0	0	0	1	2	1	2	3
15 75	6	6	5	5	4	4	3	3	2	2	2	1	1	0	1	1	2	2	3	4
20° 70°	7'	7'	7'	6'	6'	5'	4'	4'	3'	4'	3'	1'	1'	0'	1'	1'	3'	4'	4'	5'
25 65	9	9	8	8	7	6	5	4	4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	4	6
30 60	10	10	9	9	8	6	6	5	4	5	3	2	1	0	1	2	3	5	5	6
35° 55°	11'	11'	10'	9'	8'	7'	6'	5'	5'	5'	4'	2'	1'	0'	1'	2'	4'	5'	5'	7'
40 50	11	11	11	10	9	7	6	6	5	6	4	2	1	0	1	2	4	6	6	7
45°	12	11	11	10	9	7	7	6	5	6	4	2	1	0	1	2	4	6	6	7

(vgl. S. 301)

Correction der Monddistanz für Seitenparallaxe des Mondes.

$\frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin M \sin 2\varphi$. ($\pi = 57'$, $\log \frac{1}{2} e^2 \pi = 1.05741$.)

I. Für $\varphi = 45^0$. $\frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin M$.

Winkel am Mond *M*	Azimut *a* des Mondes von Süden nach Westen oder nach Osten													Winkel am Mond *M*
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30° 150°	40° 140°	50° 130°	60° 120°	70° 110°	80° 100°	90°	
0°	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	0,0″	180°
10	0,0	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1,0	1,3	1,5	1,7	1,9	2,0	2,0	170
20	0,0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,6	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	3,8	3,9	160
30	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,4	2,8	3,7	4,4	4,9	5,4	5,6	5,7	150
40	0,0	0,6	1,3	1,9	2,5	3,1	3,7	4,7	5,6	6,4	6,9	7,2	7,3	140
50°	0,0″	0,8″	1,5″	2,3″	3,0″	3,7″	4,4″	5,6″	6,7″	7,6″	8,2″	8,6″	8,7″	130°
60	0,0	0,9	1,7	2,6	3,4	4,2	4,9	6,4	7,6	8,6	9,3	9,7	9,9	120
70	0,0	0,9	1,9	2,8	3,7	4,5	5,4	6,9	8,2	9,3	10,1	10,6	10,7	110
80	0,0	1,0	2,0	2,9	3,8	4,7	5,6	7,2	8,6	9,7	10,6	11,1	11,2	100
90	0,0	1,0	2,0	3,0	3,9	4,8	5,7	7,3	8,7	9,9	10,7	11,2	11,4	90

II. Für $\varphi = 50^0$ und $\varphi = 40^0$. $\frac{1}{2} e^2 \pi \sin a \sin M \sin 2\varphi$.

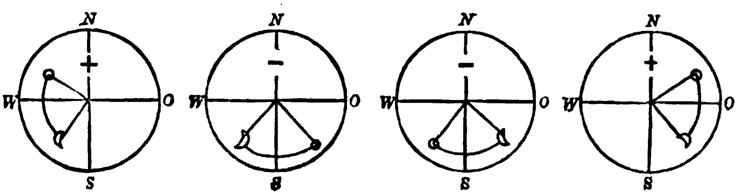
M	Azimut *a* des Mondes von Süden nach Westen oder nach Osten													*M*
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30° 150°	40° 140°	50° 130°	60° 120°	70° 110°	80° 100°	90°	
0°	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″	180°
10	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	170
20	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	160
30	0	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	150
40	0	1	1	2	2	3	4	5	6	6	7	7	7	140
50°	0″	1″	1″	2″	3″	4″	4″	6″	7″	8″	8″	8″	9″	130°
60	0	1	2	3	3	4	5	6	8	9	9	10	10	120
70	0	1	2	3	4	4	5	7	8	9	10	10	11	110
80	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	10	11	11	100
90	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	11	11	90

Diese Tafel II. mit der Mittelbreite $\varphi = 50^0$ kann für ganz Deutschland gebraucht werden. Für andere Breiten φ hat man den Werth von Tafel I. mit $\sin 2\varphi$ zu multipliciren, wozu meist folgende runde Werthe von $\sin 2\varphi$ genügen.

III.

φ	$\sin 2\varphi$	φ	$\sin 2\varphi$	φ	$\sin 2\varphi$
5°	0,17	35°	0,94	65°	0,77
10	0,34	40	0,98	70	0,64
15	0,50	45	1,00	75	0,50
20	0,64	50	0,98	80	0,34
25	0,77	55	0,94	85	0,17
30	0,87	60	0,87	90	0,00

IV. Entscheidung des Vorzeichens. (vgl. S. 304.)



Die Azimute und die Vorzeichen von S. [19] und S. [20] gelten für Nordbreite. Für Südbreite werden die Azimute von Norden gezählt, und in Fig. IV. ist *S* an Stelle von *N* sowie *W* an Stelle von *O* zu setzen.

Genäherte Reduction einer Monddistanz

für Höhen von 10° an aufwärts.

Scheinbare Distanz $= D'$. **Mondhöhe** $= H$. **Mondparallaxe** $= \pi$ **(im Mittel** $= 57'$**).**
Wahre Distanz $= D$. **Stern- od. Sonnenhöhe** $= h$. **Refractionsconstande** $\alpha = 57'' = 0{,}95'$.

Reduction $D - D' = \Delta = \frac{1}{\sin D}\left\{-\pi \sin h + \pi \sin H \cos D - 2\,\alpha \cos D + \alpha\left(\frac{\sin H}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin H}\right)\right\}$

Mit Benützung der folgenden Tabellen hat man

$$\Delta = \text{V}\left\{\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV.}\right\}$$

I $= -57 \sin h$. **II** $= \pi \sin H \cos D$.

h	$-57 \sin h$	H	Distanz D										
			20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
10°	−9,9′	10°	9,3′	8,6′	7,6′	6,4′	4,9′	3,4′	1,7′	0,0′	−1,7′	−3,4′	−4,9′
20°	−19,5	20°	18,3	16,9	14,9	12,5	9,7	6,7	3,4	0,0	−3,4	−6,7	−9,7
30°	−28,5	30°	26,8	24,7	21,8	18,3	14,2	9,7	4,9	0,0	−4,9	−9,7	−14,2
40°	−36,6	40°	34,4	31,7	28,1	23,6	18,3	12,5	6,4	0,0	−6,4	−12,5	−18,3
50°	−43,7	50°	41,0	37,8	33,4	28,1	21,8	15,6	7,6	0,0	−7,6	−15,6	−21,8
60°	−49,4	60°	46,4	42,8	37,8	31,7	24,7	16,9	8,6	0,0	−8,6	−16,9	−24,7
70°	−53,6	70°	50,3	46,4	41,0	34,4	26,8	18,3	9,3	0,0	−9,3	−18,3	−26,8
80°	−56,1	80°	52,7	48,6	43,0	36,1	28,1	19,2	9,7	0,0	−9,7	−19,2	−28,1
90°	−57,0	90°	53,6	49,4	43,7	36,6	28,5	19,5	9,9	0,0	−9,9	−19,5	−28,5

III $= -2\,\alpha \cos D$.

$D =$	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
III =	−1,8′	−1,6′	−1,5′	−1,2′	−0,9′	−0,6′	−0,3′	0,0	+0,3′	+0,6′	+0,9′

IV $= \alpha\left(\frac{\sin H}{\sin h} + \frac{\sin h}{\sin H}\right)$

H oder h	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
10°	1,9′	2,4′	3,1′	3,8′	4,4′	4,9′	5,3′	5,5′	5,6′
20°	2,4	1,9	2,0	2,3	2,6	2,8	3,0	3,1	3,1
30°	3,1	2,0	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4
40°	3,8	2,3	2,0	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1
50°	4,4	2,6	2,1	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0
60°	4,9	2,8	2,2	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
70°	5,3	3,0	2,3	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
80°	5,5	3,1	2,4	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9
90°	5,6	3,1	2,4	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9

V $= \frac{1}{\sin D}$

$D =$	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
V =	2,92	2,00	1,52	1,31	1,15	1,06	1,02	1,00	1,02	1,06	1,15

(vgl. S. 342—346)

Näherungswerthe der Monddistanz-Reduction $D - D'$.

Scheinbare Distanz $= D'$. Mondparallaxe $\pi = 57'$.
Wahre Distanz $= D$.

$D = 20°$

Mondhöhe H	Höhe h des Sterns oder der Sonne: 0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 8′	− 14′	− 25′								0°
5°	+ 20	− 1	− 14	− 33								5°
10°	+ 42	+ 14	− 1	− 28	− 53′							10°
20°	+ 86	+ 45	+ 25	− 3	− 30	− 52′						20°
30°			+ 58	+ 23	− 5	− 29	− 48′					30°
40°				+ 45	+ 18	− 6	− 27	− 48′				40°
50°					+ 38	+ 13	− 7	− 24	− 35′			50°
60°						+ 29	+ 8	− 8	− 21	− 28′		60°
70°							+ 20	+ 3	− 9	− 17	− 19′	70°
80°								+ 10	− 2	− 9		80°
90°									0			90°

$D = 30°$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 5′	− 9′	− 17′	− 24′							0°
5°	+ 13	− 1	− 10	− 26	− 41							5°
10°	+ 28	+ 8	− 2	− 20	− 37	− 52′						10°
20°	+ 56	+ 28	+ 15	− 5	− 22	− 38	− 52′					20°
30°	+ 83	+ 47	+ 32	+ 11	− 7	− 23	− 37	− 48′				30°
40°			+ 48	+ 26	+ 7	− 9	− 23	− 35	− 43′			40°
50°				+ 38	+ 19	+ 3	− 11	− 23	− 31	− 36′		50°
60°					+ 30	+ 13	− 1	− 13	− 21	− 26	− 28′	60°
70°						+ 20	+ 6	− 5	− 14	− 19		70°
80°							+ 11	− 1	− 9			80°
90°								+ 1				90°

$D = 40°$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 4′	− 7′	− 13′	− 18′	− 23′						0°
5°	+ 10	− 1	− 9	− 21	− 32	− 43						5°
10°	+ 20	+ 7	− 3	− 17	− 29	− 40	− 52′					10°
20°	+ 41	+ 19	+ 9	− 6	− 20	− 32	− 42	− 52′				20°
30°	+ 61	+ 32	+ 19	+ 4	− 10	− 22	− 32	− 42	− 48′			30°
40°	+ 77	+ 44	+ 31	+ 14	+ 1	− 13	− 24	− 32	− 39	− 43′		40°
50°			+ 41	+ 23	+ 9	− 4	− 15	− 24	− 30	− 34	− 36′	50°
60°				+ 30	+ 16	+ 2	− 9	− 17	− 24	− 27		60°
70°					+ 21	+ 8	− 2	− 12	− 19			70°
80°						+ 11	0	− 9				80°
90°							+ 1					90°

$D = 50°$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 3′	− 6′	− 11′	− 15′	− 19′	− 23′					0°
5°	+ 7	− 1	− 6	− 17	− 28	− 37	− 44					5°
10°	+ 15	+ 8	− 4	− 15	− 26	− 36	− 44	− 51′				10°
20°	+ 31	+ 18	+ 5	− 8	− 19	− 30	− 39	− 46	− 51′			20°
30°	+ 46	+ 23	+ 14	0	− 12	− 23	− 31	− 39	− 44	− 48′		30°
40°	+ 52	+ 31	+ 21	+ 6	− 5	− 16	− 25	− 32	− 38	− 41	− 43′	40°
50°	+ 73	+ 39	+ 28	+ 13	+ 1	− 10	− 19	− 27	− 32	− 36		50°
60°			+ 33	+ 18	+ 5	− 5	− 14	− 22	− 28			60°
70°				+ 22	+ 9	− 2	− 11	− 18				70°
80°					+ 11	0	− 9					80°
90°						+ 1						90°

$D = 60°$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 3′	− 5′	− 9′	− 13′	− 17′	− 20′	− 23′				0°
5°	+ 6	− 2	− 6	− 17	− 25	− 33	− 40	− 45				5°
10°	+ 12	+ 2	− 5	− 15	− 25	− 33	− 41	− 47	− 51′			10°
20°	+ 25	+ 9	+ 2	− 10	− 20	− 29	− 38	− 44	− 48			20°
30°	+ 36	+ 15	+ 8	− 4	− 15	− 25	− 32	− 39	− 45	− 51′		30°
40°	+ 46	+ 22	+ 13	0	− 11	− 20	− 28	− 34	− 39	− 47	− 48′	40°
50°	+ 56	+ 27	+ 18	+ 4	− 6	− 16	− 24	− 30	− 35	− 42		50°
60°	+ 68	+ 32	+ 22	+ 7	− 3	− 13	− 20	− 27				60°
70°			+ 24	+ 10	0	− 10	− 18					70°
80°				+ 12	+ 1	− 9						80°
90°					+ 2							90°

(vgl. S. 345)

Näherungswerthe der Monddistanz-Reduction $D - D'$.

Scheinbare Distanz $= D'$. Mondparallaxe $\pi = 57'$.
Wahre Distanz $= D$.

$D = 70^0$

Mondhöhe H	Höhe h des Sterns oder der Sonne 0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 2′	− 4′	− 8′	− 12′	− 16′	− 18′	− 21′	− 22′			0°
5°	+ 5	− 2	− 7	− 15	− 24	− 31	− 33	− 43	− 46			5°
10°	+ 10	+ 0	− 6	− 15	− 24	− 32	− 39	− 44	− 48	− 51′		10°
20°	+ 19	+ 4	− 2	− 12	− 22	− 30	− 38	− 43	− 47	− 50	− 51′	20°
30°	+ 29	+ 10	+ 3	− 9	− 19	− 27	− 34	− 40	− 46	− 47		30°
40°	+ 37	+ 14	+ 6	− 5	− 15	− 24	− 31	− 38	− 42			40°
50°	+ 44	+ 17	+ 10	− 2	− 13	− 22	− 29	− 35				50°
60°	+ 50	+ 21	+ 12	0	− 11	− 19	− 27					60°
70°	+ 54	+ 23	+ 14	+ 1	− 9	− 18						70°
80°			+ 15	+ 2	− 7							80°
90°				+ 3								90°

$D = 80^0$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 2′	− 4′	− 8′	− 11′	− 15′	− 17′	− 20′	− 21′	− 22′		0°
5°	+ 4	− 3	− 7	− 16	− 24	− 30	− 35	− 40	− 44	− 47		5°
10°	+ 8	0	− 7	− 16	− 24	− 32	− 39	− 43	− 47	− 49	− 51′	10°
20°	+ 15	+ 2	− 4	− 15	− 24	− 31	− 39	− 44	− 48	− 51		20°
30°	+ 23	+ 5	− 2	− 13	− 22	− 30	− 38	− 43	− 47			30°
40°	+ 29	+ 8	0	− 11	− 20	− 29	− 35	− 42				40°
50°	+ 35	+ 10	+ 2	− 10	− 19	− 28	− 35					50°
60°	+ 39	+ 12	+ 3	− 9	− 18	− 27						60°
70°	+ 41	+ 13	+ 4	− 8	− 17							70°
80°	+ 45	+ 14	+ 5	− 7								80°
90°			+ 5									90°

$D = 90^0$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 2′	− 4′	− 8′	− 11′	− 14′	− 17′	− 19′	− 21′	− 22′	− 22′	0°
5°	+ 3	− 3	− 8	− 16	− 23	− 30	− 36	− 40	− 43	− 46		5°
10°	+ 6	− 3	− 8	− 17	− 25	− 32	− 39	− 44	− 48	− 51		10°
20°	+ 12	− 1	− 8	− 18	− 26	− 34	− 41	− 46	− 51			20°
30°	+ 17	0	− 7	− 18	− 27	− 35	− 42	− 47				30°
40°	+ 22	+ 2	− 6	− 17	− 27	− 35	− 42					40°
50°	+ 27	+ 3	− 6	− 17	− 26	− 35						50°
60°	+ 30	+ 4	− 5	− 17	− 26							60°
70°	+ 32	+ 4	− 5	− 17								70°
80°	+ 34	+ 4	− 4									80°
90°	+ 35											90°

$D = 100^0$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 2′	− 4′	− 8′	− 11′	− 14′	− 17′	− 19′	− 21′	− 22′		0°
5°	+ 2	− 4	− 9	− 16	− 24	− 31	− 37	− 41	− 45			5°
10°	+ 5	− 4	− 10	− 18	− 27	− 34	− 41	− 46	− 50			10°
20°	+ 9	− 4	− 11	− 21	− 30	− 38	− 45	− 50				20°
30°	+ 13	− 4	− 12	− 23	− 32	− 40	− 47					30°
40°	+ 16	− 4	− 12	− 24	− 33	− 41						40°
50°	+ 20	− 5	− 13	− 25	− 34							50°
60°	+ 22	− 5	− 13	− 25								60°
70°	+ 24	− 5	− 14									70°
80°	+ 25	− 5										80°
90°												90°

$D = 120^0$

Mondhöhe H	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	Mondhöhe H
0°	0′	− 2′	− 4′	− 8′	− 12′	− 16′	− 19′	− 21′				0°
5°	+ 1	− 6	− 11	− 20	− 28	− 35	− 43					5°
10°	+ 2	− 8	− 14	− 25	− 33	− 42	− 50					10°
20°	+ 3	− 13	− 19	− 30	− 41	− 50						20°
30°	+ 4	− 16	− 25	− 35	− 46							30°
40°	+ 5	− 19	− 27	− 40								40°
50°	+ 6	− 21	− 26									50°
60°	+ 7											60°
70°												70°
80°												80°
90°												90°
	0°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	

(vgl. S. 344)

log sin t.

	0h		1h		2h		3h		4h		5h		
0m	−∞		9.4130	70	9.6990	32	9.8495	19	9.9375	11	9.9849	5	60m
1	7.6398	3010	9.4200	69	9.7022	33	9.8514	18	9.9386	11	9.9854	5	59
2	7.9408	1761	9.4269	68	9.7055	32	9.8532	19	9.9397	11	9.9859	5	58
3	8.1169	1250	9.4337	66	9.7087	31	9.8551	18	9.9408	10	9.9864	5	57
4	8.2419	969	9.4403	66	9.7118	32	9.8569	19	9.9418	11	9.9869	5	56
5m	8.3388	791	9.4469	64	9.7150	31	9.8588	18	9.9429	10	9.9874	4	55m
6	8.4179	669	9.4533	64	9.7181	31	9.8606	18	9.9439	10	9.9878	5	54
7	8.4848	580	9.4597	62	9.7212	30	9.8624	17	9.9449	10	9.9883	4	53
8	8.5428	511	9.4659	62	9.7242	30	9.8641	18	9.9459	10	9.9887	5	52
9	8.5939	458	9.4721	60	9.7272	30	9.8659	17	9.9469	10	9.9892	4	51
10m	8.6397	413	9.4781	60	9.7302	30	9.8676	18	9.9479	10	9.9896	4	50m
11	8.6810	378	9.4841	59	9.7332	29	9.8694	17	9.9489	10	9.9900	4	49
12	8.7188	347	9.4900	58	9.7361	29	9.8711	17	9.9499	9	9.9904	4	48
13	8.7535	322	9.4958	57	9.7390	29	9.8728	17	9.9508	9	9.9908	4	47
14	8.7857	299	9.5015	56	9.7419	28	9.8745	16	9.9518	10	9.9912	4	46
15m	8.8156	280	9.5071	55	9.7447	29	9.8761	17	9.9527	10	9.9916	3	45m
16	8.8436	263	9.5126	55	9.7476	28	9.8778	16	9.9537	9	9.9919	4	44
17	8.8699	247	9.5181	54	9.7504	27	9.8794	16	9.9546	9	9.9923	4	43
18	8.8946	235	9.5235	53	9.7531	28	9.8810	17	9.9555	9	9.9927	3	42
19	8.9181	222	9.5288	53	9.7559	27	9.8827	15	9.9564	9	9.9930	4	41
20m	8.9403	211	9.5341	51	9.7586	27	9.8842	16	9.9573	9	9.9934	3	40m
21	8.9614	202	9.5392	51	9.7613	27	9.8858	16	9.9582	8	9.9937	3	39
22	8.9816	192	9.5443	51	9.7640	26	9.8874	16	9.9590	8	9.9940	3	38
23	9.0008	184	9.5494	49	9.7666	26	9.8890	15	9.9599	8	9.9943	3	37
24	9.0192	177	9.5543	49	9.7692	26	9.8905	15	9.9607	9	9.9946	3	36
25m	9.0369	170	9.5592	49	9.7718	26	9.8920	15	9.9616	8	9.9949	3	35m
26	9.0539	163	9.5641	48	9.7744	25	9.8935	15	9.9624	8	9.9952	3	34
27	9.0702	157	9.5689	47	9.7769	26	9.8950	15	9.9632	8	9.9955	3	33
28	9.0859	152	9.5736	46	9.7795	25	9.8965	15	9.9640	8	9.9958	2	32
29	9.1011	146	9.5782	46	9.7820	24	9.8980	15	9.9648	8	9.9960	3	31
30m	9.1157	142	9.5828	46	9.7844	25	9.8995	14	9.9656	8	9.9963	2	30m
31	9.1299	137	9.5874	45	9.7869	24	9.9009	14	9.9664	8	9.9965	3	29
32	9.1436	132	9.5919	44	9.7893	25	9.9023	15	9.9672	7	9.9968	2	28
33	9.1568	129	9.5963	44	9.7918	23	9.9038	14	9.9679	8	9.9970	2	27
34	9.1697	125	9.6007	43	9.7941	24	9.9052	14	9.9687	7	9.9972	2	26
35m	9.1822	121	9.6050	43	9.7965	24	9.9066	14	9.9694	8	9.9974	2	25m
36	9.1943	118	9.6093	42	9.7989	23	9.9080	13	9.9702	7	9.9976	2	24
37	9.2061	115	9.6135	42	9.8012	23	9.9093	14	9.9709	7	9.9978	2	23
38	9.2176	112	9.6177	42	9.8035	23	9.9107	13	9.9716	7	9.9980	2	22
39	9.2288	109	9.6219	40	9.8058	23	9.9120	14	9.9723	7	9.9982	1	21
40m	9.2397	106	9.6259	41	9.8081	22	9.9134	13	9.9730	7	9.9983	2	20m
41	9.2503	103	9.6300	40	9.8103	22	9.9147	13	9.9737	6	9.9985	2	19
42	9.2606	101	9.6340	39	9.8125	23	9.9160	13	9.9743	7	9.9987	1	18
43	9.2707	99	9.6379	39	9.8148	21	9.9173	13	9.9750	7	9.9988	1	17
44	9.2806	96	9.6418	39	9.8169	22	9.9186	12	9.9757	6	9.9989	2	16
45m	9.2902	95	9.6457	38	9.8191	22	9.9198	13	9.9763	7	9.9991	1	15m
46	9.2997	92	9.6495	38	9.8213	21	9.9211	13	9.9770	6	9.9992	1	14
47	9.3089	90	9.6533	37	9.8234	21	9.9224	12	9.9776	6	9.9993	1	13
48	9.3179	88	9.6570	37	9.8255	21	9.9236	12	9.9782	6	9.9994	1	12
49	9.3267	86	9.6607	37	9.8276	21	9.9248	12	9.9788	6	9.9995	1	11
50m	9.3353	85	9.6644	36	9.8297	20	9.9260	12	9.9794	6	9.9996	1	10m
51	9.3438	83	9.6680	36	9.8317	21	9.9272	12	9.9800	6	9.9997	0	9
52	9.3521	81	9.6716	36	9.8338	20	9.9284	12	9.9806	6	9.9997	1	8
53	9.3602	80	9.6752	35	9.8358	20	9.9296	12	9.9812	5	9.9998	1	7
54	9.3682	78	9.6787	34	9.8378	20	9.9308	11	9.9817	6	9.9999	0	6
55m	9.3760	77	9.6821	35	9.8398	20	9.9319	12	9.9823	5	9.9999	0	5m
56	9.3837	75	9.6856	34	9.8418	19	9.9331	11	9.9828	6	9.9999	1	4
57	9.3912	74	9.6890	33	9.8437	20	9.9342	11	9.9834	5	0.0000	0	3
58	9.3986	73	9.6923	34	9.8457	19	9.9353	11	9.9839	5	0.0000	0	2
59	9.4059	71	9.6957	33	9.8476	19	9.9364	11	9.9844	5	0.0000	0	1
60	9.4130		9.6990		9.8495		9.9375		9.9849		0.0000		0
	5h		4h		3h		2h		1h		0h		

log cos t.

Geographische Coordinaten.

Punkt	Geographische Breite	Geographische Länge: von Ferro in Bogen	Geographische Länge: von Berlin in Zeit	Geographische Länge: von Greenwich in Zeit	Bemerkungen
Aachen Granusthurm	50°46′40″	28°45′ 0″	−0h29m14s	0h24m21s	
Altenburg	50 59 2	30 6 2	−0 8 50	0 49 45	
Altona Sternwarte	53 32 45	27 36 20	−0 18 49	0 89 46,304	
Amsterdam	52 22 30	22 32 54	−0 34 2	0 19 33	
Antwerpen	51 13 15	22 8 55	−0 35 58	0 17 37	
Augsburg St. Ulrich	48°21′44″	28°33′53″	−0h 9m58s	0h43m37s	
Basel Münster	47 33 25	25 15 28	−0 23 12	0 30 28	
Berlin Sternwarte	52 13 16,7	31 8 28,32	0 0 0	0 53 34,870	
				=13°23′48,05″	Gradm. 1880
Berlin Sternwarte	52 13 16,7	31 8 41,25	+0 0 0,862	0 53 35,782	Preuss. Landes-Aufnahme 1865
Berlin Rauenberg	52 27 12,021	31 2 4,928	−0 0 14,559	0 53 29,311	Preuss. Landes-Aufnahme 1865
Bern Sternwarte	46°57′ 9″	25° 6′11″	−0h23m49s	0h29m46s	
Bonn Sternwarte	50 43 45	24 45 34	−0 25 12	0 28 23,263	Gradm. 1880
Brandenburg	52 24 30	30 13 40	−0 3 19	0 50 16	
Braunschweig Andreas	52 16 6	28 11 16	−0 11 29	0 42 6	
Bregenz	47 30 29	27 26 18	−0 14 29	0 39 6,205	Gradm. 1880
Bremen Ansgarius	53° 4′48″	26°28′ 6″	−0h18m22s	0h35m13s	
Breslau Sternwarte	51 6 56	34 42 3	+0 14 34	1 8 9	
Brest	48 23 32	22 9 9	−0 35 37	0 17 57,559	Gradm. 1880
Brocken	51 48 11	28 16 52	−0 11 6	0 42 28,470	" "
Bromberg	53 7 27	35 40 47	+0 18 29	1 12 4	
Brünn Rathhaus	49°11′39″	34°16′30″	+0h12m52s	1h 6m27s	
Brüssel Sternwarte	50 51 11	22 1 59	−0 36 6	0 17 29	
Chemnitz	50 49 32	30 33 25	−0 2 0	0 51 35	
Coblenz Thurm	50 21 39	25 15 44	−0 23 11	0 30 24	
Coburg	50 15 19	28 37 45	−0 9 43	0 43 52	
Colmar Thurm	48° 4′41″	25° 1′20″	−0h24m 9s	0h29m26s	
Cöln Dom	50 56 33	24 37 11	−0 25 45	0 27 50	
Crefeld Thurm	51 19 53	24 13 42	−0 27 19	0 26 16	
Danzig Sternwarte	54 21 18	36 19 51	+0 21 5	1 14 40	
Darmstadt	49 52 21	26 19 23	−0 18 56	0 34 39	
Dessau	51°50′ 6″	29°56′44″	−0h 4m27s	0h49m 8s	
Dorpat Sternwarte	58 22 47	44 23 14	+0 53 19	1 46 54	
Dortmund	51 31 25	25 7 50	−0 23 43	0 29 52	
Dresden Sternwarte	51 2 17	31 23 30	+0 1 20	0 54 55	
Duisburg	51 26 10	24 25 39	−0 26 31	0 27 4	
Düsseldorf (Bilk)	51°12′25″	24°26′ 0″	−0h26m30s	0h27m 5s	
Eisenach	50 58 55	28 0 0	−0 12 14	0 41 21	
Elberfeld	51 15 24	24 49 39	−0 24 55	0 28 40	
Elbing	54 8 20	37 2 30	+0 23 56	1 17 31	
Erfurt	50 58 49	28 42 15	−0 9 25	0 44 10	
Erlangen Protest. Kirche	49°35′48″	28°40′ 4″	−0h 9m34s	0h44m 1s	
Essen	51 27 25	24 40 40	−0 25 31	0 28 4	
Flensburg	54 47 0	27 5 40	−0 15 51	0 37 44	
Frankfurt a. Main Dom	50 6 43	26 21 0	−0 18 50	0 34 45	
Frankfurt a. d. Oder	52 22 8	32 13 0	+0 4 38	0 58 13	
Freiberg	50°55′ 0″	31° 0′20″	−0h 0m13s	0h53m22s	
Freiburg in Baden	47 59 40	25 31 0	−0 22 10	0 31 25	
Fürth	49 28 35	28 39 0	−0 9 38	0 43 57	
Gäbris	47 22 55	27 7 58	−0 15 42	0 37 52,516	Gradm. 1880
Genf Sternwarte	46 11 59	23 48 57	−0 28 58	0 24 36,791	" "
Giessen	50°35′10″	26°20′40″	−0h18m51s	0h34m44s	
Gladbach	51 11 40	24 5 3	−0 27 54	0 25 41	
Glauchau	50 49 0	30 13 0	−0 3 22	0 50 13	
Gotha Sternwarte	50 56 38	28 22 32	−0 10 44	0 42 51	
Görlitz	51 9 20	32 39 6	+0 6 22	0 59 57	
Göttingen Sternwarte	51°31′48″	27°36′20″	−0h13m49s	0h39m46,317s	Gradm. 1880
Gratz Jesuitenschule	47 4 37	33 6 45	+0 8 13	1 1 48	
Greifswalde Leuchtthurm	54 15 4	31 35 25	+0 2 8	0 55 43	
Greenwich Sternwarte	51 28 38,4	17 39 45,27	−0 53 34,870	0 0 0	
		=1h10m39,018s	=−13°23′43,05″		

Punkt	Geographische Breite	Geographische Länge von Ferro in Bogen	Geographische Länge von Berlin in Zeit	Geographische Länge von Greenwich in Zeit	Bemerkungen
Guben	51° 57′ 6″	32° 21′ 50″	+0h 5m 13s	0h 58m 48s	
Haag	52 4 40	21 58 25	−0 36 20	0 17 15	
Halberstadt	51 54 6	28 43 0	−0 9 22	0 44 18	
Halle	51 29 38	29 37 30	−0 5 44	0 47 51	
Hamburg Sternwarte	53 33 7	27 38 22	−0 13 41	0 39 54	
Hanau	50° 8′ 2″	26° 35′ 0″	−0h 17m 54s	0h 35m 41s	
Hannover Techn. Hochschule	52 22 52	27 22 52	−0 14 42	0 38 52	
Heidelberg	49 24 40	26 22 20	−0 18 45	0 34 50	
Hildesheim	52 9 6	27 37 0	−0 13 46	0 39 49	
Jena	50 56 29	29 17 0	−0 7 6	0 46 29	
Karlsruhe Polytechnikum	49° 0′ 42″	26° 4′ 43″	−0h 19m 55s	0h 33m 40s	
Kassel (Martinsthurm)	51 19 7	27 9 57	−0 15 34	0 38 1	
Kiel Sternwarte	54 20 30	27 48 45	−0 12 59	0 40 36	
Königsberg Sternwarte	54 42 51	38 9 30	+0 28 24	1 21 59	
Laibach Schloss	46 2 57	32 10 26	+0 4 28	0 58 3	
Leiden Sternwarte	52° 9′ 20″	22° 8′ 50″	−0h 35m 39s	0h 17m 56,330s	Gradm. 1880
Leipzig Sternwarte	51 20 6	30 3 15	−0 4 1	0 49 33,993	„ „
Liegnitz	51 12 49	33 49 32	+0 11 4	1 4 39	
Linz	48 18 20	31 57 0	+0 3 34	0 57 9	
Lübeck Sternwarte	53 51 31	28 21 11	−0 10 49	0 42 46	
Magdeburg	52° 8′ 4″	29° 18′ 30″	−0h 7m 0s	0h 46m 35s	
Mailand	45 28 1	26 51 14	−0 16 49	0 36 45,982	Gradm. 1880
Mainz Dom	49 59 44	25 56 8	−0 20 29	0 33 6	
Mannheim	49 29 11	26 7 23	−0 19 44	0 33 50,500	Gradm. 1880
Marburg Sternwarte	50 48 47	26 26 1	−0 18 30	0 35 5	
Metz	49° 7′ 24″	23° 50′ 23″	−0h 28m 52s	0h 24m 43s	
Moskau Sternwarte	55 45 20	55 4 4	+1 36 42	2 30 17	
Mühlhausen kl. Dom	47 44 51	25 0 10	−0 24 13	0 29 22	
München Sternwarte	48 8 45	29 16 16	−0 7 9	0 46 26,060	Gradm. 1880
Münster Ueberwasser-Kirche	51 58 10	25 17 31	−0 23 4	0 30 31	
Neuenburg Sternwarte	47° 0′ 1″	24° 37′ 14″	−0h 25m 45s	0h 27m 49,919s	Gradm. 1880
New-York	40 43 48	−56 19 30	−5 49 32	19 4 3	
Niendorf	53 59 45	28 29 15	−0 10 17	0 43 18	
Nürnberg Burg Runder Thurm	49 27 30	28 44 26	−0 9 16	0 44 19	
Offenbach	50 6 20	26 25 35	−0 18 32	0 35 3	
Olmütz Sternwarte	49° 35′ 43″	34° 56′ 45″	+0h 15m 33s	1h 9m 8s	
Osnabrück	52 16 28	25 42 35	−0 21 24	0 32 11	
Padua	45 24 2	29 32 3	−0 6 6	0 47 29,149	Gradm. 1880
Paris Sternwarte	48 50 11,2	20 0 0	−0 44 13,888 =11° 3′ 28,32″	0 9 20,982 =2°20′14,73″	„ „
Petersburg Sternwarte	59° 56′ 30″	47° 58′ 13″	+1h 7m 39s	2h 1m 14s	
Pforzheim	48 53 30	26 22 0	−0 18 46	0 34 49	
Plauen	50 29 30	29 46 40	−0 5 7	0 48 28	
Posen	52 24 40	34 36 12	+0 14 11	1 7 46	
Potsdam	52 22 56	30 43 43	−0 1 19	0 52 16	
Prag Sternwarte	50° 5′ 18″	32° 5′ 14″	+0h 4m 7s	0h 57m 42s	
Regensburg	49 1 10	29 45 40	−0 5 11	0 48 24	
Riga	56 56 36	41 48 11	+0 42 59	1 36 34	
Rom (Coll. Rom.)	41 53 54	30 8 18	−0 3 41	0 49 54	
Rostock	54 5 29	29 48 33	−0 5 0	0 48 35	
Rotterdam	51° 55′ 20″	22° 9′ 0″	−0h 35m 38s	0h 17m 57s	
Schwerin Sternwarte	53 37 38	29 5 0	−0 7 54	0 45 41	
Stettin Navigationsschule	53 26 21	32 14 34	+0 4 44	0 58 19	
Stralsund	54 18 20	30 46 0	−0 1 10	0 52 25	
Strassburg Münster	48 34 57	25 24 54	−0 22 34	0 31 1	
Stuttgart Polytechnikum	48° 46′ 56″	26° 50′ 31″	−0h 16m 52s	0h 36m 43s	
Trier	48 45 25	24 18 7	−0 27 2	0 26 33	
Triest Sternwarte	45 38 34	31 25 15	+0 1 27	0 55 2	
Tübingen Sternwarte	48 31 12	26 42 58	−0 17 22	0 36 10	
Ulm Münster	48 23 56	27 39 27	−0 13 36	0 39 59	
Washington	38° 53′ 39″	−59° 23′ 13″	−0h 1m 47s	18h 51m 48s	
Wien Sternwarte	48 12 36	34 2 42	+0 11 57	1 5 32	
Wiesbaden Neue Ev. Kirche	50 4 58	25 54 26	−0 20 36	0 32 59	
Würzburg	49 47 39	27 35 47	−0 13 51	0 39 54	
Zürich	47 22 40	26 12 51	−0 19 22	0 34 12,396	Gradm. 1880